GEOMETRIA - INDICE APPUNTI

Prof. Rosaria Rota

[→]

42. GEOMETRIA AFFINE DEL PIANO / EQUAZIONE PARAMETRICA DI r / PARAMETRI DIRETTORI

43. POSIZIONE DI DUE RETTE

44. FASCI DI RETTE

45. GEOMETRIA AFFINE DELLO SPAZIO / EQ. PARAMETRICA - CARTESIANA PIANO / INTERS. PIANI

46. PARALLELISMO DI DUE PIANI / INTERSEZIONE RETTA - PIANO

47. FASCI DI PIANI / INTERSEZIONE DI DUE RETTE

48. GEOMETRIA EUCLIDEA / COSENI DIRETTORI

49. ANGOLI TRA DUE RETTE / COSENO DELL'ANGOLO TRA DUE PIANI / ⊥ RETTA/RETTA, RETTA/PIANO

50. DISTANZA PUNTO/RETTA NEL PIANO

I. APPENDICE (GEOMETRIA AFFINE, EUCLIDEA)

[GEOMETRIA] - 1/10/06 (INFORMAZIONI SULL'UNI)

Esame è solo scritto - es. di pratica e domande di teoria. In alcuni casi ci può essere orale.

ORARI RICEVIMENTO STUDENTI: Prof.ssa R. Rota — email (non la ama molto)

- 1° periodo (1/10 - 12/11) → GIOVEDÌ alle 13.00 aula 2VM
- ~~2° semestro~~ (dal 12/11 a 6/12) → GIO. ore 11.30 Dipartimento Matematica, 3° piano, stanza 307 — Largo S. Murialdo

LIBRI DI TESTO:

1) R. PROCESI - R. ROTA: "LEZIONI DI GEOMETRIA", Cas. ed. "ACCADEMICA"
2) // - // : "ESERCIZI DI GEOMETRIA e ALGEBRA", Cas. ed. "ESCULAPIO"/"TAVI CHELLI" — anche esercizi di esame

---

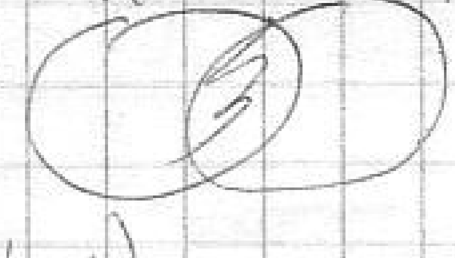
SIMBOLOGIA:

$\in$ (appartenente) - $x \in A$ (elemento, insieme), $\notin$: non appartenente, $\forall$ per ogni, $\exists$ esiste, $\exists!$ esiste unico (un solo elem.)

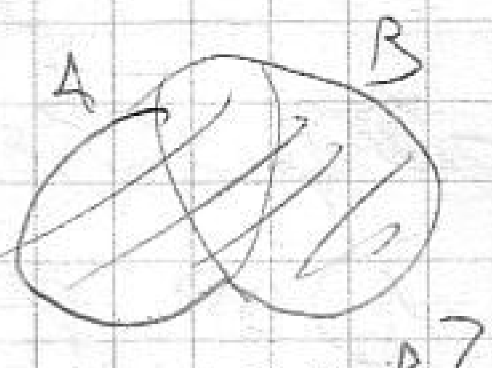
$\nexists$ non esiste, $\Rightarrow$ implica (IPOTESI $\Rightarrow$ TESI), $\Leftrightarrow$ se e solo se ($p \Leftrightarrow q$: p implica q e viceversa)

$p \Rightarrow q$
$\wedge$
$q \Rightarrow p$

$\cap$ intersezione (insieme elementi comuni ai due insiemi)

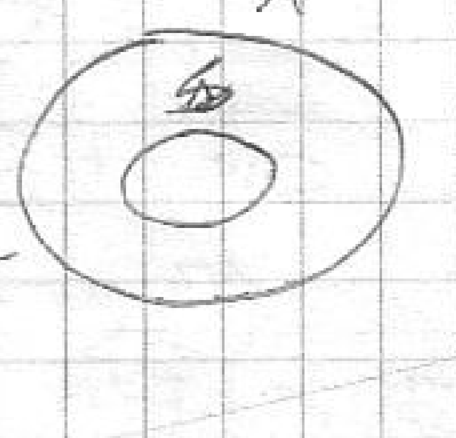


$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \in B\}$, $\cup$ unione



$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ o } x \in B\}$

$\subseteq$ Contenuto ex.



$x \in S \Rightarrow x \in A$

(S è sottoinsieme di A) $S \subseteq A$

$\supseteq$ contenente $A \supseteq S$

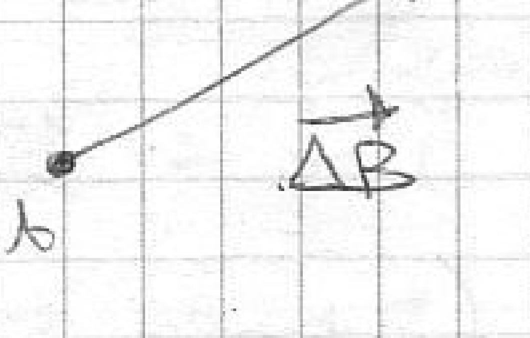
---

1. VETTORI

(Arriva a parlare dell'algebra lineare, SPAZI VETTORIALI REALI)

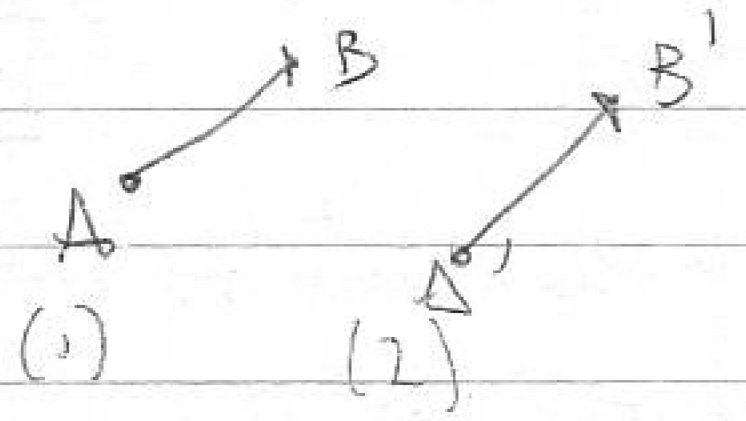
ex. Insieme dei vettori nel piano.

VETTORE APPLICATO IN UN • "A": segmento orientato di 1° ESTREMO A e 2° ESTR. B



1) DIREZIONE: quella della retta AB
2) VERSO: di percorrenza secondo cui A precede B
3) LUNG. $\overline{AB}$ = MODULO del VETTORE → $|\overrightarrow{AB}|$

(→ slide)



(1) VETT. APPL. IN A → $\vec{AB}$ } stesso DIR/VER/MOD
(2) // // // A' → $\vec{A'B'}$ }

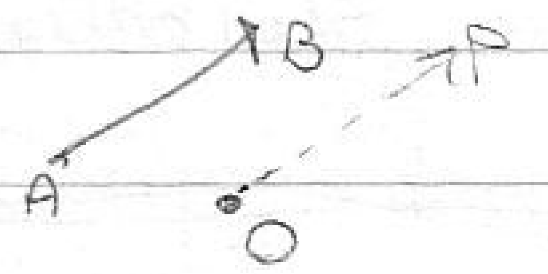
si comportano allo stesso modo, e li IDENTIFICO

Definisco EQUIPOLLENTI $\vec{AB}$, $\vec{A'B'}$ SE

(insieme)

$\boxed{[\vec{AB}]}$ = { vettori applicati del piano EQUIPOLLENTI ad $\vec{AB}$ }

Fissando un punto O nel piano, col vettore $\vec{AB}$ ...

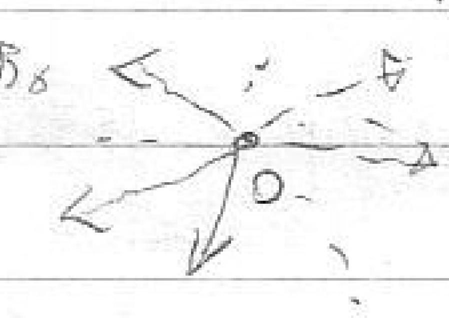


$\exists!$ vettore applicato in O equipollente al $\vec{AB}$

... considero l'insieme dei vettori del piano applicati ad O:

V_O = { vettori del piano APPLICATI in O }

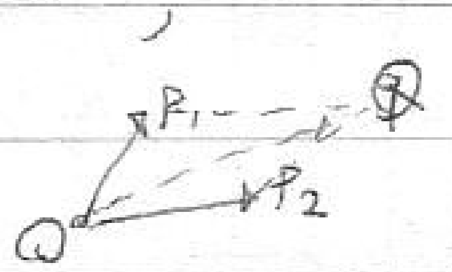
vettori applicati in O



Somma

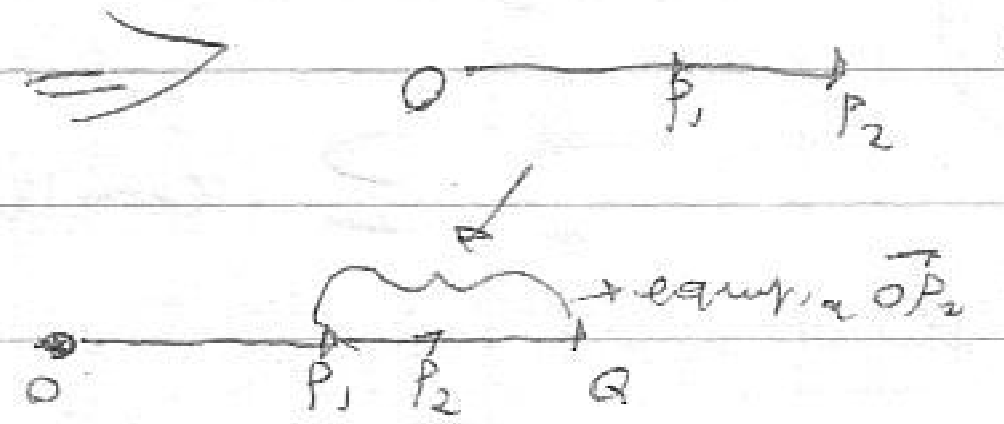
- Def. $\vec{OP_1} + \vec{OP_2}$ (presi due vettori); CASI:

1) O, P_1, P_2 non ALLINEATI ⟹



somma è DIAGONALE PARALLELOGRAMMA costruito sui vettori [$\vec{OP_1} + \vec{OP_2} = \vec{OQ}$]

2) Tutti allineati ⟹

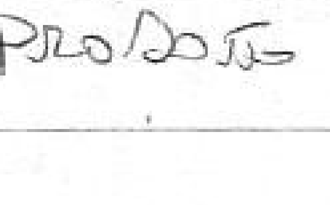


equip. a $\vec{OP_2}$

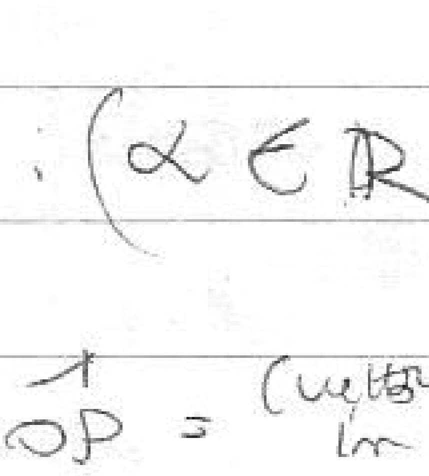
$\vec{OP_1} + \vec{OP_2}$ = a partire da $\vec{OP_1}$, prendo un equipollente e aggiungo $\vec{OP_2}$ = $\vec{OQ}$

- Def. PRODOTTO ESTERNO: $(\alpha \in \mathbb{R},\ \vec{OP} \in V_O) \to \alpha \cdot \vec{OP}$ prodotto esterno fra n. R e vettori

(vettore appl. in O)



$\alpha \cdot \vec{OP}$ = (vettore applicato in O)
- DIR. (quello della retta $\vec{OP}$)
- VERSO: quello di OP con $\alpha > 0$; OPPOSTO con $\alpha < 0$
- MOD. PRODOTTO $|\alpha| |\vec{OP}|$



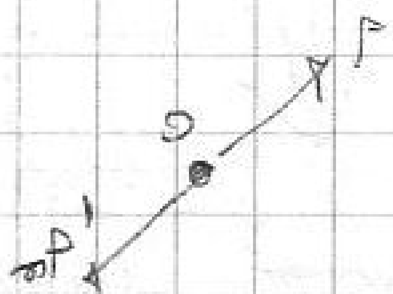
(+ altro foglio)

PROPRIETÀ della somma di vett.:

1) ASSOCIATIVA: $(\vec{OP_1}+\vec{OP_2})+\vec{OP_3} = \vec{OP_1}+(\vec{OP_2}+\vec{OP_3})$

2) COMMUTATIVA: $\vec{OP_1}+\vec{OP_2} = \vec{OP_2}+\vec{OP_1}$

3) $\forall\ \vec{OP}\ \exists$ l'opposto $-\vec{OP}$



$\vec{OP'}$ (simmetrico di P rispetto ad O) $\vec{OP}+\vec{OP'} = \boxed{\vec{0}}$

VETTORE NULLO

Considerando $(\underset{\text{interi relativi}}{\mathbb{Z}}, \underset{\text{somma}}{+}) = (V_0, \overset{\text{somma}}{+})$

PROPRIETÀ PRODOTTO ESTERNO:

1) $\alpha(\vec{OP_1}+\vec{OP_2}) = \alpha\vec{OP_1}+\alpha\vec{OP_2}$ [DISTRIBUTIVA] - rispetto a somma vettori

2) $(\alpha+\beta)\vec{OP_1} = \alpha\vec{OP_1}+\beta\vec{OP_1}$ ["] - rispetto a somma in $\mathbb{R}$

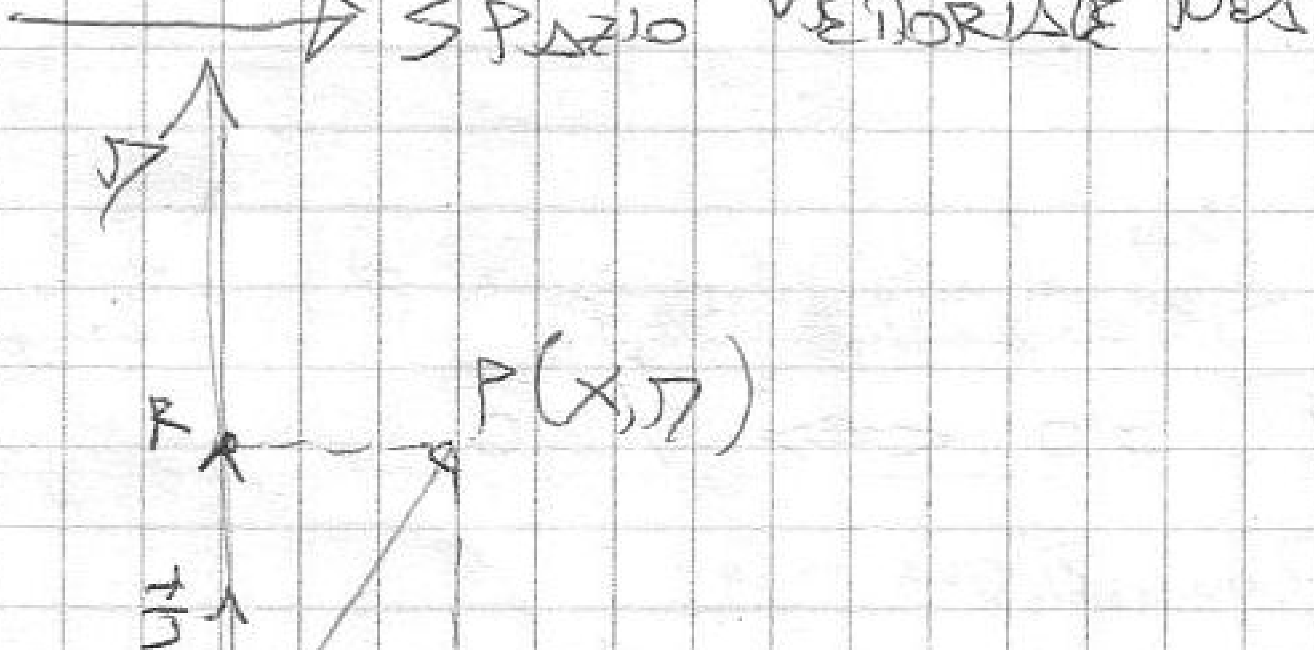
3) $(\alpha\beta)\vec{OP_1} = \alpha(\beta\vec{OP_1})$ ["associatività" con $\mathbb{R}$]

4) $1\vec{OP_1} = \vec{OP_1}$

4-10-mod. (ripasso: $[\vec{AB}] = \{$vett. app. equip. ad $\vec{AB}\}$ → VETTORE GEOMETRICO

$(V_0, \overset{\text{somma}}{+}, \overset{\text{prodotto con } R}{\cdot})$ → SPAZIO VETTORIALE REALE (esempio in astratto: V_{punto})

$\vec{OP} \in V_0$



$\vec{i} = V_0$ direzione e verso quelli dell'asse x, ~~modulo~~ $|\vec{i}|=1$

$\vec{j} = V_0$ direz. e ver. dell'asse y, $|\vec{j}|=1$

$\vec{i}$ e $\vec{j}$ VERSORI DEGLI ASSI (dell'asse x, dell'asse y) → è un VETTORE di MODULO = 1. Considero $\vec{OR}$ e $\vec{OQ}$:

$\vec{OQ} = x\vec{i}$ (prodotto)

$\vec{OR} = y\vec{j}$

$\vec{OP} = \vec{OQ}+\vec{OR}$ (somma) regola par. → $\boxed{\vec{OP} = x\vec{i}+y\vec{j}}$ → "il vettore $\vec{OP}$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ a coefficienti x e y

2) $\boxed{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} = \vec{0},\ \alpha \text{ e } \beta \neq 0}$ → non è possibile perché:

Supponiamo $\alpha \neq 0 \Rightarrow \vec{i} = \underbrace{-\frac{\beta}{\alpha}}_{\in \mathbb{R}}\vec{j}$, $\vec{i}$ non ha la stessa dir. di $\vec{j}$, quindi β

dovrebbe essere $= 0$

$\Downarrow$

$\boxed{\alpha = \beta = 0}$ → $\vec{j}$ e $\vec{i}$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI

formano tutto l'insieme V_0

Considerando $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ verifica 1) e 2) $\Rightarrow$ B è una BASE di V_0

