[illegible]

Programma di Calcolo 1 (Ingegneria Civile)

Lezione 1 - L'insieme **N** e **Z**. Principio di induzione. L'insieme **Q** e relativa assiomatica.

Lezione 2 - Definizione di numero irrazionale mediante il metodo di Dedekind. Contiguità delle classi separate di **Q**.

Lezione 3 - L'insieme **R** e relativi sottoinsiemi. Intervalli. Maggiorante e minorante di un sottoinsieme. Sottoinsieme limitato (superiormente ed inferiormente). Massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore di un sottoinsieme. X assioma di **R**.

Lezione 4 - Funzione reale di una variabile reale. Immagine e controimmagine di un numero mediante la funzione. Funzione suriettiva, iniettiva e biettiva. Invertibilità di una funzione e funzione inversa. Grafico di una funzione ed eventualmente della rispettiva funzione inversa. Monotonía delle funzioni. Invertibilità delle funzioni crescenti e decrescenti. Le funzioni elementari $y = x^2$, $y = x^3$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=|x|$. Funzioni limitate (superiormente e inferiormente); maggiorante, minorante, massimo e minimo assoluto, estremo superiore ed estremo inferiore di una funzione.

Lezione 5 - Funzione pari e dispari. Le funzioni elementari: successione numerica, funzione costante, potenze ad esponente naturale, radici n-esime, polinomi.

Lezione 6 - Le funzioni elementari: potenze ad esponente intero negativo e relative funzioni inverse, valore assoluto, esponenziale, logaritmo, funzioni goniometriche e relative inverse. Funzioni composte. Potenze con base ad esponente reale. Dominio e segno di una funzione composta. Intorno di un punto. Intorno bucato. Intorno sferico di un punto. Intorno destro e sinistro di un punto. Punto di accumulazione di un sottoinsieme. Punto isolato di un sottoinsieme.

Lezione 7 - Introduzione al concetto di limite di una funzione in un punto. Funzioni regolari (convergenti e divergenti) e indeterminate per $x \to x_0$. Concetto di limite in un punto per via grafica. Definizione, mediante il concetto di intorno, di funzione convergente per $x \to x_0$. Definizione di funzione convergente per $x \to x_0$. Esempi.

Lezione 8 - Teorema dell'unicità del limite. Teorema del confronto del limite. Teorema del doppio confronto del limite. Definizione (mediante il concetto di intorno e non) di funzione divergente per $x \to x_0$. Esempi.

Lezione 9 - Definizione di limite destro e sinistro. Teorema del confronto del limite nel caso di funzioni divergenti. Definizioni di funzioni convergenti, divergenti e indeterminate per $x \to \pm\infty$. Esempi. Studio del comportamento delle funzioni elementari agli estremi del loro dominio.

Lezione 10 - Limite di una funzione composta. Limite di una combinazione lineare di due funzioni. Forma indeterminata $\infty - \infty$. Esempi.

Lezione 11 - Limite del prodotto di due funzioni. Forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Esempi.

Lezione 12 - Limite del prodotto di due funzioni. Esempi.

Lezione 13 - Limite del rapporto di due funzioni. Forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$. Esempi. Funzioni composte $f(x)^{g(x)}$. Forme indeterminate 1^∞, ∞^0 e 0^0. Limite notevole $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$. Esempi.

Lezione 14 - Asintoti verticali e orizzontali. Limiti notevoli $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$. Continuità in un punto e un insieme di una funzione. Classificazione delle discontinuità. Esempi. Continuità a destra e a sinistra. Continuità delle funzioni elementari nel loro dominio. Continuità di una funzione composta. Continuità della somma, prodotto e rapporto di funzioni continue. Esempi.

Lezione 15 - Teorema dei valori intermedi. Teorema di Bolzano-Cauchy. Teorema di Weierstrass. Applicazioni.

Lezione 16 - Derivabilità in un punto e in un insieme di una funzione. Definizione di derivata prima in un punto e in un insieme. Derivabilità delle funzioni elementari nel loro dominio: potenze con esponente razionale, $y = |x|$, esponenziali, logaritmiche.

Lezione 17 - Derivabilità delle funzioni elementari nel loro dominio: funzioni trigonometriche. Teorema sulla derivabilità di una funzione composta. Teorema sulla derivabilità di una combinazione lineare di funzioni. Teorema sulla derivabilità di una funzione prodotto. Teorema sulla derivabilità di una funzione rapporto. Teorema sulla derivabilità di una funzione inversa. Applicazione di tale teorema alle funzioni inverse: radice n-esime, logaritmo, funzioni circolari inverse.

Lezione 18 - Derivabilità e continuità di una funzione in un punto. Interpretazione geometrica della derivata in un punto, retta tangente al grafico di una funzione in un punto. Classificazione dei punti di non derivabilità: punti angolosi, cuspidali e di flesso a tangente verticale. Teorema di Rolle. Teorema di Lagrange. Applicazioni. Teorema di De l'Hospital. Esempi.

Lezione 19 - Esercitazione

Lezione 20 - Teorema sulla derivabilità in un punto delle funzioni ivi continue. Classificazione dei punti di non derivabilità da tale teorema. Esempi. Teorema sulle funzioni a derivata nulla. Teorema sulla monotonia stretta di una funzione in un intervallo in base al segno della derivata prima.

Lezione 21 - Esercitazione.

Lezione 22 - Estremi relativi di una funzione (max e min relativi). Ricerca degli estremi relativi di una funzione. Teorema di Fermat. Esempi.

Lezione 23 - Concavità e convessità di una funzione in un intervallo. Punti di flesso. Teorema sulla Concavità e convessità di una funzione in un intervallo in base al segno della derivata seconda. Ricerca dei punti di flesso. Studio del grafico di una funzione.

Lezione 24 - Esercitazione.

Lezione 25 - Definizione di integrale definito di una funzione continua. Sua interpretazione geometrica. Convenzioni nel caso in cui gli estremi di integrazione coincidono o sono quello inferiore maggiore di quello superiore. Teorema della additività. Teorema della linearità. Teorema del confronto. Teorema del modulo.

Lezione 26 - Esercitazione.

Lezione 27 - Teorema della media. Teorema della media pesata. I teorema fondamentale del calcolo integrale. Definizione di funzione primitiva di una funzione data in un intervallo. Due primitive in un intervallo di una stessa funzione continua differiscono per una costante. II teorema fondamentale del calcolo integrale. Esempi.

Lezione 28 - Integrali indefiniti. Integrali immediati. Funzioni iperboliche e rispettive inverse.

Lezione 29 - Esercitazione: Metodo di integrazione per sostituzione. Metodo di integrazione per parti. Esempi.

Lezione 30 - Integrazione dei fratti semplici, integrazione delle funzioni razionali mediante scomposizione in fratti semplici.

Lezione 31 - Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie (EDO). EDO dirette del primo ordine. Integrale generale, particolare e singolare. Problema di Cauchy. EDO del primo ordine: a variabili separabili. Esempi

Lezione 32 - EDO lineari del primo ordine omogenee. Esempi.

Lezione 33 - EDO lineari del primo ordine non omogenee. Esempi.

Lezione 34 - Esercitazione.

Lezione 35 - Esercitazione.

CALCOLO 1 - INDICE APPUNTI [PERIODO I]

Prof. P. Natalini

[→]

52. CUSPIDE / FLESSO A TANGENTE VERTICALE ASCENDENTE / DISCENDENTE / TH. DI ROLLE / TH. DI LAGRANGE (VALORI INTERMEDI)

53. TH. DI DE L'HOSPITAL

CALCOLO 1 - 5/10/2004 ①

Ricevimento: tutti i MAR. dalle 10.30 a 12.30 (st. 111 - Dip. MAT.) - p. NATALI

LIBRO: "LA FORGIA" - "Ed. ACCADEMIA" - "CALCOLO DIFFERENZIALE & INTEGRALE"

[NUMERI RAZIONALI]

1° insieme: num. naturali $N = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$, $N_0 = N \overset{\text{unito}}{\cup} \{0\}$ "ampliamento"

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\}$ (utile x poter estendere le operazioni tra N)

[numeri INTERI]

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,/\, m, n \in \mathbb{Z}, \overset{\text{nessun divisore in comune}}{\boxed{\text{coprimi}}} \text{ tra loro}, n \neq 0 \right\}$

[numeri RAZIONALI]

(seguirà a p. 3)

H

PRINCIPIO DI ~~FUNZIONE~~ INDUZIONE: metodo che ci fa dimostrare che certe proprietà dipendenti da N [P(n)] sono VERE ∀ n ∈ N

$\mathbb{N}_0 = N \cup \{0\}$

Ex: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$ = (progressione geometrica - non si calcola intero base col eq. incrementale)

$= \cancel{n+2}\ 2^{n+1} - 1$ + (P che dipende solo da n) Si vuole verificare che questo $\boxed{P \text{ sia TRUE } \forall n \in \mathbb{N}_0}$ Ex: prendo:

$n = 0$ | $1 = 1$ → si può andare avanti all'∞ e non si può fare.
$n = 1$ | $3 = 3$ → si usa il PRIN. d'IND.
$n = 2$ | $7 = 7$

Ecco i passaggi:

1) P(n) deve essere VERA per il + piccolo numero che si può dare ad n ⇒ P(1) VERA, da verificare (già svolta prima)

2) $\boxed{\text{IPOTESI INDUTTIVA: per } n = \bar{n} \text{ ("un certo valore" } \in \mathbb{N}), \text{ dove } \bar{n} \in \mathbb{N}, P(n) \text{ è VERA.}}$ → dimostrare che $P(\bar{n}+1)$ è VERA

Se riesco a dimostrare 1) e 2) ⇒ la TESI del P. IND. è P(n) è VERA ∀ n ∈ N [cioè quella che volevamo dimostrare prima]

Dim. di 2): Sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ fissato [non considero + n come variabile, ma un numero preciso].

[1] Suppongo che $\boxed{1 + 2 + 2^2 + 2^3 \dots + 2^{\bar{n}} = 2^{\bar{n}+1} - 1}$ Tesi da dim.: $1 + 2 + 2^2 + \dots 2^{\bar{n}} + 2^{\bar{n}+1} = 2^{\bar{n}+2} - 1$

Si prende il 1° membro: $\underbrace{1+2+2^2 \dots +2^{\bar{n}}}_{\text{Coincide con il 1° membro della IPOTESI}} + 2^{\bar{n}+1} = \underbrace{2^{\bar{n}+1} - 1)} + 2^{\bar{n}+1} =$

$$= 2 \cdot 2^{\bar{n}+1} - 1 = \boxed{2^{\bar{n}+2} - 1}.$$

//

(dim. del principio). Ex: valide le ipotesi (1), 2)), supponiamo FALSA la TESI, ex: ASS: $\boxed{P(\bar{n})\text{ è falsa}}$ [per $\bar{n}$ (particolare valore)]. Se contraddice le ipotesi, non si nega la tesi. ~~Se allo stesso~~ se $P(\bar{n}-1)$ è vera contraddice 2) [non è vera per il successivo] se $P(\bar{n}-2)$ vera contraddice 2) [non è vero per $P(\bar{n}-1)$, come detto prima]. Continuando arriverei per forza a $P(1)$ è FALSA, che però contraddice 1) $\Rightarrow P(\bar{n})$ non può essere FALSO.

Es: $\boxed{\overset{TH}{\underbrace{\sum_{k=1}^{n}}_{\text{Somma di n addendi dando a k valori}} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}}}$

$n \in \mathbb{N}$

~~ex 48:~~ $\overset{k=1}{\frac{1}{1\cdot 2}} + \overset{k=2}{\frac{1}{2\cdot 3}} + \overset{k=3}{\frac{1}{3\cdot 4}} + \dots + \overset{k=n}{\frac{1}{n(n+1)}}$

Ex: $1+2+2^2+2^3 \dots +2^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k$

~~Es~~ Si vuole dimostrare che TH è vera $\forall n \in \mathbb{N}$. Si verifica l'ipotesi 1): $P(n)$ = VERA con n

$\underbrace{\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)}}_{1/2} = \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{1/2} \Rightarrow$ 1) è VERIFICATO.

Si verifica che ip. 2), cioè che $\overset{IP.1}{\boxed{\sum_{k=1}^{\bar{n}} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{\bar{n}+1}}}$ è VERA, dove $\bar{n}$ è un particolare $n \in \mathbb{N}$. (TH.1) $\boxed{\sum_{k=1}^{\bar{n}+1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{\bar{n}+2}}$. $\sum_{k=1}^{\bar{n}+1} \frac{1}{k(k+1)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\bar{n}} \frac{1}{k(k+1)}} + \frac{1}{(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)}$ (isolo l'ultimo addendo)

Per (IP.1) è $= 1 - \frac{1}{\bar{n}+1}$

$$1 - \frac{1}{\bar{n}+1} + \frac{1}{(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)} = \sum_{k=1}^{\bar{n}+1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{\cancel{\bar{n}+2}-1}{\cancel{(\bar{n}+1)}(\bar{n}+2)} = \boxed{1 - \frac{1}{\bar{n}+2}}$$

sono =

Vero la TH.1 $\Rightarrow$ Vera TH!

ASSIOMATICA DI Q. → Sono POSTULATI, veri in quanto validi.

Esistono due operazioni fondamentali: $+$ e $\cdot$, hanno la PROPR. che $\forall a, b \in Q$, ~~forma~~ $a+b \in Q \wedge a \cdot b \in Q$. Le leggi che consentono di operare in Q.

ASSIOMI:

1) "COMMUTATIVA" di somma e prodotto $\forall a, b \in Q \Rightarrow a+b = b+a \wedge ab = ba$

2) "ASSOCIATIVA" $\forall a, b, c \in Q \Rightarrow (a+b)+c = (b+c)+a \wedge (ab)c = (bc)a$

3) "DISTRIBUTIVA" $\forall a, b, c \in Q \Rightarrow (a+b)c = ac + b \cdot c$

4) $\exists a' \in Q / \forall a \in Q$ si ha $a + a' = a$ $[a' = 0]$ – esist. elemento NEUTRO rispetto alla somma ~~– esist. ell. risp. al PRODOTTO~~

$\exists a'' \in Q / \forall a \in Q$ si ha $a \cdot a'' = a$ $[a'' = 1]$ – elemento NEUTRO risp. al PR.

5) $\forall a \in Q \; \exists \bar{a} \in Q / a + \bar{a} = 0$ $[\bar{a} = -a]$ – esist. el. OPPOSTO

6) $\forall a \in Q \setminus \{0\}$ (meno) $\exists \bar{\bar{a}} \in Q / a \cdot \bar{\bar{a}} = 1$ – esist. el. INVERSO $[\bar{\bar{a}} = a^{-1}]$

(– Conseguenza di + e : conv. di $\cdot$). Assiomi che regolano operazioni tra numeri razionali (Continua a [4])

PROPRIETÀ: [I] grazie a 1) … 6), 0 e 1 sono UNICI.

[II] $\forall a \in Q \quad a \cdot 0 = 0$

[B] $\forall a, b \in Q \quad a \cdot (-b) = -ab$

[C] $\forall a \in Q \quad -(-a) = a$

---

ro Nodi

Dim.: $\forall n \geq 3, n \in N$ vale: $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{(k-1)!\,(k-2)}{k(k+2)} = \frac{n!}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{6}$ ← USCITO ALL'ESAME

ricorda: numero che si ottiene moltiplicando $n(n-1)(n-2) \ldots 1$ Ex: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ → $0! = 1$

verificare

– Per il valore + basso: $n = 3$ $\displaystyle\sum_{k=3}^{3} \frac{(k-1)!\,(k-2)}{k(k+2)} = \frac{(3-1)!\,(3-2)}{3(5)} = \frac{2!}{15} =$

$\boxed{\frac{2}{15}} =$ Sec. membro $\displaystyle\frac{6}{(3+1)(3+2)} - \frac{1}{6} = \frac{\cancel{6}\,3}{20_{10}} - \frac{1}{6} = \frac{9-5}{30} = \boxed{\frac{2}{15}}$ 1 IP. VERIFICATA

L'uguaglianza è vera per $\bar{n}$ $\displaystyle\sum_{k=3}^{\bar{n}} \frac{(k-1)!\,(k-2)}{k(k+2)} = \frac{\bar{n}!}{(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)} - \frac{1}{6}$

TH: $\displaystyle\sum_{k=3}^{\bar{n}+1} \frac{(k-1)!\,(k-2)}{k(k+2)} = \frac{(\bar{n}+1)!}{(\bar{n}+2)(\bar{n}+3)} - \frac{1}{6}$.

(→)

$$\sum_{k=3}^{\bar{n}+1} \frac{(k-1)!(k-2)}{k(k+2)} =$$ [Considero i primi addendi e isolo l'ultimo] $$= \sum_{k=3}^{\bar{n}} \frac{(k-1)!(k-2)}{k(k+2)} + \frac{\bar{n}!(\bar{n}-1)}{(\bar{n}+1)(\bar{n}+3)} =$$

[Scritto così per sfruttare P1]

$$\frac{\bar{n}!}{(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)} - \frac{1}{6} + \frac{\bar{n}!(\bar{n}-1)}{(\bar{n}+1)(\bar{n}+3)} = \frac{\bar{n}!}{(\bar{n}+1)}\left(\frac{1}{(\bar{n}+2)} + \frac{(\bar{n}-1)}{(\bar{n}+3)}\right) - \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{\bar{n}!}{\cancel{(\bar{n}+1)}} \cdot \frac{(\bar{n}+3) + \overbrace{(\bar{n}+2)(\bar{n}-1)}^{\bar{n}^2+\bar{n}-2 \to (\bar{n}+1)^{\cancel{2}}}}{(\bar{n}+2)(\bar{n}+3)} - \frac{1}{6} = \frac{\bar{n}!(\bar{n}+1)}{(\bar{n}+2)(\bar{n}+3)} - \frac{1}{6} =$$

$$\boxed{\frac{(n+1)!}{(\bar{n}+2)(\bar{n}+3)} - \frac{1}{6}}$$

//

INSIEME NUMERI REALI

[deve def. prima i numeri irrazionali : METODO DI DEDEKIND :

Prende $\mathbb{Q}$; $A, B \overset{\text{sottoinsiemi di}}{\subset} \mathbb{Q}$ / $A \cup B = \mathbb{Q}$, [alcuni el. molto in A altri in B].

[gli el. godono della proprietà]. $\forall (a, b) \in A \times B$ ~~ha~~ $a \overset{\text{strettamente minore}}{<} b$ (i numeri in A sono tutti + piccoli di quelli in B)

Cap [3] - ASSIOMI DELL'ORDINE

$\mathbb{Q}^+$: ins. RAZIONALI POSITIVI. Se $a \in \mathbb{Q}^+$, $a > 0$. $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ si $a > b$

$a - b \in \mathbb{Q}^+$ — $a - b > 0$

7) $\forall a, b \in \mathbb{Q}^+$, $a + b$ e $a \cdot b \in \mathbb{Q}^+$

8) $\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}^+ \vee -a \in \mathbb{Q}^+$

9) $0 \notin \mathbb{Q}^+$

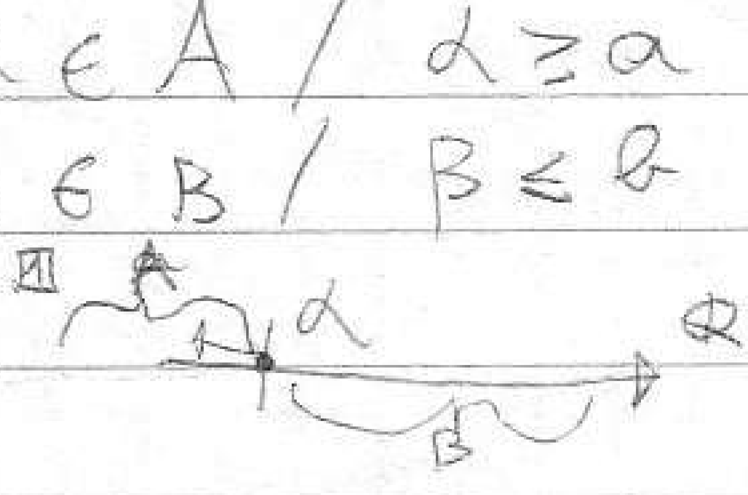
A: $\overset{\text{sin. insieme}}{\text{classe}}$ minorante, B = classe maggiorante [ott. effettuando una SEPARAZIONE di $\mathbb{Q}$]