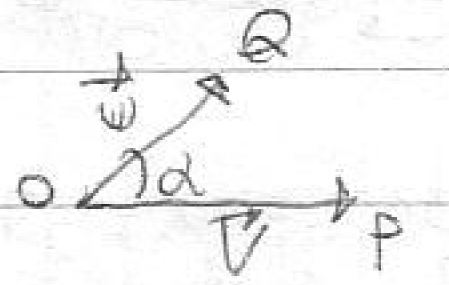
1) e 2)

e avendo a che fare con $\vec{i}$ e $\vec{j}$ (versori), B è una BASE ORTONORMALE + essendo $\vec{i}$ e $\vec{j}$ versori con il ... sono ortogonali

ALTRE OPERAZIONI TRA VETTORI:

3) PRODOTTO SCALARE V_0 ; $\underset{\vec{v}}{\vec{OP}}$ e $\underset{\vec{w}}{\vec{OQ}} \in V_0$, Definiamo $\vec{v} \times \vec{w}$ $(= \vec{v} \cdot \vec{w})$

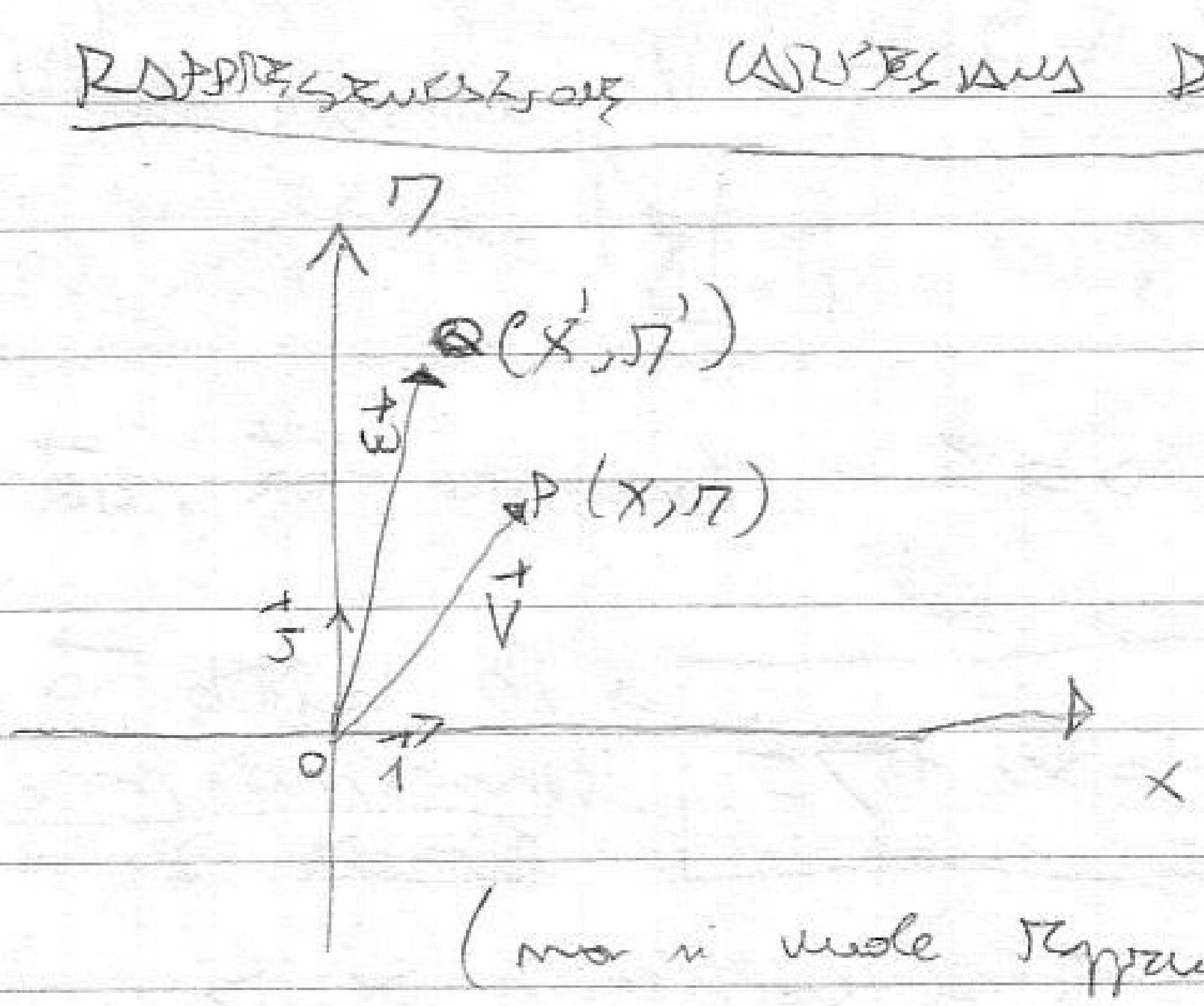
Il risultato $\in \mathbb{R}$, non un vettore.

Ex:  : $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha$

PROPRIETÀ:

1) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{w}$ (si include anche $\vec{0}$)
2) $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 \geq 0$ ~~...~~ è $= 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$
3) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$, vale la commutativa
4) $\alpha(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \alpha\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \alpha\vec{w}$, vale la distributiva $[\alpha \in \mathbb{R}]$

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DEL P.S.:



$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{OQ} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

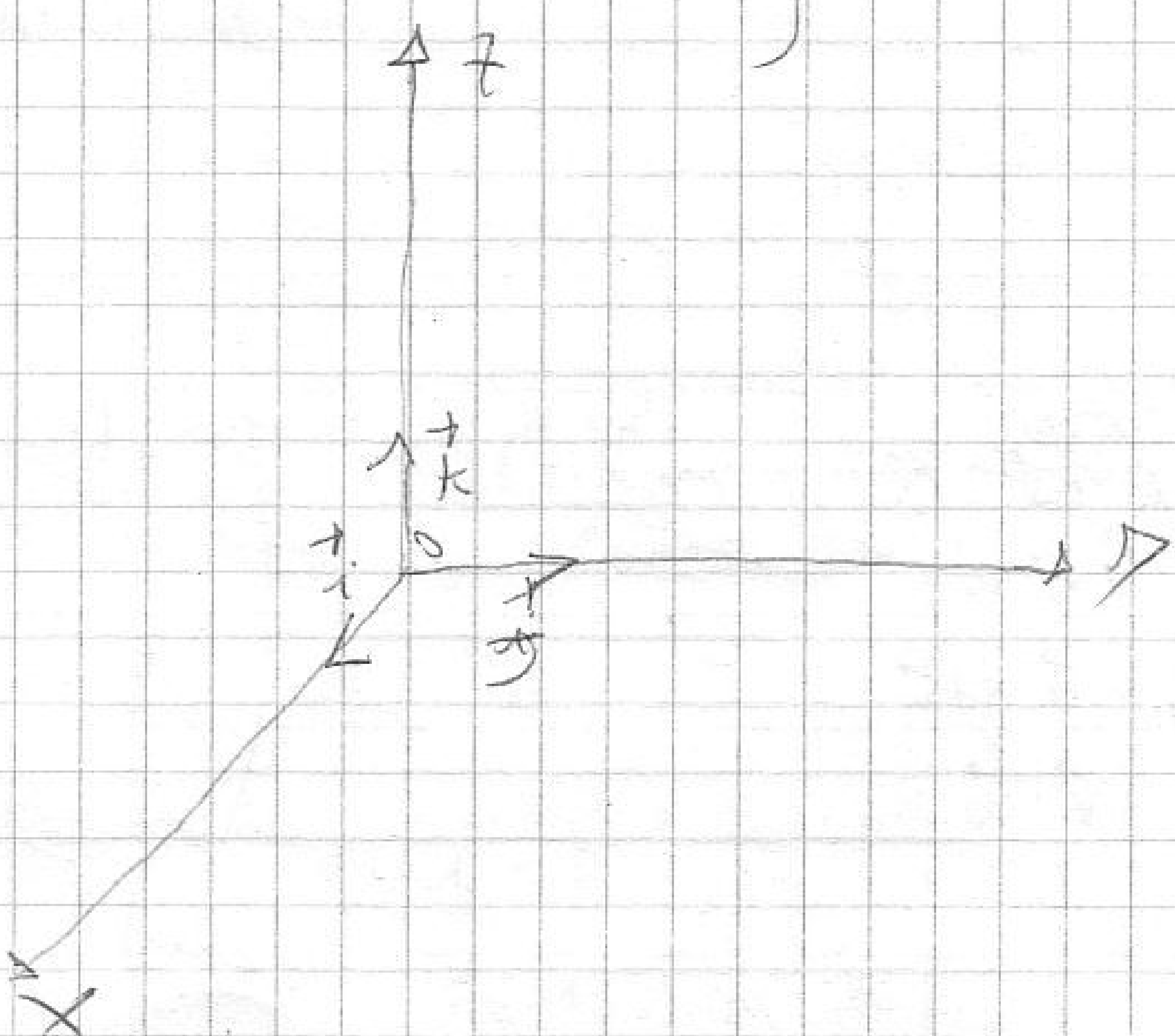
(ma si vuole rappresentare angoli e vettori)

$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w}} = \vec{OP} \cdot \vec{OQ} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx'(\vec{i} \cdot \vec{i})^{\to 1} + y\cancel{x}(\vec{j} \cdot \vec{i})^{\to 0} +$

$\cancel{yx'}\ xy'(\vec{i} \cdot \vec{j})^{\to 0} + yy'(\vec{j} \cdot \vec{j})^{\to 1} = \boxed{xx' + yy'}$ (non compare l'apparato ma solo le coordinate – o componenti – di $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$)

$\neq$

$V_0 = \{$ vett. app. in O dello spazio $\} =$



$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ → base di V_0 ; $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

P.S. → $xx' + yy' + zz' = \vec{v} \cdot \vec{w}$

Intest. 5-10-06 (ripasso) P.S. di V_0 dei vettori nello spazio

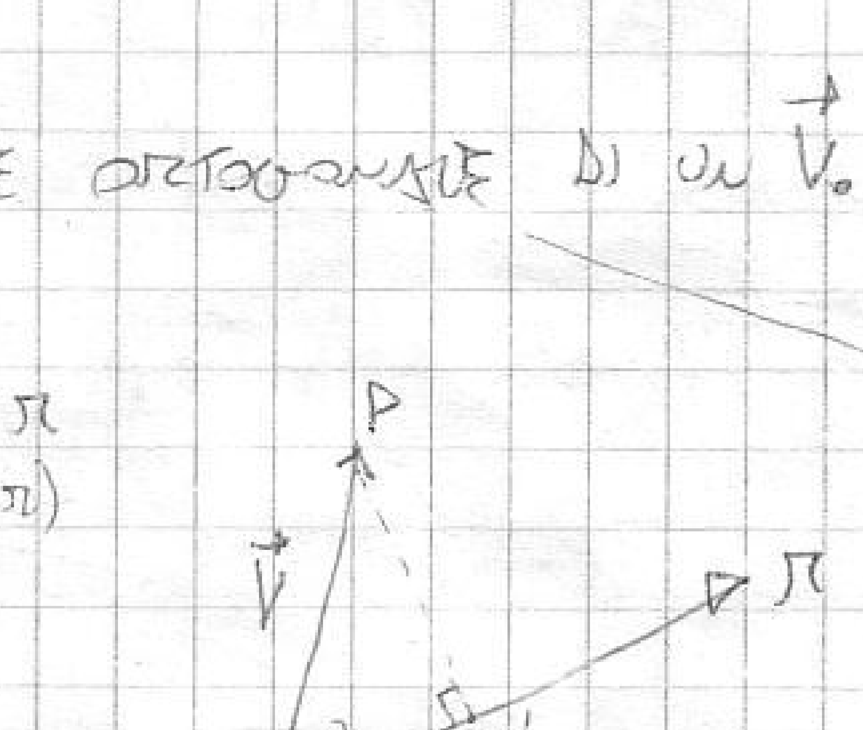
$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, proprietà P.S.:

1) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$, 2) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a\vec{v} \cdot \vec{w} = a(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{v} \cdot a\vec{w}$

3) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

COMPONENTE ORTOGONALE DI UN $\vec{V_0}$ SECONDO UNA RETTA ORIENTATA r

$\vec{\pi}$ = versore di r ($|\vec{\pi}| = 1$ e diretto su r)



V_r (numero reale) = (Pr. scal.) $\vec{v} \cdot \vec{\pi} = |\vec{v}|(1) \cdot \cos\alpha$

(è la misura di OP') se α è acuto V_r è + (pos.) else è − (neg.)

Oss: x, y, z sono componenti perché: →

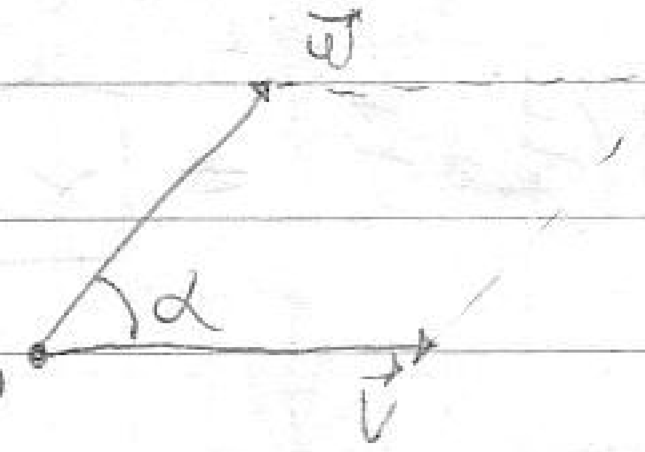
Ex. $\vec{v} = \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $\vec{i} = 1\vec{i}$. Componente ort. di V secondo l'asse x^+

$V_x = \vec{v} \cdot \vec{i} = x + (y \cdot 0) + (z \cdot 0) \Rightarrow V_y = y \Rightarrow V_z = z$: x, y, z sono le co. ort. dei vettori secondo gli assi.

PRODOTTO VETTORIALE: Si deve definire solo nel caso dello spazio, solo tra vettori nello spazio

Es: $\vec{v}, \vec{w} \in V_0$

DIFF. 1) con P.S. il risultato è un VETTORE



P.V. = $\vec{v} \wedge \vec{w}$ = (vettore!)

MOD.	DIR.	VER.
$\lvert\vec{v}\rvert \lvert\vec{w}\rvert \operatorname{sen}\alpha$ (area del parallelogramma corrispondente)	Perpendicolare al piano dei vettori	$\vec{v}$, per sovrapporsi a $\vec{w}$, ruota in SENSO ANTIORARIO

Ex: $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

- PROPRIETÀ P.V.:

1) $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$ (cambia il verso rispetto -)

2) $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0} \iff \vec{v} \parallel \vec{w}$

3) $t\vec{v} \wedge \vec{w} = t(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} \wedge t\vec{w}$

4) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

RAPP. CARTESIANA DI P.V.

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ $\quad \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$

$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ $\quad \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0}$

$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ $\quad \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) =$$

$$= xx'\overbrace{(\vec{i} \wedge \vec{i})}^{\vec{0}} + xy'\overbrace{(\vec{i} \wedge \vec{j})}^{\vec{k}} + xz'\overbrace{(\vec{i} \wedge \vec{k})}^{-\vec{j}} + yx'\overbrace{(\vec{j} \wedge \vec{i})}^{-\vec{k}} +$$

$$yy'\overbrace{(\vec{j} \wedge \vec{j})}^{\vec{0}} + yz'\overbrace{(\vec{j} \wedge \vec{k})}^{\vec{i}} + zx'\overbrace{(\vec{k} \wedge \vec{i})}^{\vec{j}} + zy'\overbrace{(\vec{k} \wedge \vec{j})}^{-\vec{i}} +$$

$$zz'\underbrace{(\vec{k} \wedge \vec{k})}_{\vec{0}} =$$

$$= xy'\vec{k} - xz'\vec{j} - yx'\vec{k} + yz'\vec{i} + zx'\vec{j} - zy'\vec{i} =$$

$$= \boxed{(yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}} = \vec{v} \wedge \vec{w}$$

$$(\text{determinante}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

GEOMETRIA - 6/10/2004 - MATRICI: la MATRICE $m \times n$ a coeff $\mathbb{R}$, ovvero: tabella con m righe e n colonne:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Consideriamo $a_{ij} \in \mathbb{R}$ — i: INDICE DI RIGA, j: INDICE DI COLONNA

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

2 righe, 3 colonne → MATRICE 2×3 [$a_{22} = 0$, $a_{13} = 1$, ...]

↓ è più indicare in forma compatta: $A = (a_{ij})$ $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots n$

MATRICE QUADRATA di ordine n SE $m = n$ (altrimenti era "RETTANGOLARE")

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$ → [insieme matrici possibili $m \times n$ a coeff. reali]

$M_n(\mathbb{R})$ → [insieme MAT. □ di ordine n a coeff. $\mathbb{R}$]

Data una MAT. □ di ordine n (si indica anche con: $A \in M_n(\mathbb{R})$), si dicono ELEMENTI DIAGONALI di A i coeff. $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots a_{nn}$ e si dice DIAGON. PRINCIPALE la linea che li contiene.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 3/2 \\ -1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

→ [DIAGONALE SECONDARIA]

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Prendiamo la riga $(2, 0, -4)$. È costituita da tre num. $\mathbb{R}$, quindi la si considera: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$ - tutte le possibili terne di num. $\mathbb{R}$. La riga prenderà il nome di VETTORE RIGA in quanto è uno SPAZIO VETTORIALE. Prendendo ad ex la colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ la si considera $\in \mathbb{R}^2$ e cioè VETT. COLONNA.

SOMMA TRA MATRICI

DEF: $M_2(\mathbb{R})$, $\overset{\text{tra matrici}}{+}$, $\cdot$ + $\mathbb{R}$, operazioni definite solo nello stesso insieme

Prendiamo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Def: 1) $A+B =$ e 2) αA $\longrightarrow$ 2) $= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$

1) risultato e matrice: $= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 3$$

1) $A+B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\alpha A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$

DEF: $M_{m \times m}(\mathbb{R})$, $+$, $\cdot$ PROPRIETÀ (stesse dei vettori):

1/ $A+B = B+A$ (commutativa)

2/ $A+B+C = A+(B+C)$ (associativa)

3/ $\exists\, M_{\text{nulla}}$ $\left[\text{ex: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}\right]$

Elemento NEUTRO rispetto alla somma

$A+O = O+A = A$

4/ $\forall A \; \exists$ opposta $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots \\ -a_{21} & \dots & \dots \end{pmatrix}$

$A + (-A) = O$

5/ $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

6/ $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ (distrib. rispetto alla somma di N. $\mathbb{R}$)

7/ $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (associatività)

8/ $1 \cdot A = A$

Insieme matrici assume la struttura di SPAZIO VETTORIALE REALE.

$(\longrightarrow)$

PRODOTTO DI DUE MATRICI

Caso 1: PROD. tra MAT. di 1×m : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix}$ → matrice 1×m
mat. riga

poi prendo una matrice colonna (m×1) : $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ → matrice m×1

Il numero di colonne della 1 MAT DEVE essere = al n. di righe della 2 MAT. !