CASI: (ottenuti dopo separazione)

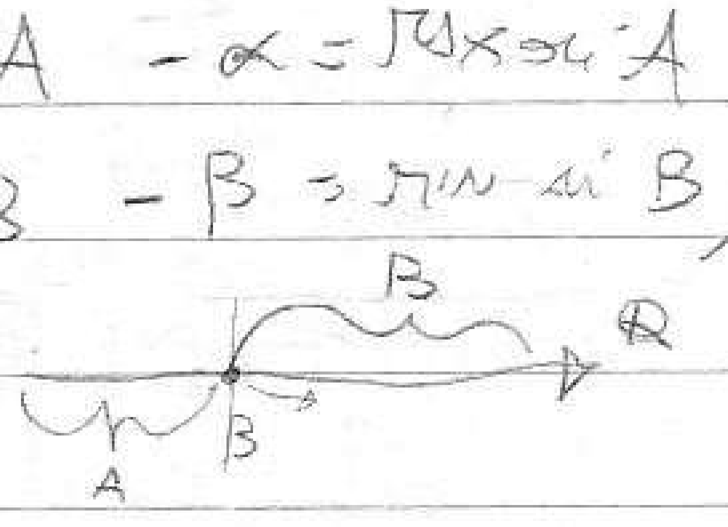
1] $\exists \alpha \in A \,/\, \alpha \geq a \quad \forall a \in A$ − α = MAX di A, elemento di SEPARAZIONE

2] $\exists \beta \in B \,/\, \beta \leq b \quad \forall b \in B$ − β = MIN di B, " " "

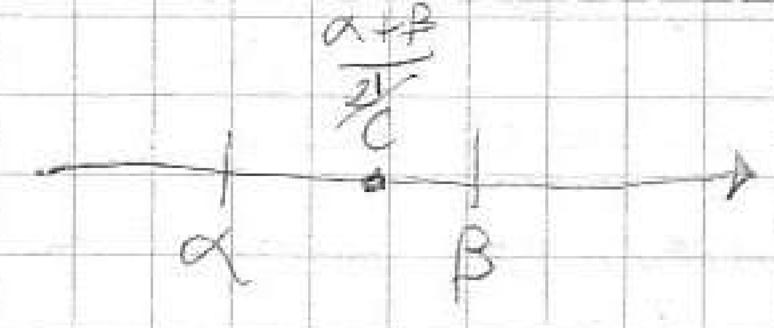
3] Ex: [1]



[2]



$\exists\ \alpha \in A$ e $\beta \in B \mid \begin{matrix} \alpha = \max A \\ \beta = \min B \end{matrix}$? Dim:

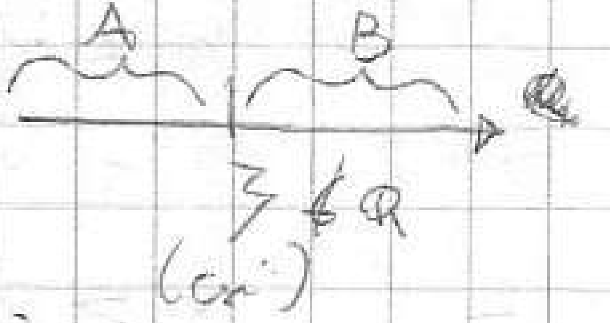


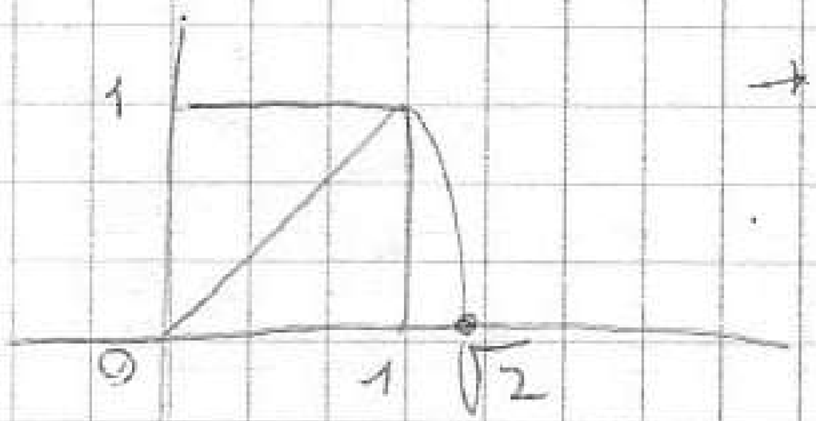
$\underline{\alpha < \beta}$. Supponiamo che $\exists\ c \in \mathbb{Q}$ dove $\alpha < c < \beta$, ma non potrebbe appartenere né ad A e né a B

$\Downarrow$

Caso 3] NON è VALIDO

4] $\nexists\ \alpha = \max A,\ \beta = \min B$ → si introducono gli IRRAZIONALI; la separazione di $\mathbb{Q}$ è fatta da un elemento $\notin \mathbb{Q}$:





→ (origine delle $\exists$ di altri numeri oltre a $\mathbb{Q}$)

$\Downarrow$

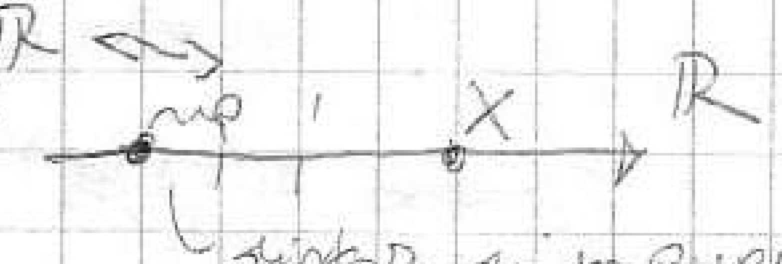
Def. N. IRRAZ.: è elemento di separazione tra due classi separate di $\mathbb{Q}$ che non ammettono rispett. NÉ MAX, NÉ MIN.

$\mathbb{I}$ (facendo variare in tutti i modi possibili le separazioni di $\mathbb{Q}$)

[IRRAZIONALI]

, $\boxed{\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}}$

Un numero $x \in \mathbb{R}$ si può rappr. sulla retta:

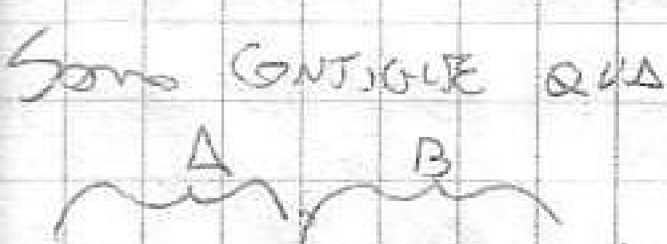


(corrispondenza BIUNIVOCA tra un qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ rappresentabile sulla retta E il suo numero $\in \mathbb{R}$ che lo rappresenta numericamente (distanza da O))

$\Leftrightarrow$

Siano A e B classi separate di $\mathbb{Q}$, allora A e B sono classi <u>CONTIGUE</u>

Sono CONTIGUE QUANDO: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ a \in A \wedge b \in B \ / \ b - a < \varepsilon$, cioè:



(tra A e B NON c'È un segmento che le separa)

$\Downarrow$

Se considero un segmento (INTERVALLO) nell'asse, all'interno cadono $\infty^{ne}\ \mathbb{Q}$ e $\infty^{ne}\ \mathbb{I}$

[$\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme DENSO di $\mathbb{R}$]

(⟶)

7/10/2004

SOTTOINSIEMI DEI NUMERI $\mathbb{R}$

$A \subset \mathbb{R}$ Ex. di INTERVALLI → ① $(a, b) = \{\cancel{x} \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$

$a, b \in \mathbb{R} \,/\, a < b$ [fisso due num. R a e b, dove a è stretto. < di b]

(Questo è un int. APERTO)

② $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \; b\}$ - int. chiuso a sin, aperto a destra

③ $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$ - " " " dex, " " sin.

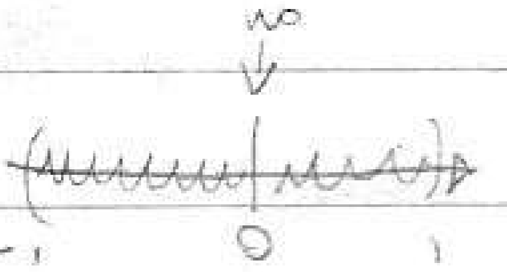
④ $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$ - " " " " e a sin ⇒ INT. CHIUSO

⑤ $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\}$ (semiretta)

⑥ $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq a\}$

⑦ $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < b\}$

⑧ $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq b\}$

Ex: $A = (-1, 0) \cup (0, 1)$ → Sto considerando questi punti: 

. Lo 0 NON $\in$ in INTERV

MASSIMO DI UN INSIEME

Cons. $A \subset \mathbb{R}$

1) $M \in \mathbb{R}$ si dice MAGGIORANTE di A se $M \geq x \; \forall x \in A$

(se è + grande di tutti gli el. $\in A$) - sono ∞

Ex: $A = (-1, 5)$ $M = 7$ o 5

2) $m \in \mathbb{R}$ si dice MINORANTE di A se $m \leq x \; \forall x \in A$

(se è + piccolo di tutti gli el. $\in A$) - sono ∞

[SOTTOINSIEME LIMITATO: A si dice limitato:

- SUPERIORMENTE: se $\exists$ un suo maggiorante (M) Ex: $(1, 5)$ è lim sup.; $(1, +\infty)$ NON È LIM. SUP., perché ~~no~~ $\nexists$ nessun $K \in \mathbb{R}$ che è maggiorante ⇒ è ILLIMITATO SUP.
- INFERIORMENTE: se $\exists$ un suo minorante (m). Ex: $(1, 5)$ è lim. inf., $(1, +\infty)$ è lim. inf. $(-\infty, 1)$ è ILLIMIT. INF.

deve ovviamente essere LIM. SUP.