SUL COMPITO RIPORTA TUTTI I PASSAGGI !!!
Come con D'Antonio !!

svolgimento:

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1m}b_{m1} \end{pmatrix}}_{\text{MATRICE } 1\times 1}$$

$M_{1\times m} \cdot M_{m\times 1} = M_{1\times 1}$

Es:

$$\underset{[1\times 3]}{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}} \underset{[3\times 1]}{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (1\cdot 4) + (-3\cdot -1) + (2\cdot 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3+6 \end{pmatrix} = \underset{[1\times 1]}{\begin{pmatrix} 13 \end{pmatrix}}$$

Caso 2: PROD. tra MAT. di 2×2

$$A = \underset{[2\times 2]}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \quad ; \quad B = \underset{[2\times 2]}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}$$

Voglio il PRODOTTO RIGHE PER COLONNE $A \cdot B = C$

riga 1 della matrice A: $(a_{11} \; a_{12})$

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

(1) $\boxed{c_{11}}$ = Prendo la prima riga e la prima colonna e ne faccio il prodotto

colonna 1 della matrice B: $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$

$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$; c (2) : $\boxed{c_{12}} = (a_{11} \; a_{12}) \cdot \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$

(3) = $\boxed{c_{21}} = (a_{21} \; a_{22}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$; c (4) = $\boxed{c_{22}} = (a_{21} \; a_{22}) \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} (-1\cdot 1) + (2\cdot -2) & \overbrace{(-1)(-3) + (2\cdot 5)}^{(1\cdot 0 \cdot 1)} \\ (3\cdot 1) + (4\cdot -2) & (3\cdot -3) + (4\cdot 5) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 13 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$$

SONO DIVERSI!!

ora si fa $B \cdot A$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \cdot (-1) + (-3 \cdot 3)}^{1^\circ \text{ riga } B \times 1^\circ \text{ col. di } A} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

In generale $\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$ (non commutativo), però:

Oss:

1/ : $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

2/ : $A \cdot I = I \cdot A = A$ $\left[I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \dots 1 \text{ nella DIAG. PRIN. e } 0 \dots 0 \text{ altrove} \Rightarrow \text{MATRICE IDENTICA} \right]$

In questo caso è commutativo.

//

Def. PROD. + in generale:

A matrice $m \times n$, B matrice $n \times p$. $A \cdot B = C = (c_{ij})$ matrice $m \times p$

$\Downarrow$

c_{ij} si ha moltiplicando la i-esima riga per la j-esima colonna.

//

Prendo $M_2(\mathbb{R})$ ("parallelismo" V_0)

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

[Nel caso dei vettori $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ e in qualsiasi 1) $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$ + COMB. LINEARE]
[2) $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$ [per def. di + tra MATRICI]

$$= \boxed{a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow B \text{ verifica 1), cioè}$$

ogni matrice è COMBINAZIONE LINEARE DI

(10) Ora controlliamo 2) nelle matrici:

$$\alpha \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$ → [2) dei vettori tra le matrici]

Faccio pr. est. e poi somma, e trovo $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ [coeff. devono essere = quindi ⇐]

$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ → CONDIZIONE ANALOGA A VETTORI ⇐

⇓

B è una BASE di $M_2(\mathbb{R})$ → MATRICI E VETTORI HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO

Def.: MATRICI QUADRATE

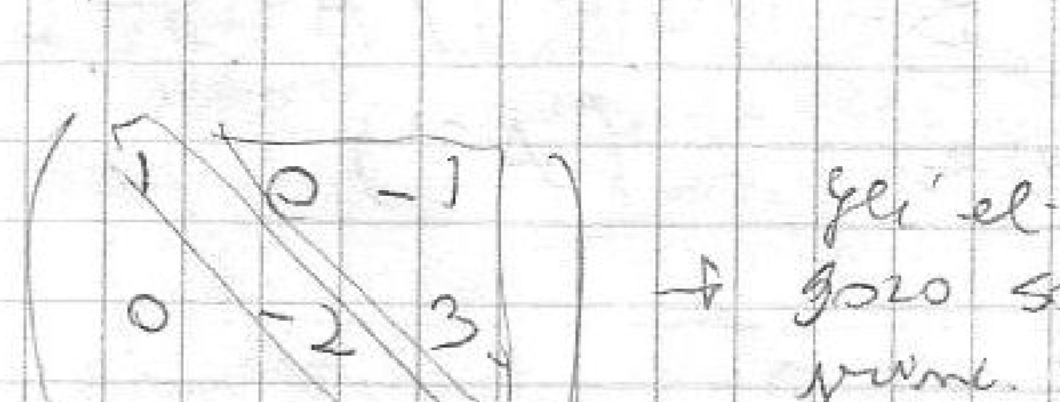
- $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&\boxed{0}\end{pmatrix}$ → Gli elementi $\neq 0$ sono solo nella diagonale principale, ma NON È DETTO che 0 non ci può stare → Questa è una MATRICE DIAGONALE $\begin{pmatrix} & 0\\ 0 & \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-2&3\\0&0&0\end{pmatrix}$ → gli el. $\neq 0$ sono solo sopra la diag. princ. Sotto alla diag. c'è 0 $\begin{pmatrix} & \\ 0 & \end{pmatrix}$ → Questa è una MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE

∃ anche una MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE $\begin{pmatrix} & 0\\ & \end{pmatrix}$

/10/2004.

INTERPRETAZIONE GEOM. DEL PRODOTTO TRA MATRICI



$A = \begin{pmatrix}1&-2\\3&0\end{pmatrix}$ Matrice colonna delle coordinate del punto P $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$A \cdot X = \begin{pmatrix}x-2y\\3x\end{pmatrix}$ $\begin{cases} x' = x - 2y & (\mathbb{R}) \\ y' = 3x & (\mathbb{R}) \end{cases}$

⇓

$A \cdot X$ individua una trasformazione del piano (da P a P')

Def. : A matrice $m \times n$; la MATRICE TRASPOSTA di A è:

A^T ottenuta dallo scambio delle righe con le colonne.

Ex: $\underset{(2\times3)}{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

PROPRIETÀ: (caso di MAT. $\square$ - $M_n(\mathbb{R})$ - alcune cose valgono anche per $M_{m\times n}(\mathbb{R})$)

$1/ \ (A^T)^T = A$; $2/ \ (A+B)^T = A^T + B^T$; $3/ \ (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

↓

MATRICE SIMMETRICA: (sono comode, si possono diagonalizzare)

$A \in \overbrace{M_n(\mathbb{R})}^{\text{quadrata}}$ è SIMMETRICA se $A^T = A$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ [simm. rispetto alla diagonale principale]

//

MATRICE INVERTIBILE:

$A \in M_n(\mathbb{R})$ è INVERTIBILE se $\exists\, B \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, A \cdot B = B \cdot A = I$

Si chiamerà MATRICE INVERSA DI A. (A^{-1})

↓

UNICITÀ DELL'INVERSA.

Ipotesi: B, C sono INVERSE di A. $C = C \cdot I = (A \cdot B) = ((C \cdot A)) \cdot B \Rightarrow$

al posto di I

essendo C inversa di A, $C \cdot A = I$

$= I \cdot B = B$. $\Rightarrow$ L'INVERSA, se $\exists$, è UNICA

↓

Se $\exists$, avrà queste PROPRIETÀ: (attento all'ordine)

$1/ \ (A^{-1})^{-1} = A$; $2/ \ (AB^{-1}) = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Dimostr.: inversione dell'imp. dell'ordine

$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = \dots$ VERO

ES:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Cerchiamo una $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Esisterà questa $B \,/\, A \cdot B = I$

(→)

Si fa le prodotti: $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+6z & 2y+6w \\ x+3z & y+3w \end{pmatrix} = A \cdot B$

vogliamo che ris $= I$, cioè $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Due matrici coincidono coeff. per coeff.

$$\begin{cases} 2x+6z=1 \\ 2y+6w=0 \\ y+3z=0 \\ y+3w=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-3z \\ -6z+6z=1 \end{cases} \rightarrow$$

IL SISTEMA E' IMPOSSIBILE, non ammette soluzioni $\Rightarrow$ LA MATRICE A NON E' INVERTIBILE $\rightarrow$ non è vero che tutte sono invert.

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = I \text{ ? Proviamo!}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} x-2z & y-2w \\ 3x+2z & 3y+2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x-2z=1 \\ y-2w=0 \\ 3x+2z=0 \\ 3y+2w=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{x=2z=1} \\ \cancel{y=2w} \\ \cancel{3x+2z=0} \\ \cancel{3w} \end{cases} \quad \begin{cases} x=1+2z \\ y=2w \\ 3+6z+2z=0 \\ 6w+2w=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1+2z \\ y=2w \\ 3+8z=0 \\ 8w=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1+2z \\ y=2w \\ z=-3/8 \\ w=1/8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1-\cancel{6/8}\ 3/4 \\ y=1/4 \\ z=-3/8 \\ w=1/8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{4} \\ z=-\frac{3}{8} \\ w=\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \rightarrow A \text{ è INVERTIBILE}$$

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ E' INVERTIBILE?

Vorrei $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot B$

Per trovarlo devo fare 3^a riga di A x 3^a colonna di B, ma viene sempre 0, non può mai venire 1

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$(\ \ A\ )$

[non inv]
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
[inv]
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Condizione necessaria e sufficiente: $|A| \neq 0$

$3 \cdot 2 - 1 \cdot 6 = \boxed{0}$ Ecco perché non è invertibile nella 2×2

$1 \cdot 2 - 3 \cdot -2 = 8$

Alla base dell'invertibilità della matrice c'è:

DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA (è un numero $\mathbb{R}$)

N.B. CONCETTO: IN UNA MATRICE RETTANGOLARE NON DIRE "DET. DELLA MAT. RETT.", MA INDICA QUELLA ESTRATTA

Casi:

1) $A = (a)$ $\det. A = a$

2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ // // $= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ Il calcolo del det. A di 3×3: REGOLA DI SARRUS. Riscrivo le prime 2 colonne!

$$A = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4\ 5 & 6 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Tratteggio la diag. prim. (1) e poi la secondaria (2) e infine la 3

$$\det A = \left[\overset{\text{PROD. d. DIAG. } 1}{(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33})} + \overset{2}{(a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31})} + \overset{3}{(a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})} \right] - \left[\overset{\text{PROD. DIAG. } 4}{(a_{31}\, a_{22}\, a_{13})} + \overset{5}{(a_{32}\, a_{23} \cdot a_{11})} + \overset{6}{(a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})} \right]$$

11/10 2006

DETERMINANTE DI UNA QUALSIASI MATRICE DI UN DATO ORDINE.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Def: COMPLEMENTO ALGEBRICO dell'elemento a_{23} è un numero $\in \mathbb{R}$: $A_{23} = (-1)^{(2+3)} \cdot$ determinante m. 2×2 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ (somma indici)

[Cancello riga e colonna a cui $\in$ l'elemento).

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $A_{11} = (-1)^{(1+1)} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = (1) \cdot -12 - (-10) = -2$ (mi da sempre)

$A_{32} = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = -5 = 5$

[CASO GENERALE]

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \dots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

[matrice quad. di ordine n]

Prendo un generico a_{ij}

[compl. alg.]

$$A_{ij} = \text{numero} \in \mathbb{R} = (-1)^{(i+j)} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{j+1} & a_{1n} \\ \dots & & & & & \\ & \text{manca riga } i & & & & \\ \dots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mat. ottenuta cancellando la i-esima riga e j-esima colonna $\Leftarrow$ mat. ordine $(n-1)$

TEOREMA DI LAPLACE:

se abbiamo A = mat. ordine n, il det di A = (fissiamo arbitrariamente una riga qualsiasi) =

$$\underbrace{a_{i1}(A_{i1})}_{\text{compl. alg.}} + a_{i2}(A_{i2}) + \dots + a_{in}(A_{in})$$ = SVILUPPO RISPETTO ALLA RIGA i-ESIMA = (o se fissiamo arbitrariamente qualsiasi colonna) =

$$a_{1j}(A_{1j}) + a_{2j}(A_{2j}) + \dots + a_{nj}(A_{nj})$$ = SVILUPPO RISPETTO ALLA COLONNA j-ESIMA → CALCOLO DEL DETERMINANTE

Ex:

A ordine 4,

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -3 \\ -4 & 5 & 6 & -7 \\ -5 & -6 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\det A = a_{11}(A_{11}) + a_{12}(A_{12}) + a_{13}(A_{13}) + a_{14}(A_{14}) = 1(A_{11}) + \cancel{0(A_{12})} + (-1)(A_{13}) + 2(A_{14}) =$$

$$1 \quad \left(A_{11} = \det \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 5 & 6 & -7 \\ -6 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 3(54+56) - 4\overset{45+42}{\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}} - 3\overset{40+36}{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}} = 330 - 4 \cdot 87 - 3 \cdot 76 \right)$$

etc ...

(→)

15

Def:

A = mat. di ordine n, la MATRICE AGGIUNTA di A è la matrice di ordine n TRASPOSTA della matrice avente come coefficienti i complementi algebrici degli elementi di A. $[A^*]$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & \\ \cdots & & & \end{pmatrix}$$

TEOREMA: A = matrice di ordine n è INVERTIBILE $\iff$ det. $A \neq 0$. Risulta poi:

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*}$$

PROPRIETÀ DEI DETERMINANTI

1) Se A ha 1 RIGA o 1 COLONNA NULLA $\Rightarrow \det A = 0$
2) " " " 2 RIGHE = o 2 COLONNE = $\Rightarrow \det A = 0$
3) " " " 2 " o 2 " PROPORZIONALI $\Rightarrow \det A = 0$
4) $\det A = \det A^T$
5) $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$ [TEOREMA DI BINET]

12/10/2004

6) ES:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad |A| = 4+6 = 10$$

(scambiamo 2 righe o 2 colonne) $A' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad |A'| = -6-4 = -10$

Se A' è ottenuta da A scambiando 2 RIGHE o 2 COLONNE, $|A'| = -|A|$

7) Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1 \cdot 1 \cdot |-2| = -2 = \text{PRODOTTO ELEMENTI SU DIAGONALE PRINC.}$$

(triangolare inferiore)

Se A è una MAT. TRIAN. SUP. o INF. o DIAG. $\Rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Es:

moltip. 1 riga per ex (-2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad |A| = 10 \quad ; \quad A' = \begin{pmatrix} -2 & +4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A' = -8 - 12 = -20 = (-2) \cdot 10$$

8) Se A' è ottenuta da A moltiplicando 1 RIGA per K $\Rightarrow \det A' = K \det A$

9) $\det (k \cdot A) = k^n \det A$

RANGO DI UNA MATRICE, di una qualsiasi $m \times n$ A

Def. - SOTTOMATRICE di una matrice A è una matrice le cui righe e colonne di A. Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & -4 & 6 \\ 7 & -1 & -5 & 8 & 9 \end{pmatrix} \; ; \; \underset{\text{(sottom.)}}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- MINORE DI ORDINE h di A, è il det. di una SOTTOMATRICE di ordine h (matr. quadr.)

Ex: $\underset{(3\times 4)}{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 2 & 9 \\ -3 & 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}$ Prendo una sottom. di ordine 2 $\rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$ è un MINORE DI ORDINE 2

Si dice che A ha rango h e si scrive $\operatorname{rg} A = h$ se $\exists$ un minore non nullo di ordine h $\wedge$ sono nulli tutti i minori di ordine $>$ di $h+1$

Es:

$$\underset{(3\times 3)}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$$

$$\det A = 1 \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1 = 3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 3$$

$$\underset{(3\times 4)}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -6 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 11 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$$

(minore)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 11 & -2 \end{vmatrix} = +1 \cancel{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 11 & -2 \end{vmatrix}} + 4 \cancel{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \emptyset$$

$-2 \;\; -22 \;\; -24 \qquad -2 \;\; -4 \;\; -24$

(minore)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 11 & 0 \end{vmatrix} =$$

(minore)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

(minore)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 4 & 0 & 2 \\ 11 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

TEOREMA DEGLI ORLATI:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -6 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 11 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \leq rg\,A \leq 3$$

Fisso l'alt. me un minore di ordine 2 $\neq 0$ ex: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$

orlano il 2x2

Orlati di $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 11 & -2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 11 & 0 \end{vmatrix}$

Se ho un minore di ordine $h < 7$, $rg\,A$ lo ottengo orlando il minore (calcolando solo 2 det.).

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 1 & k & 1 & -1 \\ k & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

det. al variare di k in $\mathbb{R}$ il rango di A.

$$1 \leq rg\,A \leq 3$$

Prendo un minore INDIP. da k. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow 2 \leq rg \leq 3$

Calcolo gli orlati del minore:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(\cancel{0}) - k(-k+1) + 2(k-1) = \cancel{k^2 - k + 2k + 1}$$

$$= k(k-1) + 2(k-1) = (k-1)(k+2)$$

$= 0$ per $k = 1 \vee k = -2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & -1 \\ k & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-k+1) - 1(-1+k) + 2(1-k^2) =$$

$$(1-k) + (1-k) + 2(1-k)(1+k) =$$

$$(1-k)(2 + 2(1+k)) = (1-k)(4+2k)$$

per $k = 1$ & $k = -2$

$rg\,A = 3$ per $k \neq 1$, $k \neq -2$

Per $k = 1$ o $k = -2 \Rightarrow rg = 2$

Supponendo che il 2° fosse 0 per $k = 1$ e $k = 0$, $k = 1 \to rg\,A = 2$; $k = -2 \to rg\,A = 3$;

$k = 0 \to rg\,A = 3$

Def: V insieme. Presi $v, w \in V$ sappiamo $v+w \in V$

$+$ somma. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $v \in V$ sappiamo $\alpha v \in V$ → prodotto ESTERNO (con un $\mathbb{R}$ non con el. $\in V$)

$\cdot$ prodotto

$(V, +, \cdot)$ = SPAZIO VETTORIALE REALE se:

1/ $+$ è ASSOCIATIVA ; 2/ $+$ è COMMUTATIVA ; 3/ $\exists\, 0_V \in V \,/\, \forall\, v \in V$:
$v + 0_V = 0_V + v = V$, 4/ $\forall\, v \in V, \exists\, -v \,/\, v+(-v) = 0_V$

5/ $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$; 6/ $\alpha \cdot (v+w) = \alpha v + \alpha w$; 7/ $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$

8/ $1 \cdot v = v$

Es.

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\}$, somma: $(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$

PROD. EST.

$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$. Dim. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è uno SPAZIO VETT. $\mathbb{R}$.

[gli elementi di V = vettori, gli elem. $\in \mathbb{R}$ sono SCALARI - in generale]

Pr: 1/ $\{a+b+c = (a+b)+c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

8/10/2004

Def: V: sp. vett. reale ; $v_1, v_2 \dots v_n \in V$ [n elementi di V] si defin. COMBINAZIONE LINEARE dei vettori $v_1 \dots v_n$ a coefficienti $\alpha_1, \alpha_n \in \mathbb{R}$ il vettore $\boxed{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in V_n}$

Ex:

S.V.R. $= \mathbb{R}^2$. $v_1 = (-1, 3)$; $v_2 = (2, 0)$; $v_3 = (-4, 5) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha_1 = 3$

$\alpha_2 = \frac{1}{2}$; $\alpha_3 = 6 \longrightarrow 3(-1,3) + \frac{1}{2}(-2,0) + 6(-4,5)$ → COMB. LIN. dei 3 vett.

$= (-3, 9) + (1, 0) + (-24, 30) = \boxed{(-26, 39)} \in \mathbb{R}^2$

Es: $2\vec{i} + 3\vec{j}$

INDIPENDENZA LINEARE DI VETTORI

(vett. di uno sp.) sono LINEARMENTE INDIPENDENTI se l'unica loro combinazione lineare nulla è quella a coefficienti tutti $= 0$

19

Ex: $\vec{OV_1} + \vec{OV_2} = \vec{O}$. Considerando $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n = 0 \Rightarrow$ NECESSARIAMENTE $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n = 0$

Ex: $\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

Ex: $\mathbb{R}^2$; $V_1 = (-1, 3)$ $V_2 = (2, -1)$. Sono linearm. indipendenti? →

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = \overbrace{(0,0)}^{\mathbb{R}^2 \text{ nullo}}$, cioè α_1 e α_2 devono essere 0. $\alpha_1(1,-3) + \alpha_2(2,-1) =$
$(0,0) \to (\alpha_1 + 2\alpha_2, -3\alpha_1 - \alpha_2)$

$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$ e $-3\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ (a sistema)

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ 6\alpha_2 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$\Downarrow$ I VETTORI SONO LINEAR. INDIP.

$\mathbb{R}^2$ $V_1 = (1, -3)$ $V_2 = (-4, 12)$ #

$\alpha_1(1,-3) + \alpha_2(-4, 12) = (0,0) \to (\alpha_1 - 4\alpha_2, -3\alpha_1 + 12\alpha_2) = (0,0)$

$$\begin{cases} \alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \\ -3\alpha_1 + 12\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 4\alpha_2 \\ -12\cancel{\alpha_2} + 12\cancel{\alpha_2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \forall \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ 0 = 0 \end{cases}, \alpha_1 = 4\alpha_2$$

$\downarrow$

$(4\alpha_2, \alpha_2), \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Ex:

$-8(1,-3) - 2(-4, 12) = (0,0)$

DIPENDENZA LINEARE

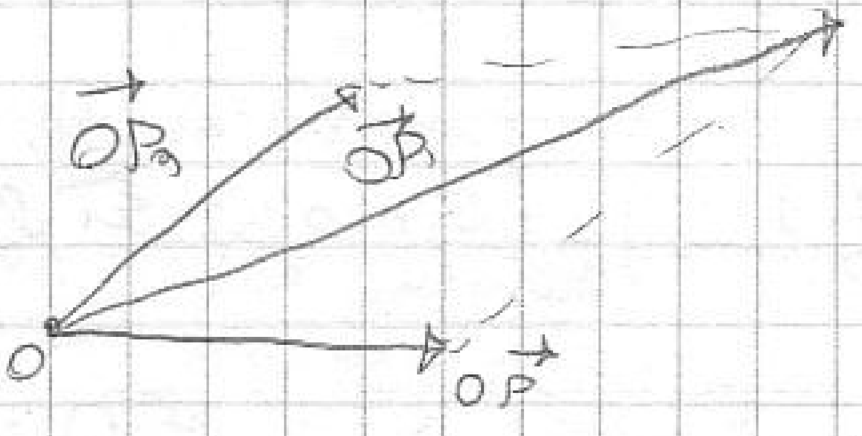
V sp. vett. reale. $V_1, \dots V_n \in V$ si dicono LINEARMENTE DIPENDENTI se $\exists$ una loro combinazione lineare nulla a coefficienti NON TUTTI NULLI.

Ex: $\alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n V_n = O_V$, qualche $\alpha_i \neq 0$

Ex: V_O vett. lin. appl. $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}$ di V_1, V_2 quando sono // cioè $\alpha\vec{OP_1} + \beta\vec{OP_2} = \vec{O}$, $\alpha \neq 0$ $\vec{OP_1} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{OP_2}$

V_0 nello spazio $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}$ $+ \alpha \vec{OP_1} + \beta \vec{OP_2} + \gamma \vec{OP_3} = \vec{0}$ con $\boxed{2}$

$\alpha \neq 0 \Rightarrow \vec{OP_1} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{OP_2} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{OP_3}$



$\vec{OP_1}$ è somma, quindi è diagonale di un parallelogramma.

Nello spazio 3 vett sono DIP. se sono COMPLANARI (stesso piano)

TH. n vettori $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ sono $\left[\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) / x_i \in \mathbb{R}\}\right.$

linearmente INDIPEND. $\Longleftrightarrow$ la

matrice che li ha come righe (o colonne) ha come det $\neq 0$ [linear. dip $\Longleftrightarrow$ det $= 0$].

Es:

$\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 0, -2)$; $v_2 = (3, -1, 2)$; $v_3 = (0, 1, 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1(-1-2) - 2(3) = -6 = -9 \neq 0 \quad v_1, v_2, v_3 \ \boxed{\text{lin. INDIP.}}$$

$v_1 = (1, 0, -2)$; $v_2 = (0, 1, 1)$; $v_3 = (1, 3, 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1(1-3) - 2(-1) = -2+2 = 0 \rightarrow \boxed{\text{LIN. DIP.}}$$

$v_1 = (1, 0, 3)$ e $v_2 = (0, -1, 3)$ in $\mathbb{R}^{\boxed{3}}$ $\rightarrow$ NON posso applicare il teorema ...

... MA

$v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Longleftrightarrow$ la mat. che li ha come righe (o colonne) ha rango k.

QUINDI

posso calcolare

e se rg 1 sono lin DIP (quando i vettori sono multipli)

19/10 Mezzi

Es.
$\mathbb{R}^3$ $V_1 = (0,0,0)$; $V_2 = (1,-3,2)$; $V_3 = (0,1,1)$ → lin. dipendenti. (det = 0)

$\mathbb{R}^4$: $V_1 = (0,0,0,0)$, $V_2 = (1,-2,3,1)$, $V_3 = (1,1,1,4)$

Con: $\underline{3}(0,0,0,0) + 0(1,-2,3,1) + 0(1,1,1,4) = (0,0,0,0) \Rightarrow$ lin. dip.

$\Downarrow$

Oss: un insieme contenente un $V_0 = \vec{0}$ è sempre linearmente DIPENDENTE

V: sp. vett. $\mathbb{R}$; $V = \alpha V_1 + \ldots + \alpha_n V_n$, $V, V_1, \ldots V_n$

(1) $V - \alpha_1 V_1 - \ldots \alpha_n V_n = 0V$ → lin. dip.

$\Downarrow$

Oss: se un vettore è combinazione lineare di $(V, V_1 \ldots V_n)$, questi sono tra loro lin. DIP.
$V_1, \ldots V_n \in V$ sono lin. dip $\iff$ 1 di essi si esprime come comb. lineare degli altri;

Es: $\mathbb{R}^4$
$V_1 = (0,1,K,2)$ $V_2 = (1,-1,3,0)$; $V_3 = (0,2,2,0)$ Per quali valori di K sono linearmente indipendenti.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

rg A deve essere = 3. $A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $|A'| = 1$ $2 \leq rg A \leq 3$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$|B| = 2 - 2k$ $2k - 2 = 0$ per $k = 1$, $|B'| = -1 (2 - 4) = \boxed{2}$ → $\forall k \in \mathbb{R}$ i vett. sono lin. ind.

Def: V: sp. vett. Rel ; $B = \{V_1; \ldots V_n\}$ sottoinsieme di V si definisce base di V se verifica:

1) i vettori di B sono lin. INDIP.
2) Ogni vettore di V è COMBINAZIONE LINEARE dei vettori di B
$\forall v \in V$ $v = \alpha_1 V_1 + \ldots \alpha_n V_n$ → (B genera V)

(→)

Es:

$V_0 \quad B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ base di V_0, $M_2(\mathbb{R})$ - $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è base di $M_2(\mathbb{R})$. ; $\mathbb{R}^2 \quad B = \{(1,0), (0,1)\}$ è base di $\mathbb{R}^2$ ovvero BASE $\boxed{\text{CANONICA}}$

$\downarrow$

i coefficienti della combin. lineare sono x e y.

per verificare che siano base:

1) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \rightarrow$ LIN. INDIP.

2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$

] verificato

Es:

$\mathbb{R}^2 ; \; B' = \{(1,-1), (2,0)\}$. B' è base?

1) $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow$ sono LIN. IND.

2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 . \; (x,y) = \alpha(1,-1) + \beta(2,0) = (\alpha + 2\beta, -\alpha)$

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = -\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -y \\ 2\beta = +x+y \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \boxed{-y} \\ \beta = \boxed{\dfrac{x+y}{2}} \end{cases}$$ sostituisco:

$(x,y) = -y(1,-1) + \dfrac{x+y}{2}(2,0) \Rightarrow$ la base non è unica in uno sp. v. $\mathbb{R}$

$\exists$ almeno 1

Prop: Tutte le basi di ~~uno stesso~~ V hanno lo stesso numero di vettori.

$\downarrow$

Def: DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE $= \dim V = n$ vettori in una BASE

1] $B = \{V_1, \dots, V_n\}$ base di V ; $w \in V$, $w, V_1, \dots, V_n \rightarrow W$ è C.L. di $V_1 \dots V_n$

$\Rightarrow$ sono lin. dip.

2] $\dim V = n \rightarrow B = \{V_1, \dots V_n\}$ base di V ; Com. $W_1, W_2 \dots W_m \in V$; $m > n$

non lin. dip.

$\downarrow$

3] $\dim V$ è il MAX n di vettori lin. indipendenti

4] $B = \{V_1, \dots V_n\}$ base di V ; $W = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n V_n = \beta_1 V_1 + \dots + \beta_n V_n$

$(\alpha_1 - \beta_1) V_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) = 0_V \rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \; ; \; \alpha_n = \beta_n$

Es: $\mathbb{R}^3 \quad v_1 = (1, -2, 0) ; \; v_2 = (2, 3, -1) ; \; v_3 = (4, -1, -1) ; \; v_4 = (1, -1, 1)$

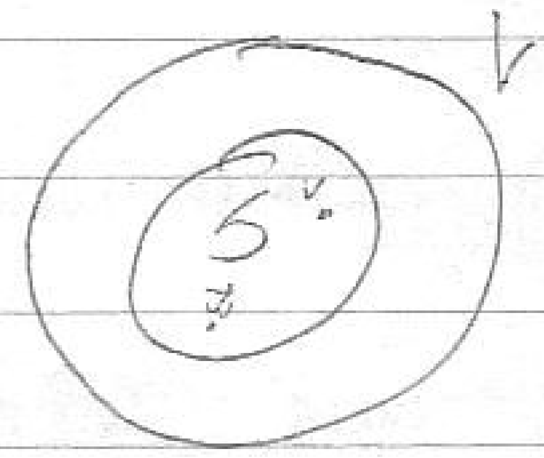
$W = (-1, 5, 3) \quad (\rightarrow)$

1) Trovare, se possibile, due rappresentazioni del vettore $\vec{w}$ come comb. lin. dei vettori: v_1, v_2, v_3, v_4

2) ~~Trovare~~ rappresentare se è possibile $\vec{w}$ come comb. lineare dei vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$

H

Def: V sp. vett. reale; S = sottoinsieme di V



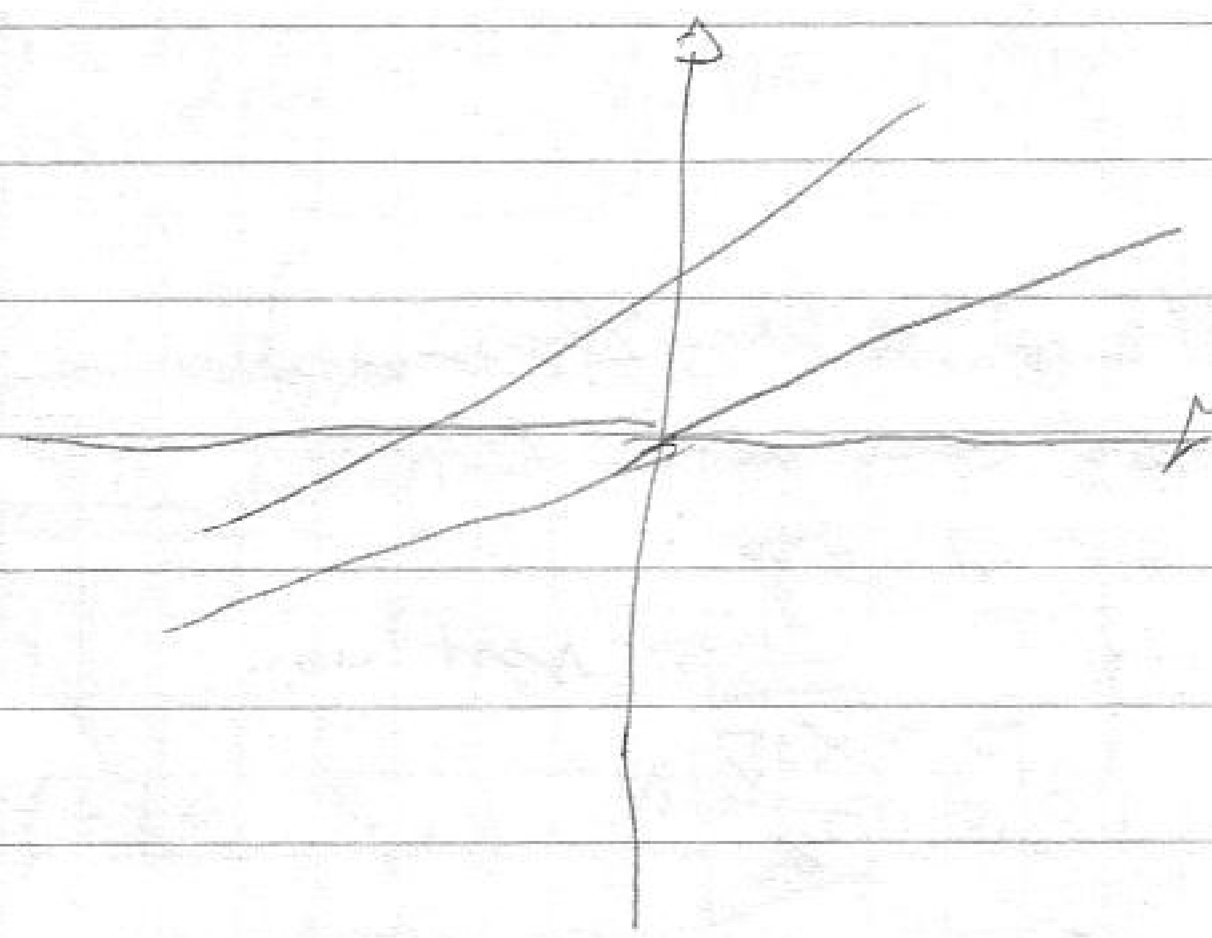
S è SOTTOSPAZIO VETTORIALE di V quando esso stesso è uno spazio vettoriale $(S, +, \cdot)$

$\Downarrow$ condizioni

1) $\vec{v} + \vec{w} \in S$; 2) $\alpha v \in S$; 3) $S \neq \emptyset$

Es: $\mathbb{R}^2$; $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - 2y = 0\}$

$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - 3y + 1 = 0\}$



S: 3) $\neq 0$ poiché $(0,0) \in S$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; $(x,y) \in S \rightarrow \alpha(x,y) \in S$

$\Downarrow$

$(\alpha x, \alpha y) \in S$ se verifica la retta

$\alpha x - 2\alpha y = \alpha(x - 2y) = \alpha \cdot 0 = 0$

$\Longleftarrow$

$(\alpha x, \alpha y) \in S$

1) $(x,y), (x',y') \in S \Rightarrow (x,y) + (x',y') \in S$? $\rightarrow (x + x', y + y') \in S$ se verifica la retta

$(x + x') - 2(y + y') = \overbrace{x - 2y}^{0} + \overbrace{x' - 2y'}^{0} = 0 \Rightarrow (x,y) + (x',y') \in S$

S è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Dim.

1) $T \neq \emptyset$; 2) $(x,y) \in T$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha(x,y) \in T$; 3) $(x,y), (x',y') \in T$, $(x,y) + (x',y') \in T$.

① $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$; $T \neq \emptyset$ poiché $(0, \frac{1}{3}) \in T$ → contiene almeno un

② $(\alpha x, \alpha y) \in T$? $\alpha x - 3\alpha y + 1 = 0$; $\alpha(\overbrace{x - 3y}) + 1 = 0$ $-\alpha + 1 = 0$ $\alpha = 1$

Se $\alpha \neq 1$ non vale il risultato e non è verificato $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ $\Rightarrow$ T NON È UN SOTTOSPAZIO

Base di S:

$(\rightarrow)$

dim S = 2) no, non può coincidere con $\mathbb{R}^2$ [solo in $\vec{O}_V$ dim = 0]

$S = \{(2y, y) \,/\, y \in \mathbb{R}\}$ $B = \{(2,1)\}$ base di S — è insuff.: ogni $v \in S$ è c.l. di B:

$(2y, y) = y(2,1)$

Es: $\mathbb{R}^3$; $S = \{(x,y,z) \,/\, x-3y+2z=0\}$ $T = \{(x,y,z) \,/\, x-3y=0,\ y+2z=0\}$. S e T: 1) Verificare che S e T sono sottospazi; 2) det. una base per S e una per T

3) det. S intersezione T

01/10 mod.