- $M \in \mathbb{R}$ si dice MASSIMO di A (o MAX ASSOLUTO) se
  1/ M è un MAGGIORANTE di A ; 2/ $M \in A$
- $m \in \mathbb{R}$ si dice MINIMO di A (o MIN ASSOLUTO) se:
  1/ m è un MINORANTE di A ; 2/ $m \in A$

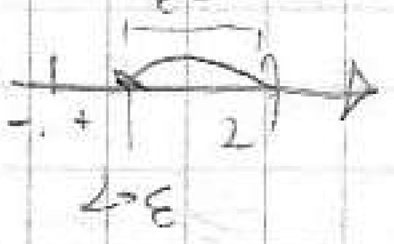
(→)

- Ex: $I = [0,2]$ $\quad 2 = \max I$? $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ è } \geq x, \ \forall x \in I \\ 2 \in I \end{array} \right\} \Rightarrow$ VERO

(idem così per 0 min)

- Ex: $I = [0,2)$ $\quad 2$ è $\max I$! - ~~no~~ sarebbe $1,\overline{9}$ $\quad \boxed{1,\overline{9} = 2}$?

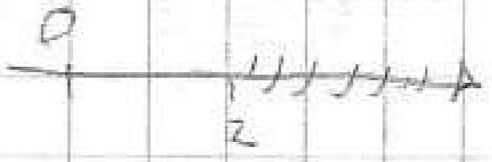
Dovrei spostarmi a sx dell'intervallo



Comunque spostandosi a sinistra di dx: $2-\varepsilon \in I$, ma tra $2-\varepsilon$ e 2 cadono ∞ numeri, e non può esserci un max dell'insieme. $\Rightarrow$ in questo int. aperto a destra non ∃ max.

Ex: $I = (0,2]$ non ammette minimo

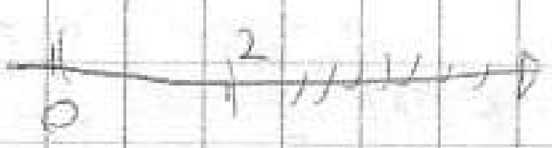
- $I = [0,2)$ Il ruolo di 2 è particolare rispetto agli altri magg. ∞ (e' il + piccolo) → ESTREMO SUPERIORE



È un num. $\in \mathbb{R}$ il numero + piccolo di tutti gli ∞ M.

In $[0,2]$ anche 2 è l'est. Se un insieme ha un max, esso sarà estr. SUPERIORE (ma non è vero il contrario)

Ex: $I = (0,2]$



0 non è un minimo ma è l'estr. INFERIORE

Possono esistere 2 max per 1 ins.? Se $\exists\ M, M'$ max A, $M \leq M'$ ma anche $M' \leq M \Rightarrow M = M'$, cioè ne esiste solo uno. (idem per minimo ed estremi f. sono li numeri unici)

Sia [14] (assioma sui numeri $\mathbb{R}$)

10) Sia $A \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente e $A \neq \emptyset$ [insieme vuoto] (non), allora $\exists$ sup A (estr. superiore);
se è lim. inferiormente e $A \neq \emptyset$, allora $\exists$ inf A

Assioma non vale tra i num. $\in \mathbb{Q}$. Cons. $A \subset \mathbb{Q}$. $A = \{ x \in \mathbb{Q} / x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{N} \}$. $2 \in A$ ed è l'elemento più piccolo dell'insieme [minimo], ma non ammette né max e né sup. (

punti convergono verso e e + e rappresenta nell'ambito dei reali - il sup. di A) $\Rightarrow$ ho ottenuto nuove per l' IRRAZIONALI) (nei numeri $\mathbb{R}$ c'è un assioma in più di $\boxed{\mathbb{R}}$ n, $\frac{1}{5}$ ~~[illegible]~~ $0,\overline{3}$

\> Prendiamo $A \subset \mathbb{R}$ e supponiamo che $\exists$ sup A e $A \neq \emptyset$. [sup $A = \Lambda$ (lambda maiusc.)]

Definiamo rigorosamente Λ:

- Λ = sup. A se:

1) $\Lambda \geq x \quad \forall x \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x \in A \ /$ ~~[illegible]~~ $\Lambda - \varepsilon < x$

Ex: $I = [0,2)$

$\Lambda = 2$. Verifichiamo le cond.:

1: $2 \geq x \ \forall x \in I$ ~~A~~ Vero per def. di INTERVALLO

2: Fisso un $\varepsilon > 0$, prendo $2 - \varepsilon$; esistono ∞ PUNTI $\Rightarrow$ VERIFICATO (se prendo 3,

$3 - \varepsilon > 2 \Rightarrow$ ~~3~~ 3 non ver.

\> $A \subset \mathbb{R}$ lim. inf. e $A \neq \emptyset$

Def. rig. λ:

- λ = INF A se:

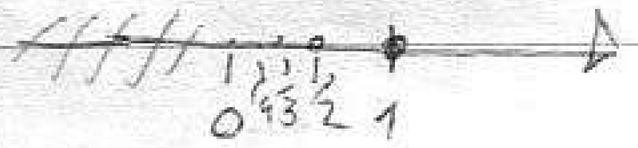
1) $\lambda \leq x \quad \forall x \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \ / \ \lambda + \varepsilon > x$

$\lambda + \varepsilon$ è + grande del minorante

Ex: $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x = \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N} \right\}$

[insieme DISCRETO con dei BUCHI]



$0 \notin A$; $1 \in A$; $\frac{1}{2} \in A$ ... Aumenta N e ci si porta verso 0 (succ. DECR.)

$\Rightarrow \subset (0,1]$

max $A = 1$ $\qquad$ min $A = \nexists$

$\Lambda = 1$ $\qquad$ $\boxed{\lambda = 0}$ + $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \ / \ 0 + \varepsilon > x$

$x < \frac{1}{n}$

$\xrightarrow{\text{e.s.}} \exists n \in \mathbb{N} \ / \ \boxed{\varepsilon > \frac{1}{n}}$

$\Updownarrow$

$n > \frac{1}{\varepsilon}$

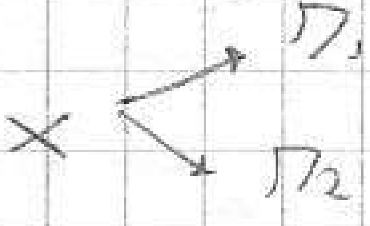
Posso sempre trovare un $n > 1/\varepsilon$

12/10/2004

FUNZIONE Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$; si vuole relazionare gli el $\in A$ con el $\in B$ →

FUNZIONE REALE ~~di~~ di una VARIABILE REALE, è una relazione che associa a ciascun elemento di A (partenza) 1 ed 1 solo elemento di B (arrivo) ⇒ devo considerare TUTTI gli el $\in A$ ∧ devo al più associare 1 EL. dell secondo B

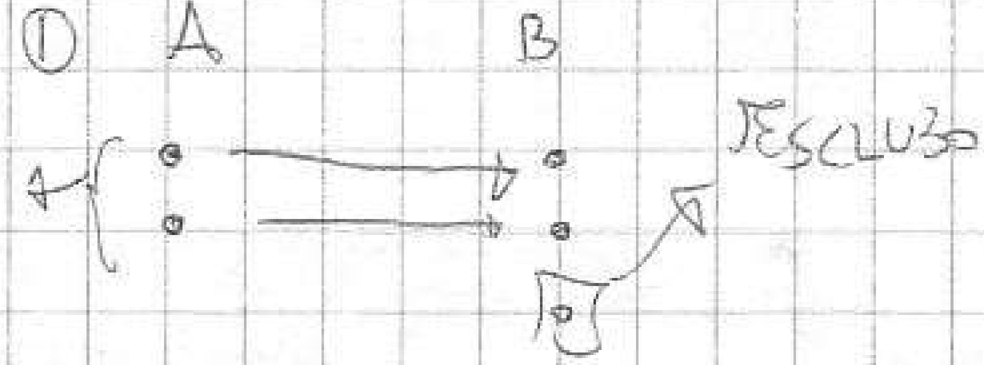
gli elementi di B non NECESS. devono essere

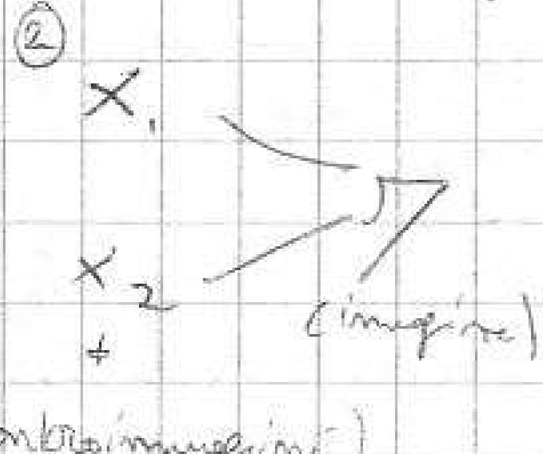


NON PUO' ACCADERE

interessante: Ex

c'è una f(x) ∀ {





PUO' ACCADERE

$f : A \longrightarrow B$ VAR. DIPEND. o IMMAGINE DI x TRAMITE LA FUNZIONE F

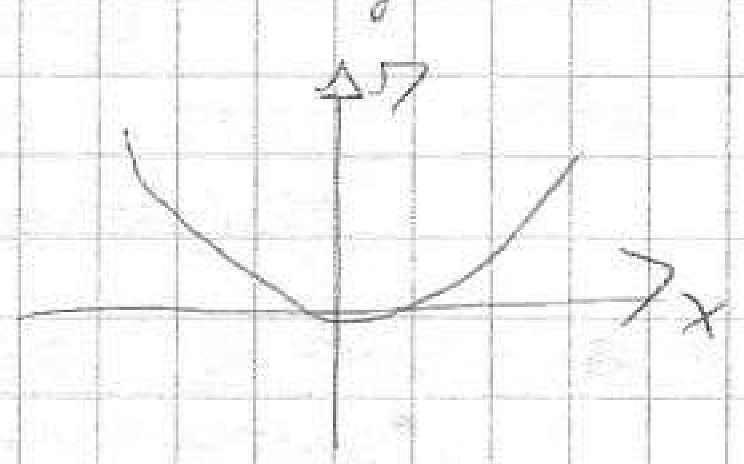
VAR. INDIPEND. $\forall \boxed{x} \longrightarrow f(x) = \boxed{y}$