SISTEMI LINEARI (aspetto geometrico):

Es: 1)

$$\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$$

Es: 2)

$$\begin{cases} x-2y=2 \\ \frac{1}{2}x-y=1 \end{cases}$$

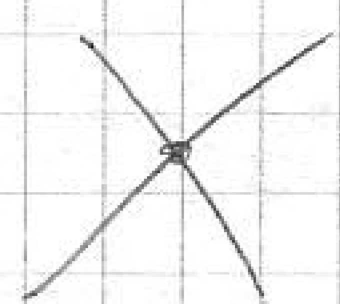
Es 3)

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-2y=1 \end{cases}$$

1)

$$\begin{cases} x=2+3y \\ 4+6y+y=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{7} \\ y=-\frac{5}{7} \end{cases}$$

Due rette che si intersecano in un punto



2)

$$\begin{cases} x=2+2y \\ 1+y-y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2+2y \\ \forall y \end{cases}$$

Intersezione delle 2 rette e' di ∞ punti: 2 rette coincidono

3)

$$\begin{cases} x=3+y \\ 6+\cancel{2y}-\cancel{2y}=1 \end{cases}$$

$S = \emptyset$ (impossibile)

(due rette non si intersecano, sono //)

(aspetto delle matrici)

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $rg\, A_1 = 2 = rg\, A' = 2$ [1 sol]

2) $rg\, A_2 = 1 = rg\, A'_2 = 1$ [∞ sol] $- \infty^1$

Il rango interviene nella risoluzione del sistema

3) $rg\, A_3 = 1 \neq rg\, A'_3 = 2$ [$\nexists$ sol]

SISTEMI LINEARI

Sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x^n = b_m \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ si chiama

MATRICE dei COEFFICIENTI del SISTEMA o MATRICE INCOMPLETA ;

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ e' la MATRICE dei COEFFICIENTI e TERMINI NOTI o MATRICE COMPLETA ,

Pren:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{A \cdot X = B}$$

Def: SISTEMA OMOGENEO : $A \cdot X = 0$ [i termini noti sono nulli]

SISTEMA QUADRATO : $m = n$ [n. equazioni = n. incognite]

SISTEMA COMPATIBILE: se $\exists$ soluzioni ($A \cdot X = B$ se $\exists$ sol.)

SISTEMA INCOMPATIBILE: se $\nexists$ soluzioni

Oss: $A \cdot X = 0$ COMPATIBILE perché ha almeno la sol nulla

Autosoluzione: sol. $\neq 0$

25-10-2006 | Def:

SISTEMI EQUIVALENTI: sistemi che ammettono le stesse soluzioni (comodo per passare ad uno più semplice, trovarle.)

OPERAZIONI ELEMENTARI: (che fanno passare da un sistema ad uno equivalente)

1/ SCAMBIARE l'ordine delle equazioni

2/ MOLTIPLICARE un'equazione per un numero $\mathbb{R}$ non nullo

3/ SOSTITUIRE un'equazione con la somma dell'equazione stessa e di un'altra moltiplicata per un numero $\mathbb{R} \neq 0$

Ex:

$$\begin{cases} x+y+z=-3 \\ 3x+y-2z=4 \\ x-2y+3z=1 \end{cases}$$

Conviene avere come prima eq. coefficiente 1

$$\begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix}\begin{cases} x+y+z=-3 \\ x-2y+3z=1 \\ 3x+y-2z=4 \end{cases}$$

Eliminare l'incognita x dalla E_2 e dalla E_3

$$\begin{matrix} E_1' \\ E_2' \\ E_3' \end{matrix}\begin{cases} x+y+z=-3 \\ 0-3y+2z=4 \\ -2y-5z=13 \end{cases}$$

→ Ora scelgo togliere la y

$E_2 = E_2 + (-E_1) = \overbrace{x-2y+3z}^{E_2} + \overbrace{-x-y-z=3}^{-E_1} = -3y+2z=4$, $E_3 = 3x+y-2z=4$; $+ -3 \cdot E_1 =$

$-3x-3y-3z=9$ → la somma è $0-2y-5z=13$

↓

$$\begin{cases} x+y+z=-3 \\ -3y+2z=4 \\ -\frac{19}{3}z=\frac{31}{3} \end{cases}$$

$E_3' = -2y-5z=13$ $(\frac{2}{3})E_2' = 2y - \frac{4}{3}z = -\frac{8}{3}$; si fa la somma e si ha $-5z-\frac{4}{3}z = 13-\frac{8}{3} = -\frac{19}{3}z = \frac{31}{3}$

E si ha il sistema equivalente

$$\begin{cases} \dots \\ \dots \\ z=-\frac{31}{19} \end{cases}$$

(METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS)

↓

matrice incompleta del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

matrice dei coefficienti del sist. equivalente:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{3} \end{pmatrix}$$

(visto, ad una matrice trian. sup.)

Si possono effettuare le stesse operazioni sia nel sistema che nella matrice.

Se la matrice di partenza è rettangolare si arriva ad una matrice RIDOTTA A GRADINI (da una riga all'altra aumenta il n. degli 0)

Questo metodo però a volte non serve o è complesso. [oppure questo ci serve sapere se ∃ le soluzioni]:

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI:

$Ax = B$ (m equazioni in n incognite)

soluzioni sono n-uple di $\mathbb{R}$

Es.:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 3x-y+2z=4 \\ 5x+y-z=2 \end{cases} \to \begin{cases} x=a \\ y=b \\ z=c \end{cases} (a,b,c)$$

LA SOL. DEL SIST. È TERNA

è COMPATIBILE $\Leftrightarrow$ il rg. della matrice completa $(A) = Rg\, A' = K$ (A' = matrice inc.)

1) se $K = n \to \exists!$ soluzione

2) se $K < n \to \infty$ soluzioni dipendenti da $(n-k)$ parametri $\to \infty^{n-k}$ soluzioni

Ex:

$$\begin{cases} (4-k)x - 4z = k \\ (1-k)y + z = 1 \\ 4x + (1-k)z = 1-k \end{cases}$$

(k è parametro variabile in $\mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} 4-k & 0 & -4 \\ 0 & 1-k & 1 \\ 4 & 0 & 1-k \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 4-k & 0 & -4 & k \\ 0 & 1-k & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1-k & 1-k \end{pmatrix}$$

$|A| = 1-k\left((4-k)(1-k)+16\right) = 1-k\left((4-4k+k^2-k)+16\right) = (1-k)(k^2-5k+20) =$

$(1-k)(k^2-5k+20) = 0 \qquad k = \frac{5 \pm \sqrt{25-80}}{2} \Rightarrow |A| = 0$ solo per $k = 1$

$rg\, A = 3$ per $k \neq 1 = rg\, A' \to$ SISTEMA COMPATIBILE $\Rightarrow \exists!$ soluzione

$(\to)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per $k=1$ $\quad rg\, A = 2$

$rg\, A' = 3$

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4(-4-1) = -20$$

Prop.

$AX = B$ (compatibile in n incognite) ; $AX = 0$ (sistema omogeneo associato)

$S_0 = \{$ soluzioni $AX = 0 \}$; $S = \{$ sol. $AX = B \}$

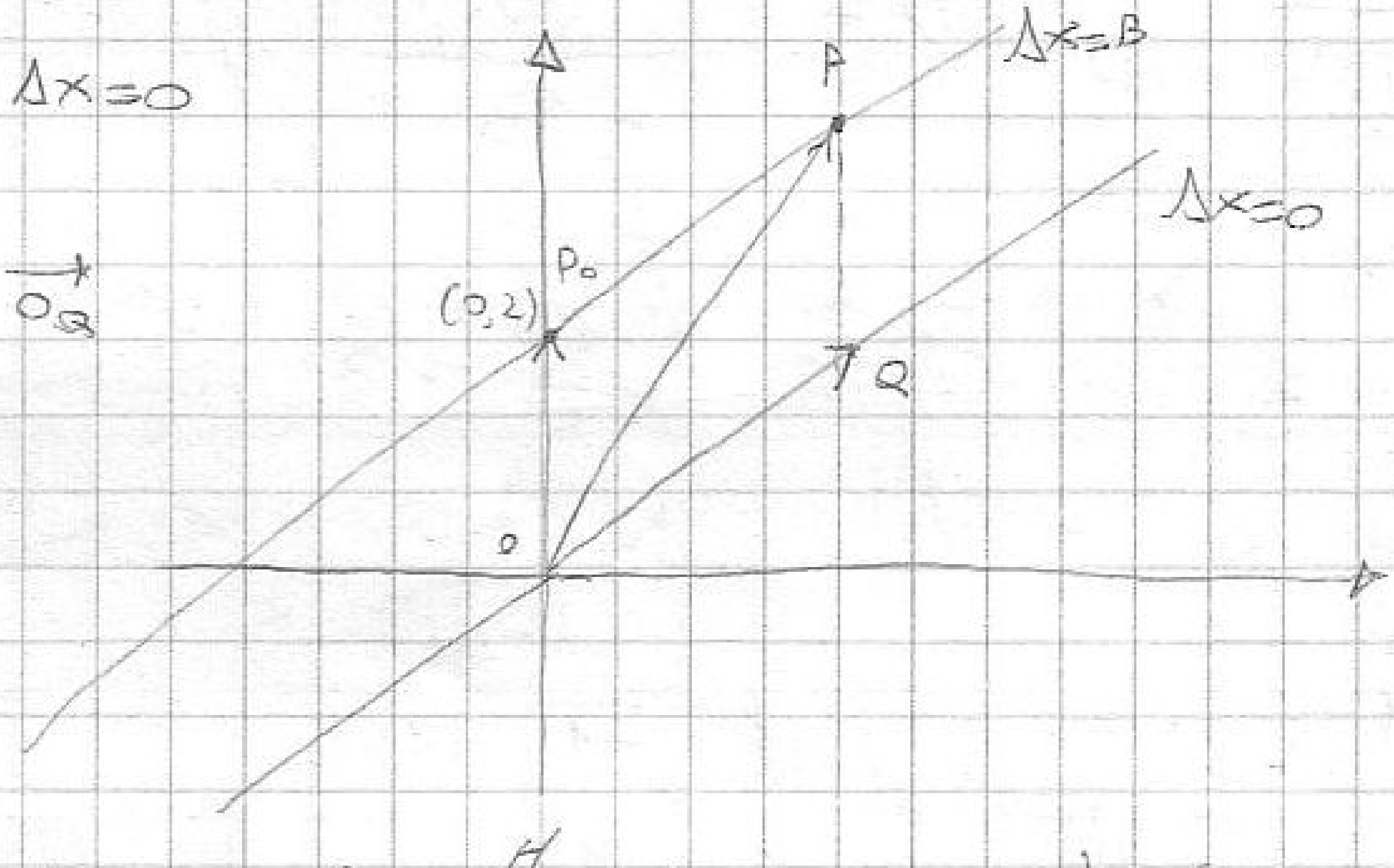
$\Downarrow$

1) S_0 sottospazio di $\mathbb{R}^n$; 2) S non sottospazio di $\mathbb{R}^n$

3) $S = \{ \bar{x}_0 + \bar{y}$ dove $\bar{x}$ è soluzione di $ax = b$, $\bar{y}$ varia in $S_0 \}$

Ex: $x - 2y + 4 = 0 \quad \to AX = B \qquad \bar{x}$ (sol $AX = B$) $= (0, 2)$

$x - 2y = 0 \quad \to AX = 0$



Prendiamo P ; $\vec{OA} = \vec{OP} + \vec{OQ}$

Sol. del sistema = sol particolare + sol. sist. associato

Dim 1) In termini di rette solo la retta che contiene l'origine è un sottospazio

- $S_0 \neq \emptyset$ poiché $(0,0) \in S_0 \to A \cdot 0 = 0$
- $\bar{w}, \bar{v} \in S_0 \Rightarrow A\bar{w} = \bar{0}, A\bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{A}(\bar{w} + \bar{v}) = A\bar{w} + A\bar{v} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \bar{w} + \bar{v} \in S_0$
- $\alpha \in \mathbb{R}, \bar{w} \in S_0 \Rightarrow \alpha \bar{w} \in S_0 \to A \cdot (\alpha \bar{w}) = \overbrace{A\bar{w}}^{=0} \alpha = 0$

$\Downarrow$

S_0 è sottospazio

Dim 2) $0 \notin S$ poiché $A \cdot 0 = 0 \neq B$ $[AX = B]$

$(\longrightarrow)$

27/10/2004

RISOLUZIONE DI SISTEMI QUADRATI - TEOREMA DI CRAMER:

- $AX = B$ quadrato; n equazioni in n incognite
- $\det A \neq 0$ [$rg\, A = n$] → sistema compatibile

Allora: l'unica soluzione del sistema è:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$$ → A_i è la matrice che si ottiene da A sostituendo la i-esima colonna con la colonna dei termini noti

$\vdots$

$$x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

Ex:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 5x - 3y = 1 \\ // \quad // \end{cases}$$

$$A' = \begin{array}{ccc} x & y & t.n. \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad |A| = -13 \to$$ Applico Cramer!

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}{-13}; \qquad y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}{-13};$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$x = \frac{-24-2}{13} = 2 \qquad y = \frac{1-40}{-13} = 3 \qquad S = (2, 3)$$

Es:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 0 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1(1-1) + 1(1+3) + 1(-1-3)$$

$= 4 - 4 = 0$ Non si applica Cramer $\to rg\, A = 2$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad rg\, A' \quad \left(\text{Prendo } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0\right) \to \text{ora orlo}$$

$|A_1'|$ (già visto) $= 0$ $$|A_{11}'| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1(-2+1) + 1(2-3) = 0$$

$$rg\, A' = 2$$

Il sistema è COMPATIBILE ($rg A = rg A'$) $\Rightarrow \infty$ sol. dip. da 1 par. [∞^1]

Posso togliere un'equazione [le rest. lin. ind., voglio avere 2 vett. lin. IND.]

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 1 - z \\ x + y = z \end{cases} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(da rettangolare a quadrata) (colonne incognite)

[ora è minore orlato $\neq 0$] $\Rightarrow |\bar{A}| \neq 0 \rightarrow 2$

$$x = \frac{|A_x|}{|\bar{A}|} = \frac{1}{2} \qquad |A_x| = \begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ z & 1 \end{vmatrix} = 1 - z + z = 1$$

$$y = \frac{2z-1}{2} \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & z \end{vmatrix} = z - 1 + z = 2z - 1$$

$$S = \left(\frac{1}{2}, \frac{2z-1}{2}, z\right) \quad z \in \mathbb{R}$$

Es:

Devo studiare compatibilità (poi anche la completa)

$$\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ ky + y - z = 0 \\ kx + z = -1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & k+1 & -1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -1(k+1) - 2(+k) = -k - 1 - 2k = -3k - 1 \neq 0 \quad k \neq -\frac{1}{3}$$

$|A| \neq 0$ per $k \neq -\frac{1}{3}$ $+ rg A = 3 = rg A' \rightarrow \exists$ 1 sol

[finirci di sembrare è uniform]

$$x = \frac{|A_x|}{\cancel{-3k-1}\ -(3k+1)} = \cancel{\frac{3k-1}{}}\ \frac{-3k-1}{-3k-1} = 1 \qquad |A_x| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & k+1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-3(k+1) - 2(-1) = -3k - 3 + 2 = -3k - 1$$

$$y = \frac{+3k+1}{-3k-1} = -1 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1(-1 + 3k) = -3k + 1$$

$$S = (1, -1, k-1)$$

$$z = \frac{3k^2 + 4k + 1}{-3k - 1} = -k - 1 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & k+1 & 0 \\ k & 0 & -1 \end{vmatrix} = (k+1)(1 + 3k) =$$

$$k + 1 + 3k^2 + 3k$$
$$3k^2 + 4k + 1$$

$k = -\frac{1}{3}$ Togliamo 1 equazione (quella non interessata dal minore orlato)

$$\cancel{A/\neq \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ & k+1 \end{pmatrix}} \qquad \cancel{\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ ky + y = z \end{cases}} \qquad \begin{cases} 2y = -3 + x \\ ky + y - z = 0 \\ kx = -1 - z \end{cases}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3+x \\ k+1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ k+1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\cancel{y} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3+x \\ k+1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{-3+x}{2}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3+x \\ \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{\cancel{-}(-2+\frac{2}{3}x)}{\cancel{-}2}$$

$$S = \left(x, \frac{-3+x}{2}, \frac{-2+\frac{2}{3}x}{2} \right)$$

#

Es 3: $\mathbb{R}^3$. Data la base (da verificare) $B = \{(1,0,-2), (1,0,0), (-1,-1,2)\}$ e
$B' = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad |A| = -1(2) = -2 \Rightarrow \text{È BASE}$$

Dato un vettore $v = (3,-4,5) = 3(1,0,0) - 4(0,1,0) + 5(0,0,1)$ [canonica]
$(3,-4,5) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,1,1)$ [α, β, γ non li so]
$= (\alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\gamma)$

$$\to \begin{cases} \alpha+\beta = 3 \\ \beta+\gamma = -4 \\ \alpha+\gamma = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 3-\beta \\ \beta+\gamma = -4 \quad \to \gamma = -4-\beta \\ 3-\beta+\gamma = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 3-\beta \\ \gamma = -4-\beta \\ 3-\beta-4-\beta = 5 \end{cases} \quad \text{etc.} \ldots \quad \begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = -3 \\ \gamma = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sostituiamo}} (3,-4,5) = 6(1,0,1) - 3(1,1,0) - 1(0,1,1)$$

Qual è il legame tra i componenti rispetto a B (canonica) e a B' : $3, -4, 5$
$\downarrow$ $\qquad 6, -3, -1$
Abbiamo cambiato la base

28/10/2004

CAMBIAMENTI DI ~~BASE~~

V sp. vett. $\mathbb{R}$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base di V ; $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ base di V

Preso $v \in V$, denotiamo x_1, x_2, x_3 le coordinate (coeff. comb. lin.) del vettore nella base B e con x_1', x_2', x_3' le coordinate di v nella base B'

$\downarrow$

(32) $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$ ma v è anche $= a\ x_1' w_1 + x_2' w_2 + x_3' w_3$

$$w_1 = a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + a_{13} v_3$$
$$w_2 = a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + a_{23} v_3$$
$$w_3 = a_{31} v_1 + a_{32} v_2 + a_{33} v_3$$

$$\boxed{1}\; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(sono vettori lin. ind. $\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$)

Se moltiplichiamo $A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ [sarebbe un errore!] $\neq \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ $\left[A^{-1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right]$

$\downarrow$

$v = x_1' w_1 + x_2' w_2 + x_3' w_3$. Al posto di (w_1, w_2, w_3) posso mettere i rispettivi valori $[\ldots] =$

$$x_1'(a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + a_{13} v_3) + x_2'(a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + a_{23} v_3) + x_3'(a_{31} v_1 + a_{32} v_2 + a_{33} v_3)$$

mettiamo in evidenza v_1 e poi i prodotti $\Rightarrow$

$$\underbrace{(x_1' a_{11} + x_2' a_{21} + x_3' a_{31})}_{\text{coeff. di } v_1} v_1 + (x_1' a_{12} + x_2' a_{22} + x_3' a_{32}) v_2 +$$
$$(x_1' a_{13} + x_2' a_{23} + x_3' a_{33}) v_3$$

Il vettore si esprime in 1 solo modo in 1 BASE $\Rightarrow$ si avrà la stessa rappresentazione delle coordinate: (i coeff. devono coincidere)

$x_1 = a_{11} x_1' + a_{21} x_2' + a_{31} x_3'$; $x_2 = a_{12} x_1' + a_{22} x_2' + a_{32} x_3'$

$x_3 = a_{13} x_3' + a_{23} x_2' + a_{33} x_3'$;

(v nella Base B era $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$) $\rightarrow$ sono le nuove coordinate

$\downarrow$

Prendiamo la matrice dei coefficienti: $\rightarrow$ è la A^T di A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^T \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ legge del cambiamento delle coordinate

e per ottenere b basta moltiplicare $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ per $(A^T)^{-1}$

Oss: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Def: A^T (che ha come colonne le componenti coordinate dei vettori di B' rispetto alla base B) si dice MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE

Ex: $\mathbb{R}^2$ $\quad B = \{\underbrace{(1,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,1)}_{v_2}\}$; $B' = \{\underbrace{(0,-1)}_{w_1}, \underbrace{(-2,1)}_{w_2}\}$

Vogliamo esprimere che $B \to B'$ $\quad v = x_1 v_1 + x_2 v_2$

e $v = x_1' w_1 + x_2' w_2$

$\Downarrow$

$w_1 = a_{11} v_1 + a_{12} v_2$; $w_2 = a_{21} v_1 + a_{22} v_2$

$\Downarrow$

$w_1 = (0,-1) = 0 \underbrace{(1,0)}_{v_1} + (-1)\underbrace{(0,1)}_{v_2}$

$w_2 = (-2,1) = (-2)\underbrace{(1,0)}_{v_1} + (1)\underbrace{(0,1)}_{v_2}$

$\Downarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 = -2x_2' \\ x_2 = -x_1' + x_2' \end{cases}$$

coordinate nella vecchia base rispetto alla nuova

$$(A')^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & +1 \\ +2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

v, in B', si esprime: $3w_1 - 5w_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{con } B'} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}}_{x_1' \text{ e } x_2'} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} ; \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -8 \end{cases}$$

$v = 10 v_1 - 8 v_2 = (10, -8)$

02/11 nord

DIAGONALIZZAZIONE DI UNA MATRICE: la matrice A quadrata di ordine n si dice DIAGONALIZZABILE se è possibile trovare una matrice $C \in M_n(\mathbb{R})$ INVERTIBILE / $\underbrace{C^{-1} \cdot A \cdot C}_{\text{[non è commutativa]}} = D$ diagonale $\Rightarrow$ A e D sono SIMILI. C è la MATRICE DIAGONALIZZANTE e D si chiama FORMA DIAGONALE DI A.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} . \quad |C| = -2-3 = -5 \neq \text{ è INVERT.}$$

$$C^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot (A^*) \left[C^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & +2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$C^{-1} A \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}}^{C^{-1}} \overbrace{\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}}^{A \cdot C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D$$

Def. A e B sono simili se $\exists\, C$ invertibile / $A = C^{-1} B C$

Oss. 1: $|A| = |C^{-1} \cdot B \cdot C|$ → TEOREMA DI BINET (det. di un prodotto = prod. dei determinanti) $\Rightarrow |C^{-1}|\,|B|\,|C| = |A| \Rightarrow |B|\,\underbrace{|C^{-1}|\,|C|}_{1} = |B|$.

le matrici simili hanno lo stesso determinante

Oss. 2: Ex. A diagonalizzabile $\Rightarrow C^{-1} \cdot A \cdot C = D$ [matrice diagonale] $\Rightarrow$

$A = C \cdot D \cdot C^{-1} \Rightarrow A^2 = (CDC^{-1})(CDC^{-1}) = CD^2C^{-1} \Rightarrow$ per calcolare il quadrato di A basta quello di D [elevare al quadrato gli elementi della diag.]

Applicando lo stesso procedimento, $A^k = CD^kC^{-1}$

Oss. 3:
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to D^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

AUTOVALORE DI UNA MATRICE

Def: $A \in M_n(\mathbb{R})$; presa $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice AUTOVALORE di A se $\exists\, (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \neq (0, \dots, 0)$ / $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ si dice AUTOVETTORE di A RELATIVO a λ

Ex: $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; $\lambda = 3$, $v = (1,1) = (x_1, x_2)$ autovettore di A rel. a λ

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ? \to \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$ VERO!

C avrà come colonne AUTOVETTORI di A. Ci servono gli AUTOVALORI:

TH: Presa $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ è un AUTOVALORE di A $\Leftrightarrow$ $|A - \lambda I| = 0$

Dim. di TH: λ è un AUTOVALORE di $A \Leftrightarrow$ (per def.) $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (A - \lambda I)\overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}^{X} = 0 \to (A - \lambda I)X = 0$ [SISTEMA LINEARE OMOGENEO!]

Vogliamo che il sistema abbia AUTOSOLUZIONI ($\neq 0$) $\Leftrightarrow$ $|A - \lambda I| = 0$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ Vogliamo AUTOVALORI 1) e AUTOVETTORI di A 2)

Sottraggo λ alla diag. principale di A

1) $|A - \lambda I| = \det \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -3 & -\lambda \end{pmatrix} =$ λ è autoval. se $|\ |$ è nullo

$= 1-\lambda \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} = 1-\lambda \left[-\lambda(2-\lambda) - 3 \right] = (1-\lambda)\left[2\lambda - \lambda^2 - 3\right]$ [p. di 3 grado ovvio perché $n = 3$]

$\exists \lambda$: $\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow (1-\lambda)(2\lambda + \lambda^2 - 3) = 0$

AUTOVALORI DI A [1]

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \rightarrow$ $\boxed{\lambda_1 = 1 \ ; \ \lambda_2 = 3 \ ; \ \lambda_3 = -1}$

2) • AUTOVETTORI rel. a $\lambda_1 = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2y-z \\ -3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$

AUTOVETTORI REL. A $\lambda_1 = 1$

$\begin{cases} x+y+z = x \\ 2y - z = y \\ -3y = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -z \\ -2z - z = y \\ -3y = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -z \\ \cancel{3}z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\boxed{S = (x, 0, 0) \ x \in \mathbb{R} \text{ con } x \neq 0}$ [∞ aut.]

Ex $= (1, 0, 0)$

$\underline{V_1} = (1, 0, 0)$ è $\boxed{\text{un}}$ AUTOVETTORE rel. a $\lambda_1 = 1$

• AUTOVETT. rel. a $\lambda_2 = 3$

$\begin{pmatrix} x+y+z \\ 2y-z \\ -3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+y+z = 3x \\ 2y - z = 3y \\ -3y = 3z \end{cases}$ $\begin{cases} -2x - z + z = 0 \\ -y - z = 0 \\ y = -z \end{cases}$

AUTOVETT. REL. A. $\lambda_2 = 3$

$\begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ \forall y \in \mathbb{R} \\ y = -z \end{cases}$ $\boxed{S = (0, y, -y) \ \ y \in \mathbb{R} \text{ con } y \neq 0}$

Ex: $V_2 = (0, 1, -1)$ è un AUTOVETT. rel. a $\lambda_2 = 3$

($\rightarrow$)

AUTOVETT. rel. a $\lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+y+z = \cancel{x} \\ 2y - z = -y \\ -3y = -z \end{cases} \rightarrow \cancel{\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3y = z \rightarrow z=3y \\ y = \frac{z}{3} \end{cases}}$$

$$\begin{cases} 4y = -2x \\ 2y - 3y = \\ z = 3y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ \forall y \in \mathbb{R} \\ z = 3y \end{cases} \rightarrow \boxed{S = (-2y, y, 3y) \ \forall y \in \mathbb{R}}$$

AUTOVETT. rel. a $\lambda_3 = -1$

Ex: $\underline{v_3} = (-2, 1, 3)$

È DIAGONALIZZABILE?

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}; \quad |C| = 1(3+1) = 4 \Rightarrow \exists\, C^{-1}$$

v_1, v_2, v_3 lin. ind. in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow B = \{v_1, v_2, v_3\}$ BASE DI $\mathbb{R}^3$ costituita da AUTOVETTORI di A

$\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$, 3 AUTOVALORI!!!

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = \boxed{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{DIAGONALIZZABILE}$$

[verifica a casa]

Def. $|A - \lambda \underline{I}|$ $[A \in M_n(\mathbb{R})]$ è un polinomio di grado n che prende il nome di POLINOMIO CARATTERISTICO di A.

Def. $|A - \lambda \underline{I}| = 0$ si dice EQUAZIONE CARATTERISTICA

(gli autovalori di A sono le radici dell'eq. caratteristica)

Def.: $[A \in M_n(\mathbb{R})]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di A. Si definisce AUTOSPAZIO relativo a λ il sottoinsieme: $V_\lambda = \left\{ (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$ (comprende tutti gli autovettori + il vettore nullo)

03/11/2011

autospazio relativo a λ

Def: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ è AUTOVALORE DI A, $V_\lambda = \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n /$ $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\}$. V_λ è un SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^n$

Dim: 1) $V_\lambda \neq \emptyset$ poiché la n-upla nulla $\in$ a V_λ [poiché $A \cdot 0 = \lambda 0$];

2) $\forall (x_1 \dots x_n), (y_1, \dots, y_n) \in V_\lambda$: $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \in V_\lambda$.

Sappiamo che $AX = \lambda X$ e $AY = \lambda Y \Rightarrow A(x+y) = Ax + Ay = \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y)$;

3) $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x_1 \dots x_n) \in V_\lambda \to \alpha(x_1 \dots x_n) \in V_\lambda$; $Ax = \lambda x$

$\Rightarrow A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha \lambda X = \lambda(Ax)$

[Prop (1): $A \in M_n(\mathbb{R})$ è DIAGONALIZZABILE $\Longleftrightarrow \exists$ base di $\mathbb{R}^n$ costituita da AUTOVETTORI di A [Condizione necessaria e sufficiente]]

[Prop (2): IP: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, consideriamo $\lambda_1, \dots \lambda_t \in \mathbb{R}$ AUTOVALORI DISTINTI DI A, e abbiamo $V_1, \dots V_t \in \mathbb{R}^n$ AUTOVETTORI RELATIVI A $\lambda_1 \dots \lambda_t$.

TH: $\to$ Allora $V_1 \dots V_t$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI]

Se abbiamo $A \in M_{\boxed{n}}(\mathbb{R})$, $\lambda_1 \dots \lambda_{\boxed{n}}$ (aut. distinti) [IP] $\boxed{\Rightarrow}$ $\to$ non è $\Longleftrightarrow$!!!

A è DIAGONALIZZABILE [TH] (questo perché se prendo $V_1 \dots V_n$ aut. rel. a $\lambda_1 \dots \lambda_n$

$\Rightarrow$ sono LIN. INDIP. (2), ciò $\Rightarrow$ che prendo $B = \{V_1, \dots V_n\}$ ovvero BASE di $\mathbb{R}^n$ costituita da AUTOVETTORI DI A. $\Rightarrow A$ è DIAGONALIZZABILE (3))

Es: $\mathbb{R}^3$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ È diagonalizzabile!

AUTOVALORI: $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) - 1(-\lambda - 1) + 1(1 + \lambda) =$

$\cancel{-\lambda(\lambda^2-1)} \cancel{+\lambda} \cancel{+1} + 1 + \cancel{\lambda} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)$

$\cancel{-\lambda(\lambda^2-1)} \cancel{+2} \cancel{+2\lambda} = \cancel{-\lambda^3} \cancel{-\lambda} \cancel{+2} \cancel{+2\lambda} = \cancel{-\lambda^3} \cancel{+\lambda} \cancel{+2}$ $+ (\lambda+1) + (\lambda+1) =$

$(\lambda+1)(-\lambda^2 + \lambda + 2)$ $\to$ $\cancel{-\lambda^2}$ $\lambda - \lambda - 2 = 0 \to \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

AUTOVALORI DI A: $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 2$; [due sono uguali]

(38) Def: Quando 2 radici coincidono, la MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA dell'AUTOVALORE

$\lambda = -1$ è $\boxed{2}$, perché ci sono 2 radici coincidenti con -1 $\boxed{m_a(-1)=2}$

Es: polinomio caratteristico $\to (\lambda-1)^5(\lambda+2)^4(\lambda-\frac{1}{2})^6(\lambda+\frac{1}{3})$

Autovalori: (radici del polinomio); $\lambda_1=1$; $\lambda_2=-2$; $\lambda_3=\frac{1}{2}$; $\lambda_4=-\frac{1}{3}$

$m_a(1)=5$; $m_a(-2)=4$; $m_a(\frac{1}{2})=6$; $m_a(-\frac{1}{3})=1$

(tornando a prima): $m_a(2)=1$ → la somma delle molteplicità è la dim dello spazio

Non essendo distinti gli aut non possiamo usare il th. di prima, ma vedo se $\exists$ 1 base di autovettori

$(\lambda=2)$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\to\begin{cases}y+z=2x\\x+z=2y\\x+y=2z\end{cases}\quad\begin{cases}y=2x-z\\x+z=4x-2z\\x+2x-z=2z\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=z\\\forall z\in\mathbb{R}\\x=z\end{cases}\to S=(z,z,z)\ z\in\mathbb{R}$$

, V_2 (aut rel all'aut. 2)

$\dim V_2=1 \leftarrow V_2=\{(z,z,z)\,/\,z\in\mathbb{R}\}$

[autospazio: autovettori + termine nullo]

$B=\{(1,1,1)\}$ base di V_2

$(\lambda=-1)$

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\to\begin{cases}y+z=-x\\x+z=-y\\x+y=-z\end{cases}\to\begin{cases}y=-x-z\\x+z=x+z\\x-x-z=-z\end{cases}\to\begin{cases}y=-x-z\\\forall x\\\forall z\end{cases}$$

$S=(x,-x-z,z)\ x,z\in\mathbb{R}\to V_{-1}=\{(x,-x-z,z)\,/\,x,z\in\mathbb{R}\}$

$\dim V_{-1}=2$ $B'=\{(1,-1,0),(0,-1,1)\}$ base di V_{-1}

I due vettori sono indipendenti. Se prendo i 3 vettori considero

$B\cup B'=\{\underbrace{(1,1,1)},\underbrace{(1,-1,0),(0,-1,1)}\}$ [unione delle basi]

sono relativi a λ distinti $\Rightarrow$ sono indipendenti $\Rightarrow B\cup B'$ è

BASE di $\mathbb{R}^3$ COSTITUITA DA AUTOVETTORI DI $A \Rightarrow A$ è DIAGONALIZZABILE

Anche se gli autoval. non sono distinti è POSSIBILE che siano DIAGONALIZZABILI.

Es: $\mathbb{R}^2$; 2)TH

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$= (1-\lambda)^2 \quad \lambda_1 = 1 \quad , m_a(1) = 2 ;$

• ($\lambda_1 = 1$)

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{cases} x + y = x \\ y = y \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ \cancel{\forall y \in \mathbb{R}} \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$V_1 = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$; $\dim V_1 = 1$; Base: $B = \{(1,0)\}$

trovata la BASE, ogni autovettore è dipendente da quello $\to \nexists$ NON C'È BASE DI AUTOVETTORI $\Rightarrow$ NON DIAGONALIZZABILE (non riusciamo a trovare una base)

$[\, m_a(1) = 2 \neq \dim V_1 = 1 \,]$

°

Es: $\mathbb{R}^2$ 1)TH

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 + 1) \to \text{SEMPRE POSITIVO}$$

NON $\exists$ V. $\in \mathbb{R}$ che annullano il polinomio $\Rightarrow$ NON HA AUT. $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ non è DIAGONALIZZABILE

$\downarrow$

TH: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è DIAGONALIZZABILE $\Longleftrightarrow$ 1) e 2) :

1) λ = AUTOVALORE di A $\in \mathbb{R}$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λ AUT. DI A, risulta $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

Def: $m_g(\lambda)$ ovvero la MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA di λ è la DIMENSIONE DI V_λ

$[\, m_g(\lambda) = \dim V_\lambda \,]$

Prop: $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di A

Oss: se $m_a(\lambda) = 1 \Rightarrow m_g(\lambda) = 1$

Ex(d'esame):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3k & 1 \\ 3 & 1 & -3k \end{pmatrix} \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

1) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, A è diagonalizzabile

(40) 2) Fissato 1 di questi valori, determinare una matrice DIAGONALIZZANTE ed

una forma diagonale.

3

1)

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -3k-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & -3k-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(-3k-\lambda)^2 - 1\right] =$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 + 6k\lambda + 9k^2 - 1) \qquad \lambda_1 = 1$$

$$\lambda^2 + 6k\lambda + 9k^2 - 1 \Rightarrow \lambda = -3k \pm \sqrt{9k^2 - 9k^2 + 1} = -3k \pm 1 \quad \begin{cases} \lambda_2 = -3k+1 \\ \lambda_3 = -3k-1 \end{cases}$$

Può accadere $\lambda_1 = \lambda_2 \to 1 = -3k+1$, $k=0$; $\lambda_1 = \lambda_3 \to 1 = -3k-1 \to k = -\frac{2}{3}$

λ_2 sempre $\neq$ da λ_3.