↓

- FUNZIONE SURIETTIVA: tutte le B sono immagini di A (non è ①)

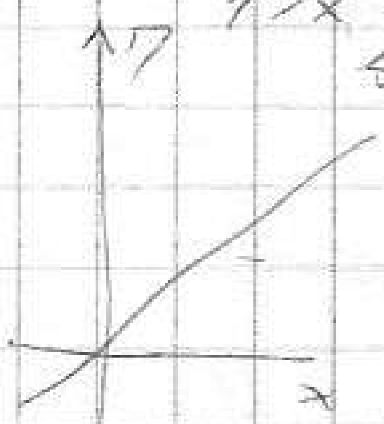
Ex: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longrightarrow y = f(x) = x^2$



→ non è SURIET. (i valori $y < 0$ non sono coinvolti)

$y = x$ è SUR.



Ex: $f : \mathbb{R} \to \overbrace{\mathbb{R}^+ \cup \{0\}}^{\text{CODOMINIO}} = C$,

$x \to f(x) = x^2 \geq 0$

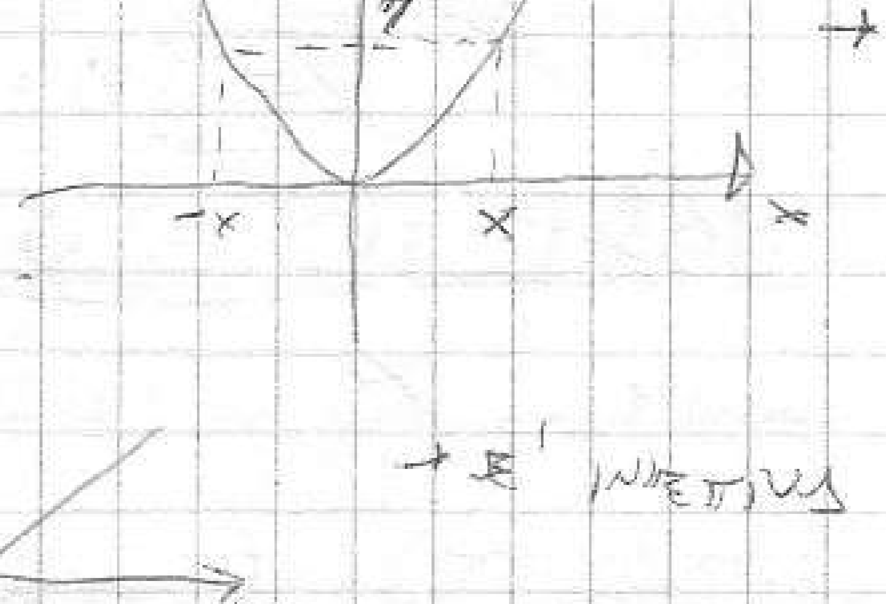
→ È SURIETTIVA (restringo l'insieme di arrivo ai n. strett. + compreso lo 0)

C è il sottoins. di B, quei elementi sono immagini dell'ins. di partenza (DOMINIO)

- FUNZIONE INIETTIVA: a 2 elementi distinti del dominio CORRISPONDE 1 coppia di imm. distinte (non è ②)

Ex: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

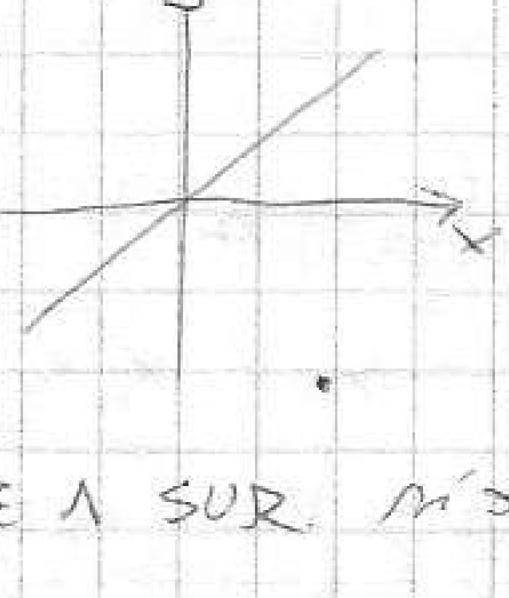
$x \to f(x) = x^2 \geq 0$



→ NON È INIETTIVA

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = x$



→ È INIETTIVA

insieme di f(x).

- insieme delle f(x) INIETTIVE ∧ SUR. si dice ∨ BIUNIVOCHE ∨ BIETTIVE

$f : D \longrightarrow C$ Biettiva. Da questa si può costruire la FUNZIONE INVERSA

$f^{-1} : C \longrightarrow D$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = C$

$x \to y = f(x) = x^2 \geq 0$

~~Quest~~ Una $f(x)$ e' INVERTIBILE se e' INIETTIVA (la $f(x)$ e' già per se SUR. $\Rightarrow f(x)$ e' BIETTIVA)

↓

x non sarà iniettiva

~~Se~~ Considero un sottoinsieme di Dominio di $f(x)$ [RESTRIZIONE] affinché si recuperi l'invertibilità (ex: $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; $x \to g(x) = x^2 = y$) - g e' RESTRIZIONE DI f

↓

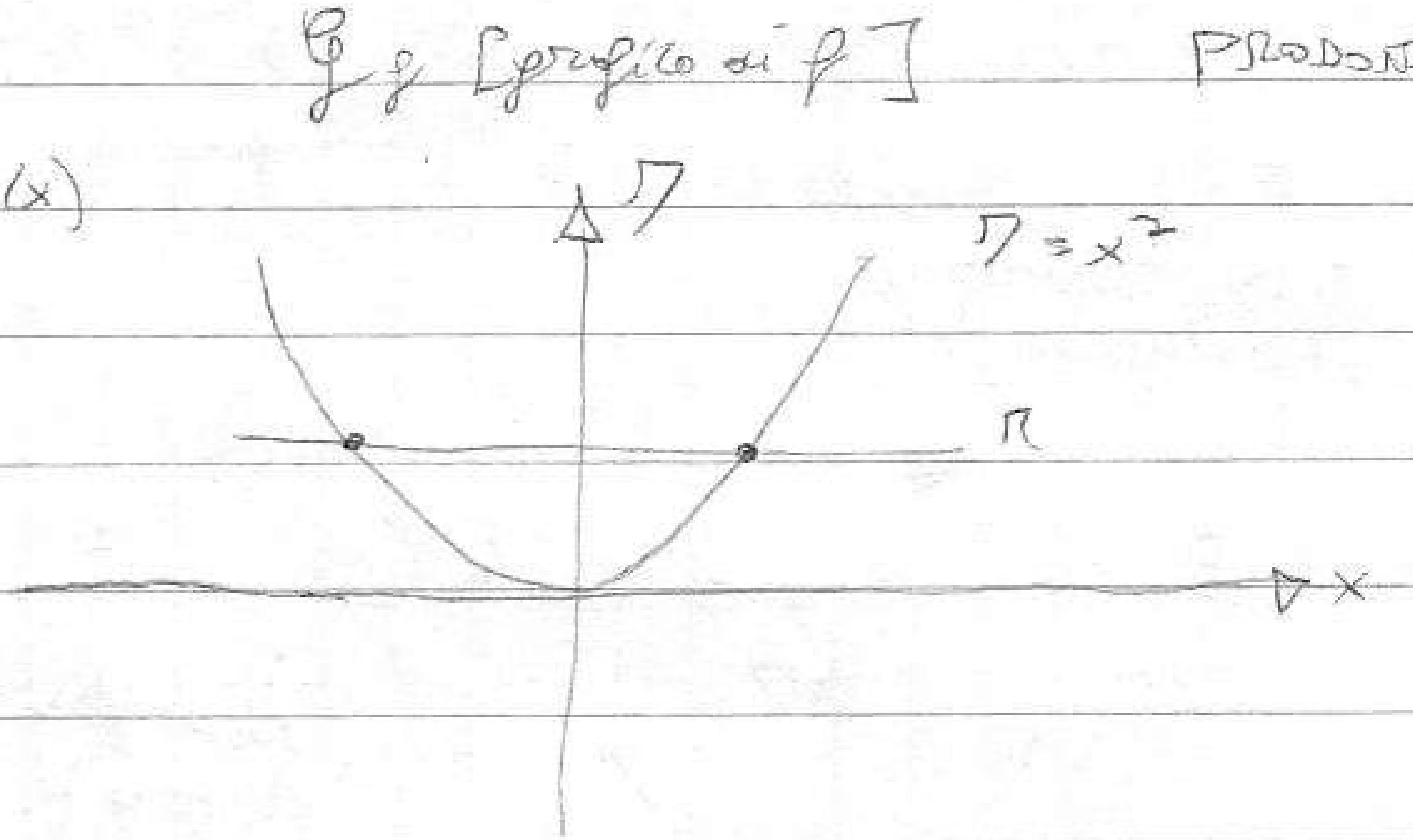
$g^{-1} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; $y \to g^{-1}(y) = x = \sqrt{y}$

Ex: $\sqrt{4} = ②$ → x def. $[\sqrt{x^2} = |x|]$
~~± 2~~ NO!