Per $k \neq 0, -\frac{2}{3}$ ci sono 3 autovalori distinti $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile

Per $k=0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $m_a(1) = 2$ $[\lambda_1 = \lambda_2]$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) \begin{cases} \lambda_1 = 1 = \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Controlliamo gli autovettori $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = x \\ x+z = y \\ 3x+y = z \end{cases} \to$

$$\begin{cases} \forall z \\ y = z \\ 3x + x + z = z \to x = 0 \end{cases} \quad V_1 = \{(0, z, z) / z \in \mathbb{R}\} \quad \left.\begin{matrix} \dim V_1 = 1 \\ m_a(1) = 2 \end{matrix}\right] \to \text{NON È DIAG.}$$

Per $k=0$, A NON È DIAGONALIZZABILE ($m_a(1) = 2 \neq m_g(1) = 1$)

Per $k = -2/3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $m_a(-\frac{2}{3}) = 2$

$\lambda_1 = \lambda_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = x \\ x + 2y + z = y \\ 3x + y + 2z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = -x - z \\ 3x - x - z + 2z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ \forall z \end{cases} \quad V_1 = \{(0, -z, z) / z \in \mathbb{R}\} \quad \left.\begin{matrix} m_g(1) = 1 \\ \dim V_1 = 1 \\ m_a(1) = 2 \end{matrix}\right] - \text{NON È DIAG.}$$

Per $k = 2/3$, $m_g(1) = 1 \neq m_a(1) = 2 \Rightarrow$ A non è DIAGONALIZZABILE

41

09/11/2004

GEOMETRIA AFFINE DEL PIANO

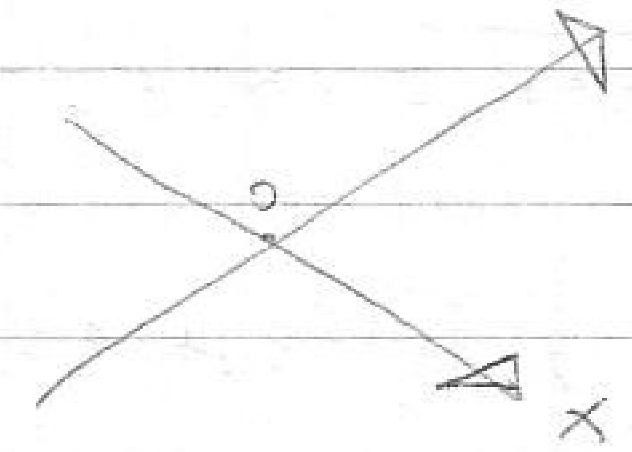
↓

Si intende non considerare misure (né di segmenti né di angoli). Siamo nel piano

RIFERIMENTO AFFINE: fissare un punto O del piano e due assi qualsiasi

EX:

$(x \nparallel y)$



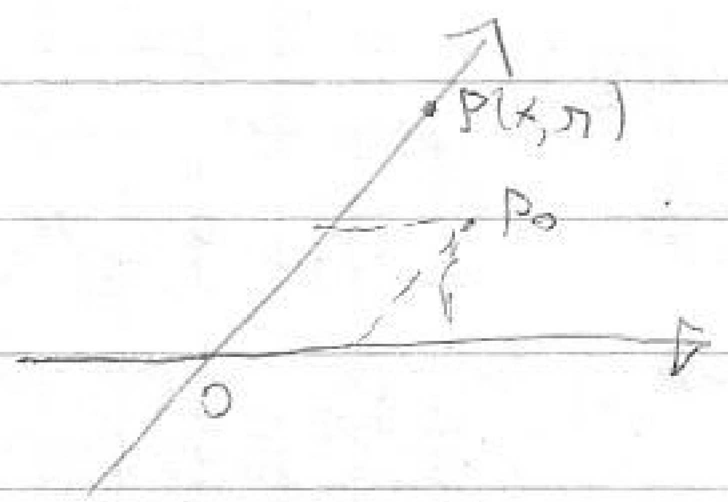
Ci sono i vettori del piano (ex: V_O)

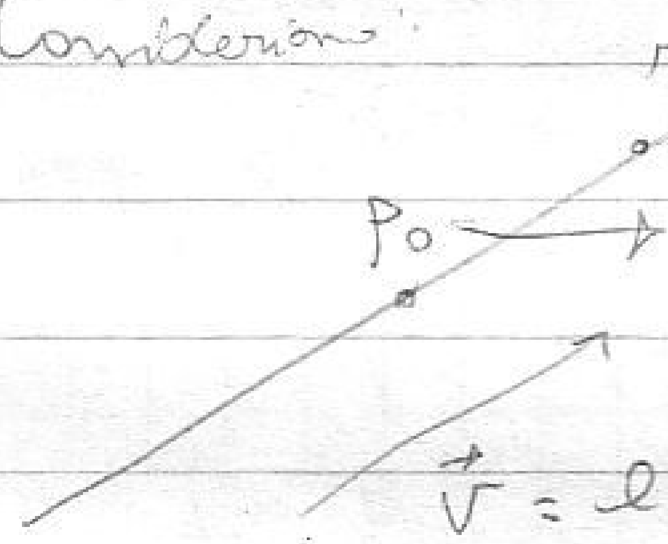
$B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ base di V_O

stesso ver. di x e y

- No VERSORI ($\|\ \|$) } non ha senso
- No $\perp$

$\vec{OP} \in V_O$: $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$ Consideriamo:





$P_0 \rightarrow$ altre coordinate (x_0, y_0)

$\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j}$ (// alla retta)

Quando $P(x,y) \in r \iff \vec{P_0P} \parallel \vec{v}$ ~~⇔~~ $[\vec{P_0P} = t\vec{v}$, // tra vettori$] \iff$

$\vec{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} = tV = tl\vec{i} + tm\vec{j}$ Essendo unica co.appr.:

$x - x_0 = tl$

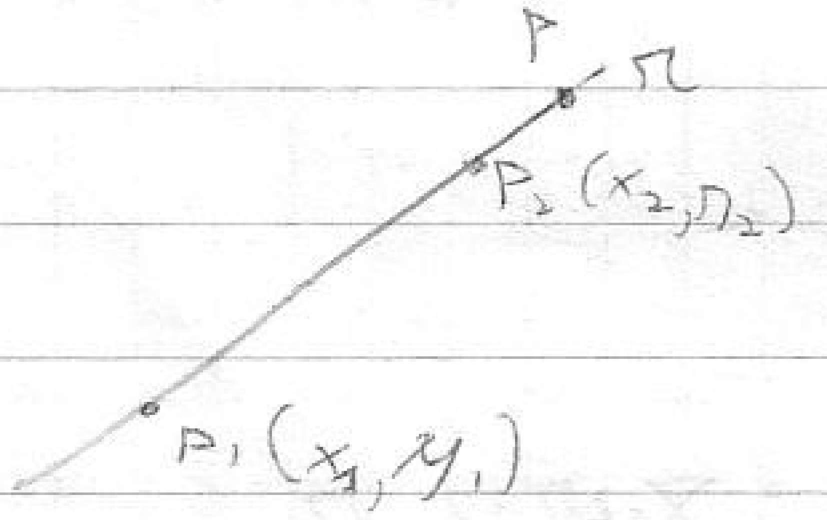
$y - y_0 = tm$ $\rightarrow$ $\boxed{\begin{cases} x = tl + x_0 \\ y = tm + y_0 \end{cases}}$ → EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA r e

m e l sono i PARAMETRI DIRETTORI (direzione retta)

↓

Ora vogliamo la

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA



$P \in r \iff \vec{P_1P} \parallel \vec{P_1P_2} \iff \vec{P_1P_2}$ e $\vec{PP_2}$

sono lin. dipendenti $\iff \det\begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} = 0$

$\iff (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$

$\iff \boxed{\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$

Chiamiamo:

$a = y_2 - y_1$, $b = -(x_2 - x_1)$

$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$, $ax + by \overbrace{- ax_1 - by_1}^{c} = 0$ →

$\boxed{ax + by + c = 0}$ → EQUAZIONE CARTESIANA DI r

Cons: $\overrightarrow{P_1P_2} = \underbrace{(\overset{-b}{x_2 - x_1})\vec{i} + (\overset{a}{y_2 - y_1})\vec{j}}_{\text{I}}$

Parametri direttori di $r = -b$ e a

Ex: 1. Determinare il punto della retta $x - y + 1 = 0$ allineato con $P(2,0)$ e $Q(-2,2)$

Ex: 2. Determinare i parametri direttori della retta congiungente $A(-1,0)$, $B(2,-2)$ ($\overset{+}{AB}$)

2) $\vec{AB} = (\overset{x_2-x_1}{2 - (-1)})\vec{i} + (\overset{y_2-y_1}{0 - 2})\vec{j} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \Rightarrow (3,-2)$ sono i parametri direttori di r

$$\begin{cases} x = \boxed{t\ell}\ 3t + 2 \\ y = -2t - 2 \end{cases}$$

parametri

→ punto B (ogni punto $\in \mathbb{R}$ è corretto)

Eliminiamo t: l'eq. cartesiana

$$\begin{cases} t = \dfrac{x-2}{3} \\ t = \dfrac{y+2}{-2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{-2} \quad \left[\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\right]$$

1) $S(x, x+1) \to$ punto variabile nella retta $\in r$ [$y = x+1$ in forma espl.]

$$\det\begin{pmatrix} x - \boxed{2} & x + 1 - \boxed{0} \\ \boxed{-2} - \boxed{2} & \boxed{2} - \boxed{0} \end{pmatrix} = 0. \quad \left[\text{condizione di allineamento}\right] \quad \vec{P_S} \parallel \vec{PV}$$

$2x - 4 + 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 0,\ y = 1$

POSIZIONE DI DUE RETTE

Prendiamo $r: ax + by + c = 0$, $r' = a'x + b'y + c' = 0$. $r \cap r' \Rightarrow$

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

1) $rg\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{pmatrix} = 2 \rightarrow r \cap r' = \{P_0\}$ 1 sola soluzione

2) $rg\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{pmatrix} = 1 \xrightarrow[\text{sol}]{\infty^1} \Rightarrow r = r'$

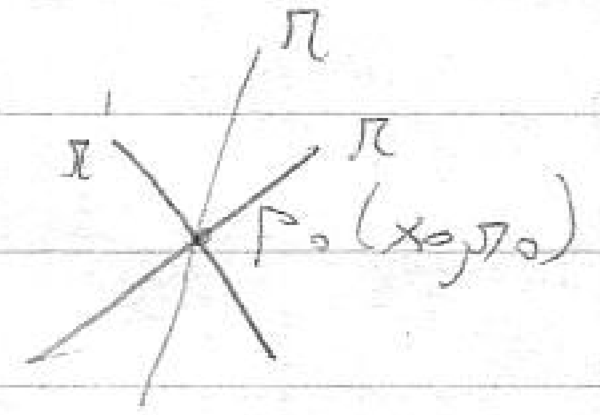
(→)

3) $rg\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1 \neq rg\begin{pmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{pmatrix} = 2$ → sist. incomp. ⇒ $r \cap r' = \emptyset$ e $r // r'$

⇒ $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$, righe dipendenti, ⇒ $(a', b') = \underset{\neq 0}{\boxed{k}}(a, b)$ $\begin{bmatrix} a' = a \\ b' = b \end{bmatrix}$

[// tra due rette]

FASCI DI RETTE



$r: ax + by + c = 0$ [Supponiamo che non siano // e né coincidenti]

$r': a'x + b'y + c' = 0$

↓

$\bar{r}: \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$. Quando $\bar{r}$ ∈ al fascio? Quando $P_0 \in \bar{r}$,

cioè ⇔ $det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = 0$ (evidente rg max 2) ⇒ righe dipendenti ⇒

$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \alpha(a, b, c) + \beta(a', b', c')$ [comb. lineare]

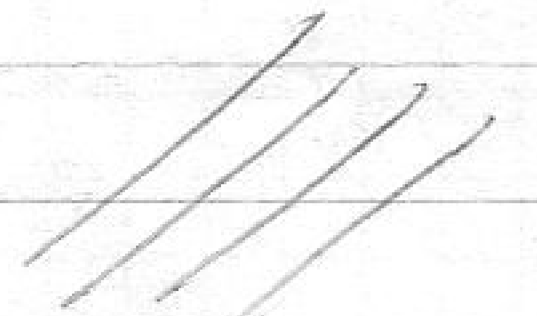
⇓

$\bar{r}: \alpha(ax + by + c) + \beta(a'x + b'y + c') = 0$. Supponiamo $\alpha \neq 0$ ⇒ posso dividere e:

$(ax + by + c) + \underbrace{\frac{\beta}{\alpha}}_{k}(a'x + b'y + c') = 0$ → r' PERDO l'eq se $\alpha = 0$ $[\beta(a'x + b'y + c') = 0]$

↓

FASCIO DI RETTE individuato da r e r' PASSANTI per P_0 → FASCIO PROPRIO di CENTRO P_0



FASCIO IMPROPRIO ⇒ $ax + by + k = 0$

Ex:

$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 & \text{→ rette del fascio} \\ x - y = 0 & \in F \\ 3x + y - 4 = 0 \end{cases}$ Det. la retta del F passante per $P(3, 2)$

$det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} = 1(1+3) - 4(-1+2) = 4 - 4 = 0$ ⇒ $rg = 2$

sono rette di 1 fascio

Fascio PROPRIO di centro P.

Interseco le rette ed ho $P_0(x_0, y_0)$. Ho P e trovo la retta P_0P [passo per P e per il centro del f.]

Ex: Parametri direttori di $x + 3y + 6 = 0$ → $(-b, a)$ → $(-3, 1)$

Ex: Retta // $x - y + 3 = 0$ e ∈ F individ. dalle rette r ed r':

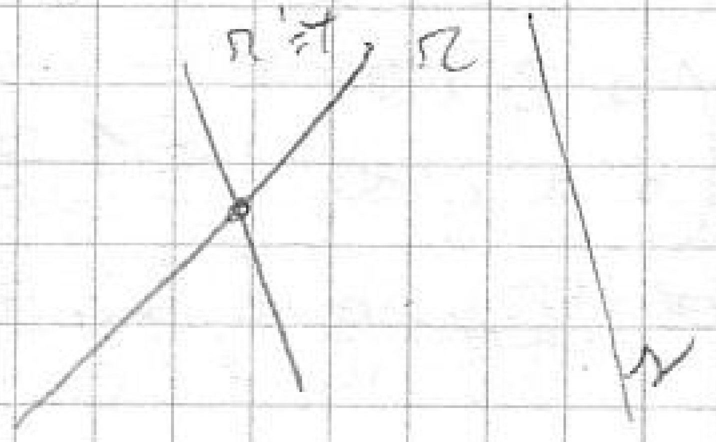
$r = 5x + y - 2 = 0$; $r' = x - y + 1 = 0$

(⟶)

$t: x - y + k = 0$ (per essere // alla prima).

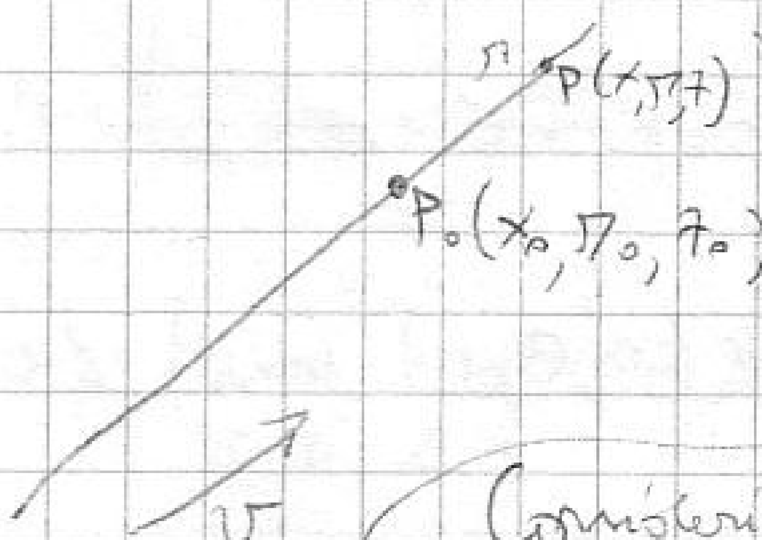
$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 5 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 = -1 + 7 + k(-6) = 0 \qquad k = 1 \qquad t: x - y + 1 = 0$$

$\Downarrow$ è proprio quella



8/11/2004

GEOMETRIA AFFINE NELLO SPAZIO; fissiamo un Riferimento Affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ vettori base di V_O → vettori applicati in O nello spazio

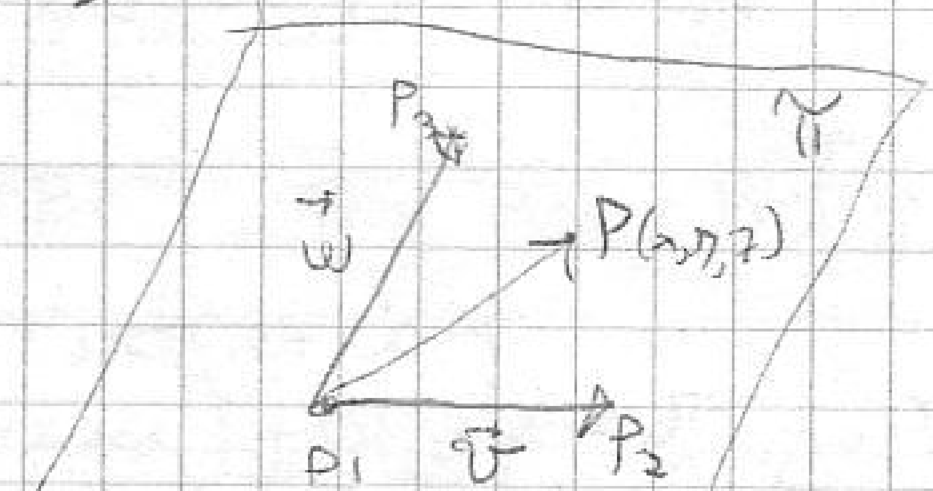


$\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ $\quad P \in r \iff \vec{P_0P} \,//\, \vec{v} \iff$

$\vec{P_0P} = tv \Rightarrow$ (Componenti P_0P in base B)

$$\begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \\ z - z_0 = tn \end{cases}$$ → eq. parametriche di r

Consideriamo un piano individuato da P_1, P_2, P_3



$P \in \pi \iff \vec{P_1P} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ (in B). Se $v = li + mj + nk$ e w in B si rappresenta come $w = l'i + m'j + n'k \Rightarrow \vec{P_1P}$:

$$\begin{cases} x - x_1 = \alpha l + \beta l' \\ y - y_1 = \alpha m + \beta m' \\ z - z_1 = \alpha n + \beta n' \end{cases}$$ EQUAZ. PARAM. DEL PIANO π

Rappresentazione cartesiana:

$P_1(x_1, y_1, z_1)$; $P_2(x_2, y_2, z_2)$; $P_3(x_3, y_3, z_3)$ e $P(x, y, z)$

$P \in \pi \iff \vec{P_1P}, \vec{P_1P_2}$ e $\vec{P_1P_3}$ complanari $\iff$ lin. dipendenti $\iff$

$$\det\begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} [P_1P] = 0$$

, ponendo a, b, c, d i coeff. e sviluppando si ottiene

$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ → EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO

INTERSEZIONE DI DUE PIANI: Piani π, π'

$\pi = ax + by + cz + d = 0$

$\pi' = a'x + b'y + c'z + d' = 0$ $\qquad$ Studiamo $\pi \cap \pi'$

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$ → Intersezione non può essere unica

1) Sist. compatibile: $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \infty^2$ sol
$(\pi \cap \pi' = \pi)$, 2) se $rg = 2 \Rightarrow \infty^1$ sol. [punti di una retta] ⇒
$\pi \cap \pi' = r \longrightarrow \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ → EQUAZIONE CARTESIANE DI r NELLO SPAZIO

(intersezione di 2 qualsiasi piani nello spazio)

3) Sist. incompatibile: $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}_1 \neq rg\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}_2 \rightarrow \pi \cap \pi' = \emptyset$ → PIANI PARALLELI

PARALLELISMO DI DUE PIANI

$\pi /\!/ \pi'$; $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$ (proporzionali) $\Downarrow (a', b', c') = k(a, b, c)$ con $k \neq 0$

$\pi' = kax + kby + kcz + d' = 0 \rightarrow ax+by+cz+\frac{d'}{k} = 0$

INTERSEZIONE RETTA/PIANO: $\pi \cap r$

$\pi = ax+by+cz+d=0$; $r = \begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ \bar{a}x+\bar{b}y+\bar{c}z+\bar{d}=0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ \bar{a}x+\bar{b}y+\bar{c}z+\bar{d}=0 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$