$f : D \to C$

$x \to y = f(x)$

G_f [grafico di f]



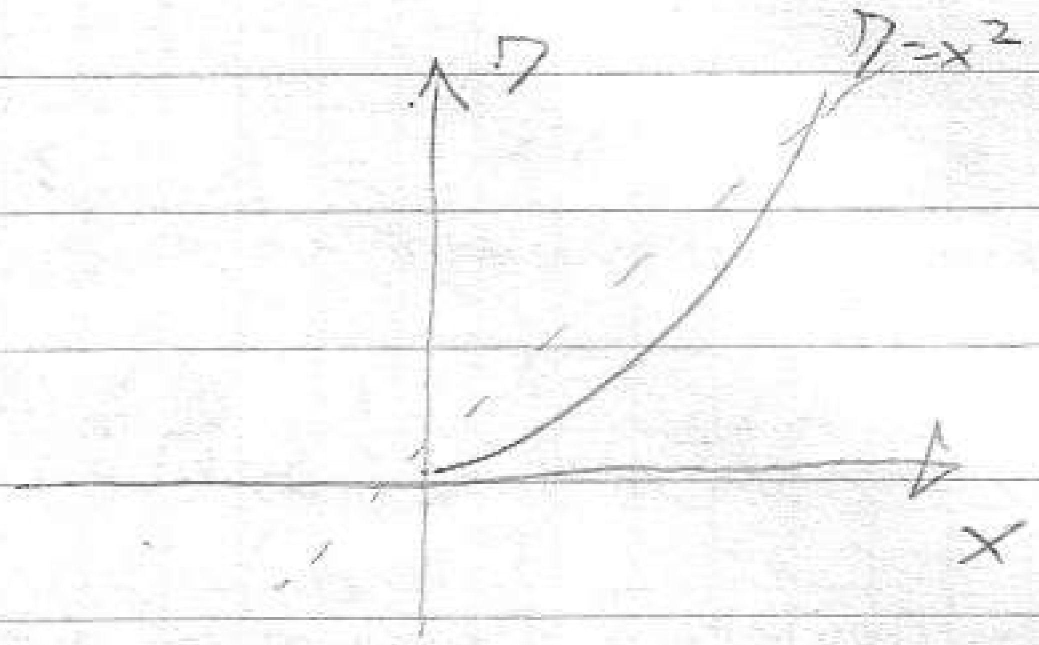
PRODOTTO CARTESIANO $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) / a, b \in \mathbb{R}\}$

↓

G_f e' un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

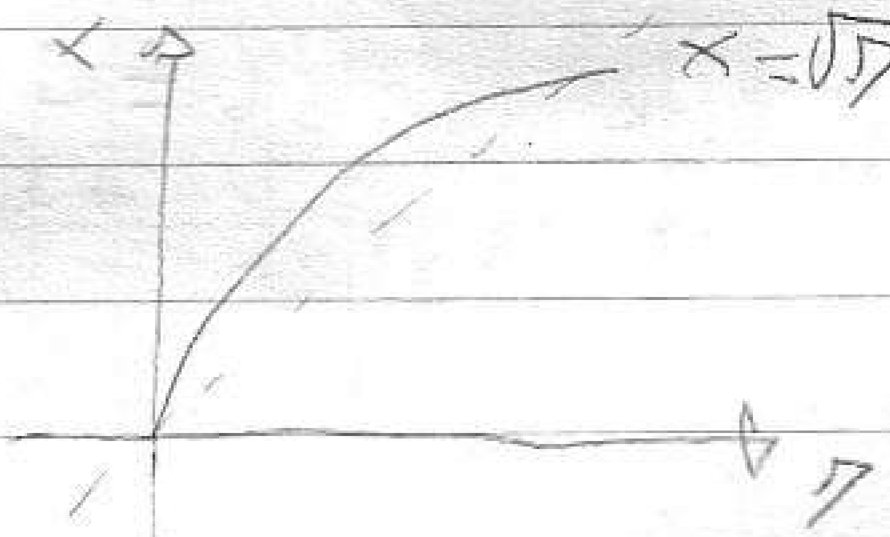
$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in D, y = f(x)\}$

Si traccia la r // a x e conta le intersezioni: se sono ≥ 2 f(x) NON E' INIETTIVA

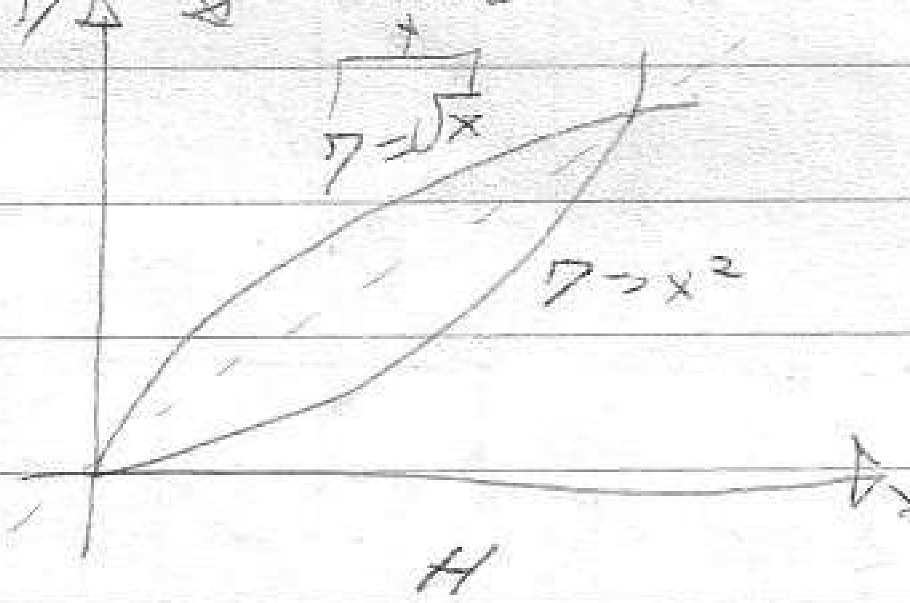


INVERSA:

(a destra)



(simmetrica risp. all'asse di bisettrice)



(la VAR DIP diventa IND e viceversa)

↓

ma posso continuare a chiamarli y e x

FUNZIONI MONOTONE:

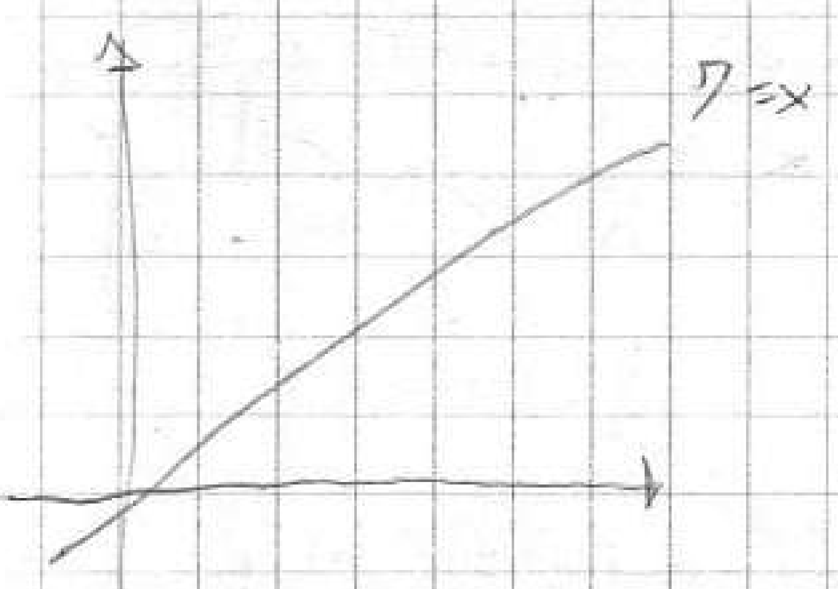
1 $f : D \to C$ si dice CRESCENTE (strett. cresc.) se $\forall\ x_1, x_2 \in D / x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$

2 $f : D \to C$ " " DECRESCENTE (" " ") se $\forall\ x_1, x_2 \in D / x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) > f(x_2)$

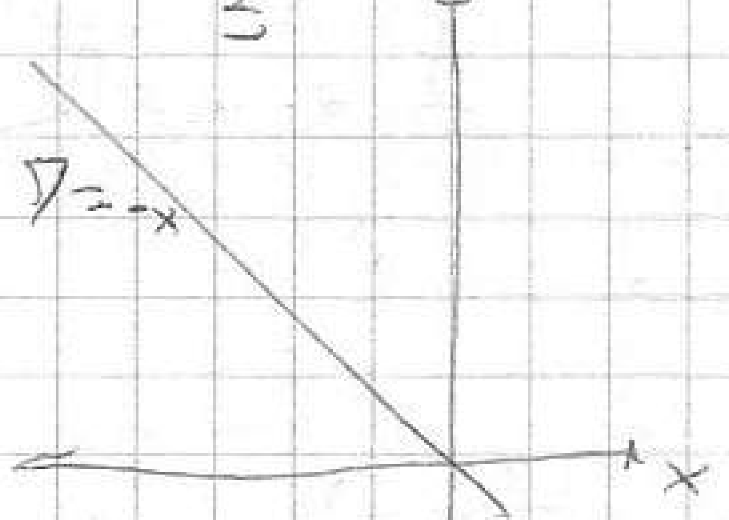
3 $f : D \to C$ " " NON " (o DEBOLMENTE CRESCENTI) se $\forall\ x_1, x_2 \in D / x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$

4 $f : D \to C$ " " " CRESCENTI (" " DECR.) se $\forall\ x_1, x_2 \in D / x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$