1) $rg\, A = rg\, A' = 3 \Rightarrow \pi \cap r = \{P_0\}$
2) $\quad$ " $=$ " $= 2 \Rightarrow \infty^1$ sol $\Rightarrow$ retta giace nel piano $r \cap \pi = r$
3) " $= 2 \neq$ " $\neq 3 \Rightarrow \pi \cap r = \emptyset \Rightarrow \pi /\!/ r$ $[|A| = 0]$ → Condizione di // ima tra π e r

$\Downarrow$

Th: IP: r, parametri direttori l, m, n; $r = \begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ \bar{a}x+\bar{b}y+\bar{c}z+\bar{d}=0 \end{cases}$ (eq. cartesiane)

↓ ALLORA

l, m, n sono PROPORZIONALI a questi minori di ordine 2 (rispettivamente)
$\det\begin{pmatrix} b' & c' \\ \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = kl$; $-\det\begin{pmatrix} a' & c' \\ \bar{a} & \bar{c} \end{pmatrix} = km$; $\det\begin{pmatrix} a' & b' \\ \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix} = kn$
$\qquad (l) \qquad\qquad (m) \qquad\qquad (n)$

Prop. $r \parallel \tilde{\pi} \iff al + bm + cn = 0$, dove l, m, n (par. dir. di r)

e $\tilde{\pi} = ax + by + cz + d = 0$

Dim: $r \parallel \pi \iff \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = 0 \iff a \overbrace{\begin{vmatrix} b' & c' \\ \bar{b} & \bar{c} \end{vmatrix}}^{l} + bm + cn = 0$

FASCI DI PIANI

1) $\tilde{\pi} \cap \tilde{\pi}_1 \Rightarrow r$; 2) $\tilde{\pi} \parallel \tilde{\pi}'$ In 1) $F(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}')$ = fascio proprio di asse r

In 2) // = fascio improprio

2] $ax + by + cz + k = 0$, $\tilde{\pi} = ax + by + cz + d = 0$

1] Ip: $r = \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ Quando $\bar{\pi} = \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}z + \bar{d} = 0 \in F(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}')$

$\Rightarrow rg\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = 2$, ~~complanari~~ [$\infty^1$ sol, cioè la retta] $\iff$

$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}) = \alpha(a, b, c, d) + \beta(a', b', c', d') \iff \bar{a} = \alpha a + \beta a'$;

$\bar{b} = \alpha b + \beta b'$; $\bar{c} = \alpha c + \beta c'$; $\bar{d} = \alpha d + \beta d'$

$\Downarrow$

l'eq. di $\bar{\pi} = \alpha(ax + by + cz + d) + \beta(a'x + b'y + c'z + d') = 0$

con $\alpha \neq 0$, $ax + by + cz + d + \underbrace{t}_{\beta/\alpha}(a'x + b'y + c'z + d') = 0$

9/11/2004

INTERSEZIONE DI DUE RETTE:

$r\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{cases}$ $r': \begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$

Dal sistema di 4 eq.:

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a' & b' & c' \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a' & b' & c' & d' \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ rg A e A' almeno = 2 [piani incidenti]

1) $rg\,A = rg\,A' = 3$ → SISTEMA COMPATIBILE $\Rightarrow r \cap r' = \{P_0\}$

2) $rg\,A = rg\,A' = 2$ → // // $\Rightarrow \infty^1$ sol $\Rightarrow r \cap r' = r$

3) $rg\,A = 2 \neq rg\,A' = 3$ → // INCOMPATIBILE $\Rightarrow r \cap r' = \emptyset$ (rette complanari

poiché $rg\,A' = 3 \Rightarrow r \parallel r'$, r, r' complanari)

4) $rg\,A = 3$ $\neq$ $rg\,A' = 4$ → sist. incomp. → $r \cap r' = \emptyset$, r, r' non complanari
⇒ rette SGHEMBE

Prop.: r e r' sono SGHEMBE ⟺ $|A'| \neq 0$

GEOMETRIA EUCLIDEA → si prendono minore di α e β

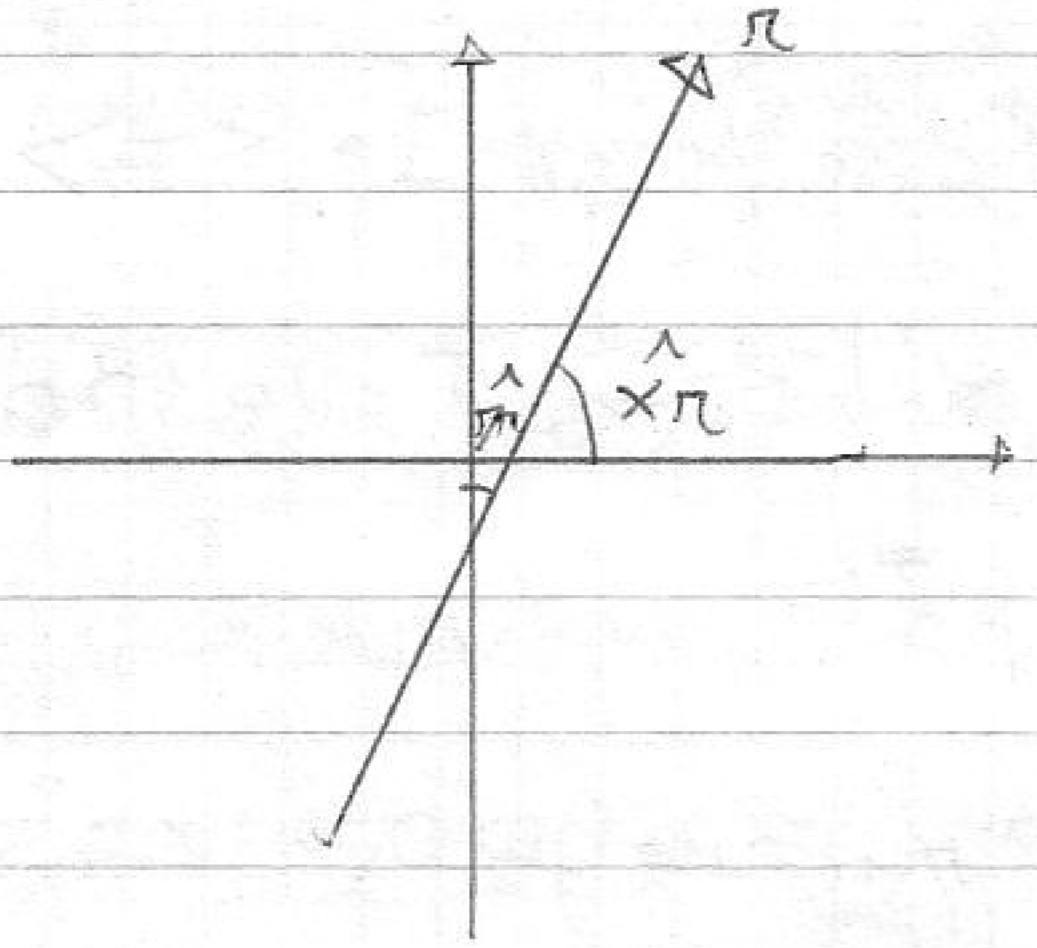
R.C $(O, \vec{i}, \vec{j})$ → origine e base ortonormale $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$

rif. cartesiano ortogonale nel piano

$i \perp j$; $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$

RC (O, i, j, k) [riferimento ... nello spazio] → $B = \{i, j, k\}$

PIANO	SPAZIO
r = retta orientata	Qui avrò $\cos \widehat{xr}$, $\cos \widehat{yr}$, $\cos \widehat{zr}$



$\vec{r}$, versore di r, $= \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$; ma

$\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0\vec{j}$; $\vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j}$ →

$\vec{r} \cdot \vec{i} = |\vec{r}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos \widehat{xr} = \boxed{\cos \widehat{xr}} =$

$\alpha 1 + \beta 0 = \boxed{\alpha}$

$\vec{r} \cdot \vec{j} = |\vec{r}|\,|\vec{j}| \cdot \cos \widehat{yr} = \boxed{\cos \widehat{yr}} =$

$\alpha 0 + \beta 1 = \boxed{\beta}$

α e β sono COSENI DIRETTORI di r
(essendo componenti del versore della retta)

r ha parametri direttori l, m ⇒

$\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j}$ $\left[\frac{v}{|v|} = \text{versori}\right]$

$|v| = \sqrt{l^2 + m^2}$ ⇒ COMPONENTI di $\frac{v}{|v|}$

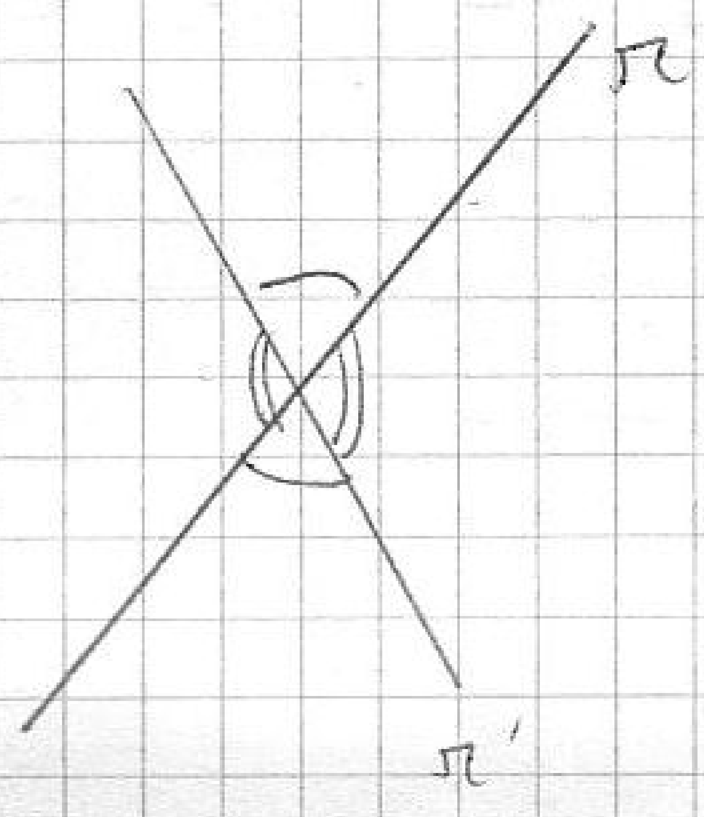
rispetto a B: $\left(\frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2}}, \frac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2}}\right)$

sono versori di r $\Rightarrow$ COSENI DIRETTORI

$$\alpha = \frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2}} \; ; \; \beta = \frac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2}}$$

$$\rightarrow \gamma = \frac{n}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

ANGOLI TRA DUE RETTE



interno dir. delle due rette

$$\cos \widehat{rr'} = \cos \widehat{\vec r \vec r'}$$

$$\vec v = l'\vec i + m'\vec j \; ; \; v' \parallel r'$$

$$\vec r = \frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2}}\,\vec i + \frac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2}} \rightarrow \text{versore di } r$$

$$\vec r' = \frac{l'}{\pm\sqrt{l'^2+m'^2}} + \frac{m'}{\pm\sqrt{l'^2+m'^2}} \rightarrow \text{versore di } r'$$

$$\cos \widehat{rr'} = \vec r \cdot \vec r' = \frac{ll'+mm'}{\pm\sqrt{l^2+m^2}\cdot\sqrt{l'^2+m'^2}}$$ → cos. dell'angolo tra le due rette

NEL PIANO:

- Prop: $r \perp r' \iff ll' + mm' = 0$ (nel PIANO EUCLIDEO) usando
- l'eq. cartesiana: $r \perp r' \iff aa' + bb' = 0$, dove a, b, a', b' sono i coef. delle equazioni cartesiane delle due rette

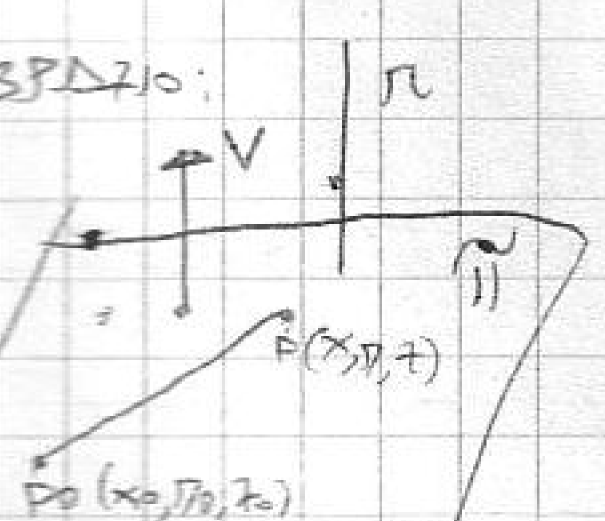
NELLO SPAZIO:

- $r \perp r' \iff ll' + mm' + nn' = 0$; nello spazio l'eq. cartesiana rappresenta un piano, non una retta.

COSENO DELL'ANGOLO TRA DUE PIANI

- $$\cos \widehat{\pi\pi'} = \frac{aa'+bb'+cc'}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$ $\pi \perp \pi' \iff aa' + bb' + cc' = 0$

NELLO SPAZIO:



$r \perp \pi$; r: par. dir. l, m, n ; π : $ax+by+cz+d=0$

Prop $r \perp \pi \iff rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{pmatrix} = 1$ → PARAMETRI DI GIACITURA DEL PIANO (componenti di un vettore ⊥ al piano) ($a\ b\ c \rightarrow V$; $l\ m\ n \rightarrow V_r$)

Dim:

1) $ax + by + cz + d = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$

$P \in \pi$ $\quad P_0 \in \pi$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ [prodotto membro a membro]

$\hookrightarrow$ PRODOTTO SCALARE TRA $\vec{V}$ e $\overrightarrow{P_0P}$

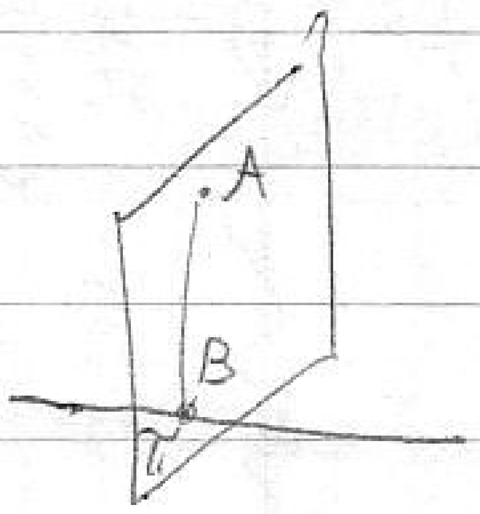
$\vec{V}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$; $\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}$

$\vec{V}\perp\overrightarrow{P_0P}$ $(\cos\alpha=0)$, p. scal $=0$; $\vec{V}\perp\pi$; $r\perp\pi \Longleftrightarrow r\parallel\vec{V}$

DISTANZA PUNTO / RETTA NEL PIANO

$A(6,-3,1)$

$$r=\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-5z-3=0 \end{cases}$$



$d(A,r)=dAB$ $\quad \pi \ni P_0(x_0,y_0,z_0)=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$=a(x-6)+b(y+3)+c(z-1)=0$

$l=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -5\end{vmatrix}=-5$; $m=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -5\end{vmatrix}=5$; $n=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$

Al posto di a,b,c pongo $-5,5,-2 \Rightarrow \pi=-5(x-6)+5(y+3)-2(z-1)=0$

$-5x+5y-2z+47=0$; sistema con

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-5z-3=0 \\ -5x+5y-2z+47=0 \end{cases} \quad [B=(\alpha,\beta,\gamma)]$$

$dAB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

PIANO: r; r'; P; P'

$$r: \begin{cases} x = tl + x_0 \\ y = tm + y_0 \end{cases} \rightarrow ax + by + c = 0$$

FASCIO PROPRIO: $(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0$ o $(x - x_0) + k(y - y_0) = 0$

" IMPROPRIO: $ax + by + k = 0$

PARAMETRI DIRETTORI: $(l, m) = (-b, a)$

$$r \parallel r' \iff (l, m) = \rho(l', m')$$

$$r \perp r' \iff ll' + mm' = 0 \rightarrow (l, m) = \rho(-m', l')$$

$$aa' + bb' = 0 \rightarrow \cancel{(a,b) = \rho(a}\ (a, b) = \rho(-b, a)$$

$$d(P, P') = \sqrt{(x_{P'} - x_P)^2 + (y_{P'} - y_P)^2}$$

$$d(P, r) = \frac{a x_P + b y_P + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

COSENI DIRETTORI $[\vec{r} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}]$ COS. ANGOLO TRA DUE RETTE

$$\cos \hat{xr} = \frac{l}{\pm\sqrt{l^2 + m^2}} \ (\alpha); \quad \cos \hat{yr} = \frac{m}{\pm\sqrt{l^2 + m^2}} \ (\beta) \qquad \cos \hat{rr'} = \frac{ll' + mm'}{\pm\sqrt{l^2 + m^2}\sqrt{l'^2 + m'^2}}$$

SPAZIO: r; r'; P; P'; $\tilde{\pi}$; $\tilde{\pi}'$

$$r = \begin{cases} x = tl + x_0 \\ y = tm + y_0 \\ z = tn + z_0 \end{cases} \rightarrow r = \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\pi} = \begin{cases} x = \alpha l + \beta l' + x_0 \\ y = \alpha m + \beta m' + y_0 \\ z = \alpha n + \beta n' + z_0 \end{cases} \qquad \tilde{\pi}: ax + by + cz + d = 0$$

FASCIO PROPRIO: $(ax + by + cz + d) + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0$

" IMPROPRIO: $ax + by + cz + k = 0$

PARAMETRI DIRETTORI r:

PARAMETRI GIACITURA $\tilde{\pi}$: a, b, c

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \quad m = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \quad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

$$r \parallel r' \iff (l, m, n) = \rho(l', m', n')$$

$$r \perp r' \iff ll' + mm' + nn' = 0$$

$$\tilde{\pi} \parallel \tilde{\pi}' \iff (a, b, c) = \rho(a', b', c')$$

$$\tilde{\pi} \perp \tilde{\pi}' \iff aa' + bb' + cc' = 0$$

II

$\tilde{\pi} \perp \pi : \quad (a, b, c) = \rho(l, m, n)$

$$d(P, P') = \sqrt{(x_{P'} - x_P)^2 + (y_{P'} - y_P)^2 + (z_{P'} - z_P)^2}$$

$$d(P, \tilde{\pi}) = \frac{a x_P + b y_P + c z_P + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$d(P, \pi) = d(P, P')$, $\tilde{\pi} \ni P$, con $(a, b, c) = (l, m, n)$; int $\tilde{\pi}, \pi = P'$

COSENI DIRETTORI

(piano) + $\cos \hat{z\pi} = \dfrac{n}{\pm\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \gamma$

COS. ANGOLO TRA DUE PIANI

$$\frac{aa' + bb' + cc'}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} = \cos \hat{\tilde{\pi}\tilde{\pi}'}$$

COSENO ANGOLO TRA 2 RETTE

$$\cos \hat{\pi\pi'} = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\,\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}$$