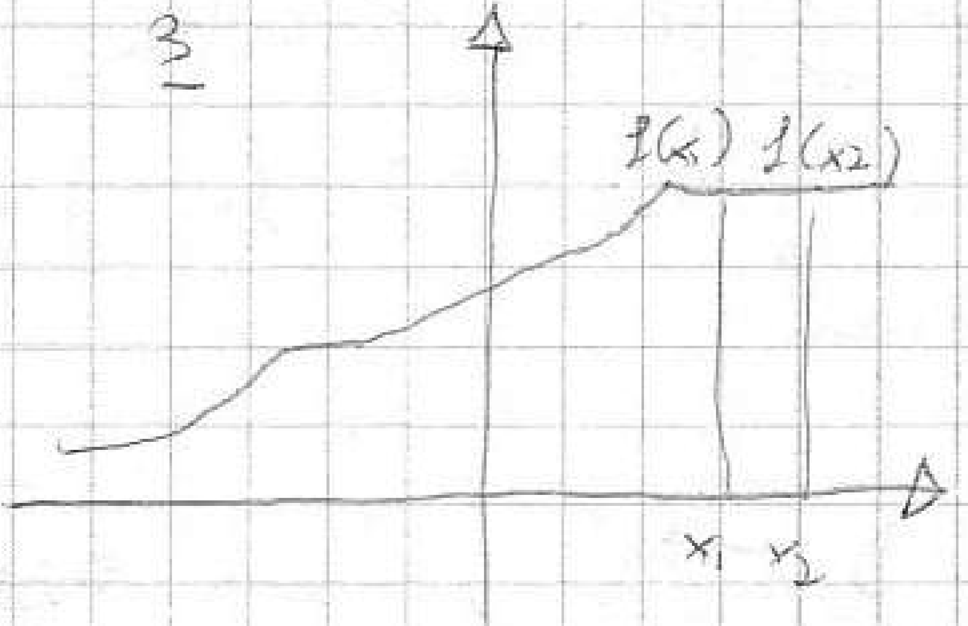
1



2



3



Teorema: Sia $f: D \to C$ strett. monotona (in $A \subseteq D$) + se lo escludo considera tutto il dominio

Allora f è INIETTIVA, quindi invertibile.

TH

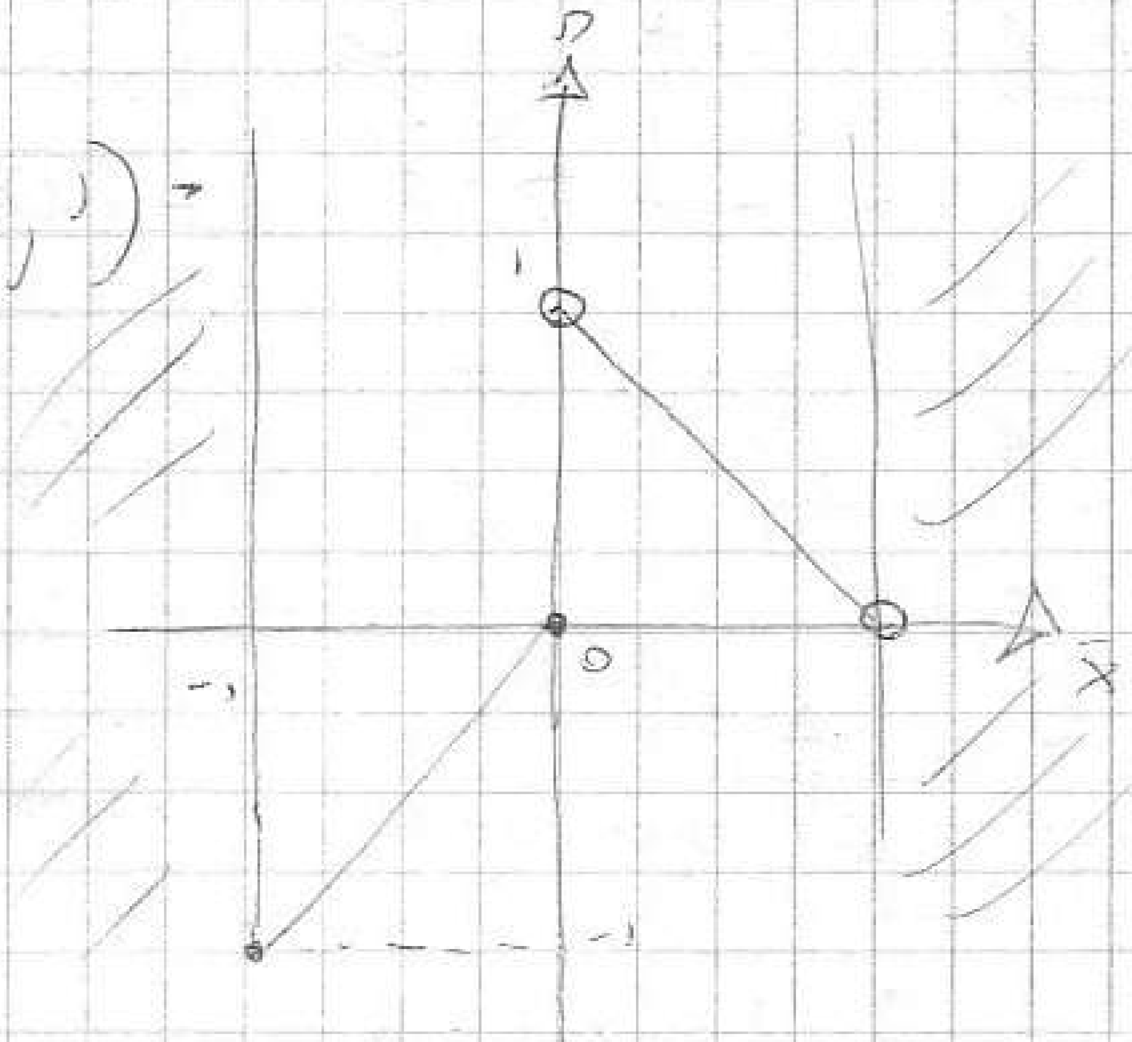
Dim: $\left[\forall x_1, x_2 \in D \mid x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\right]$: In $\underline{1}$ e in 3 inverso, essendo

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Es.: $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [-1, 0] \\ 1 - x & \text{se } x \in \boxed{(0, 1)} \end{cases}$ $\quad D = [-1, 1)$

Se era $[0, 1]$ non era iniettiva

Se era $[0, 1)$ non era una $f(x)$ ma una relazione



Questa $f(x)$ è invertibile ma non monotona

4

$D \to C$ $\quad M \in \mathbb{R}$ è maggiorante di f se M è maggiorante di C

- M magg. di f se $\forall x \in D$, $\overbrace{f(x)}^{C}$ $\leq M$ | $f(x)$ è LIMIT. SUP. se $\exists\ M$
- m minorante di f se $\forall x \in D$, $f(x) \geq m$ | $f(x)$ è " inf se $\exists\ m$

ASSOLUTO

Esiste il max $f(x) = M$ ($\overset{\text{con}}{x} \in D$) se M è magg. di C e $M \in f(A)$ cioè

$\exists\ \bar{x} \in D \ / \ f(\bar{x}) = M \wedge f(x) \leq M \quad \forall x \in D$. ($\bar{x}$ è PUNTO DI MASSIMO)

Min ass. di min $f(x) = m$ ($\overset{\text{con}}{x} \in D$) se m è minor. di C e $m \in f(X)$ cioè

$\exists\ \bar{x} \in D \ / \ f(\bar{x}) = m \wedge f(x) \geq m \quad \forall x \in D$ ($\bar{x}$ è PUNTO DI MINIMO)

- sup. $f(x)$ con $x \in D$ se:

1) $f(x) \leq \Lambda \quad \forall x \in D$; 2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x \in D \ / \ \Lambda - \varepsilon < f(x)$

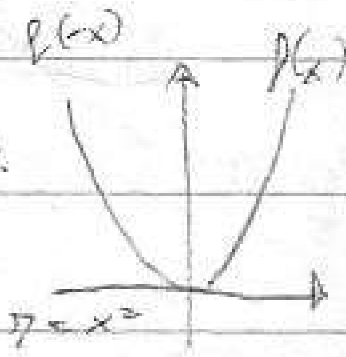
= inf $f(x)$ con $x \in D$ se:

es: $f: \mathbb{N} \to C \subset \mathbb{R}$

$n \to y = f(n) = \frac{1}{n}$ $\quad A\left\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

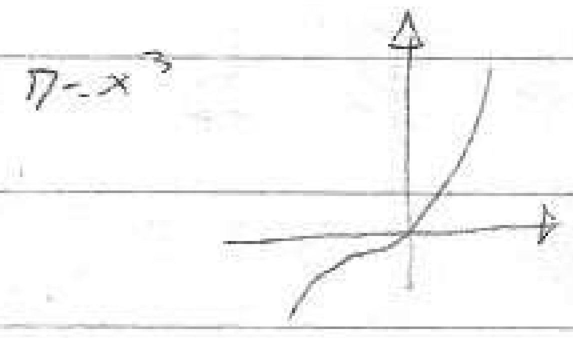
13/10/2004

$f: D \to C$ si dice PARI se $\forall x \in D$ si ha $f(-x) = f(x)$ Ex:



(simmetria rispetto all' ~~origine~~ asse)

si dice DISPARI se $\forall x \in D$ si ha $f(-x) = -f(x)$ Ex:



(simmetria rispetto all' origine)

Ex: $f(x) = x^3 + 1$ → né pari né dispari

[SUCCESSIONI NUMERICHE]: è una particolare funzione:

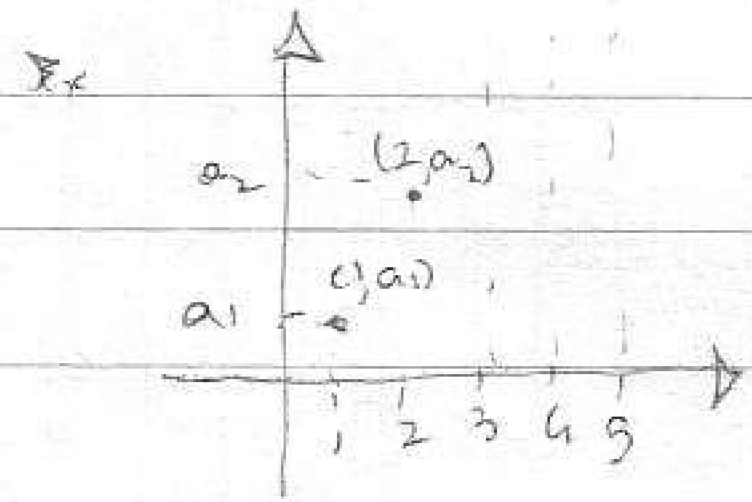
$f: \overline{\mathbb{N}} \to C \subset \mathbb{R}$ (con categoria di $f(s)$ e cui dominio è comp. da $n \in \mathbb{N}$)

$n \to y = f(n) = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\overset{f(1)}{a_1}, \overset{f(2)}{a_2}, \overset{f(3)}{a_3}, \dots, \overset{f(n)}{a_n}\}$ insieme numerabile di ∞ punti.

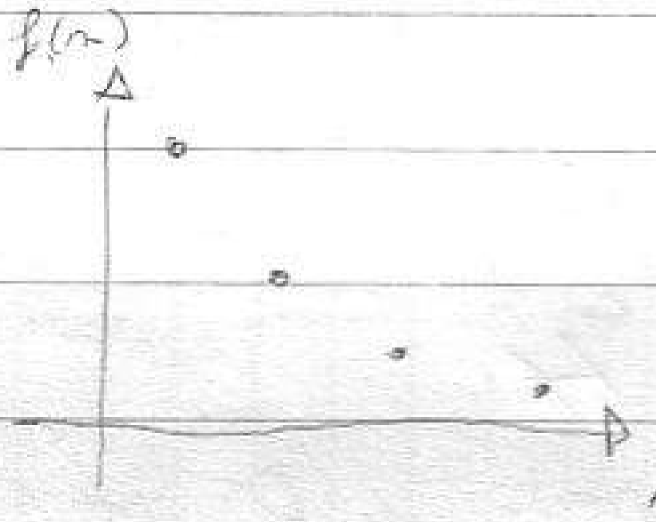
codominio: ins. immagini naturali

Ex: $f(n) = \frac{1}{n}$ allora $\{a_n\}$ $a_n = \frac{1}{n}$ $= \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ → INSIEME SUCCESSIONE

È un sottoins. discreto!



mentre $\frac{1}{n} =$

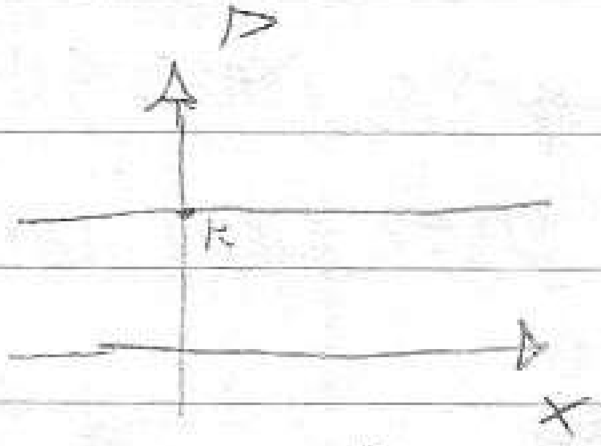


FUNZIONI ELEMENTARI

- Costante: $k \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \to \{k\}$

$x \to y = k$

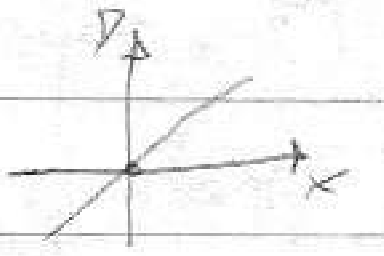


(unico caso di coincidenza loro min e max)

- NON DECR. è monotona NON CRESC.
- NON INIETTIVA

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (retta)

$x \to y = f(x) = x$



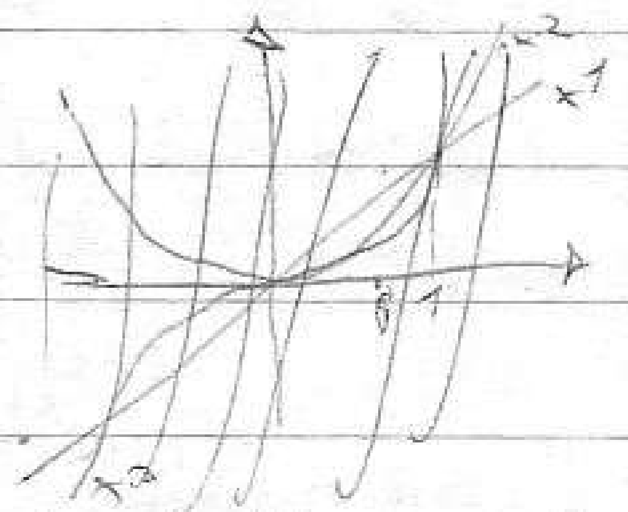
- Non è limitata
- È DISPARI
- INIETTIVA e INVERTIBILE
- STRETT.^te CRESCENTE

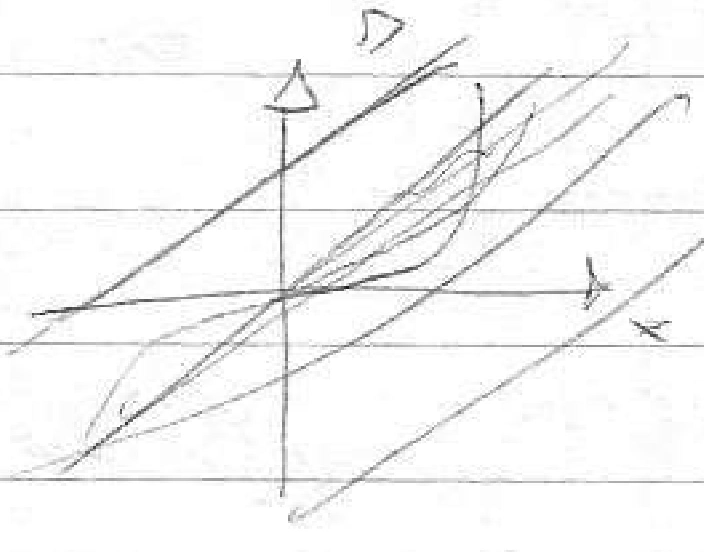
- n dispari, $n \in \mathbb{N}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to y = f(x) = x^n$ (n e Pi numeri)

Conf. x^3 e x^9: $x^3 > x^9$ se $0 < x < 1$





, $x^3 < x^9$ se $x > 1$

$(\longrightarrow)$

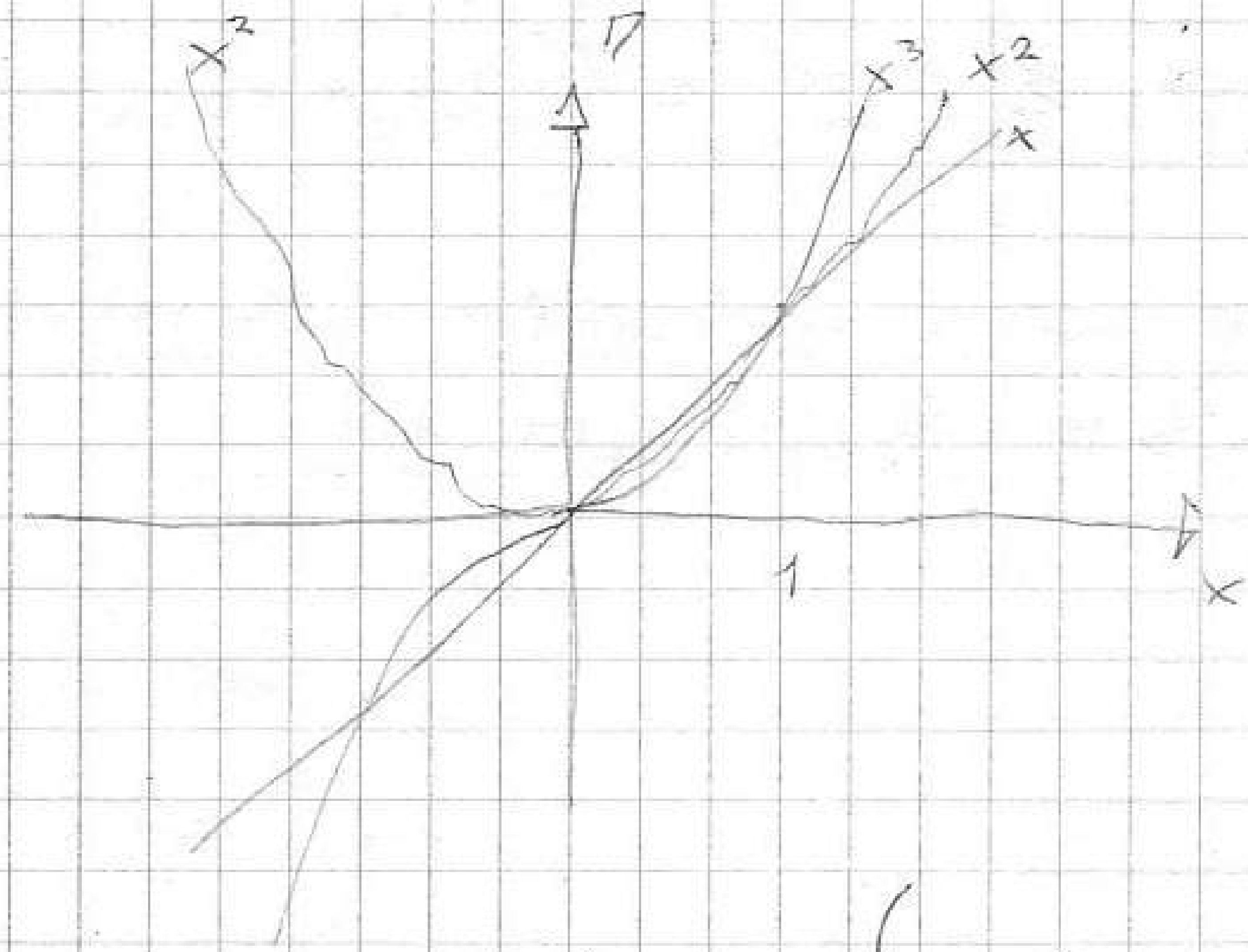
(Crescono f(x) crescente illimitate)

- in n PARI

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$x \to y = f(x) = x^n$

(x^2 non tra x e x^3)



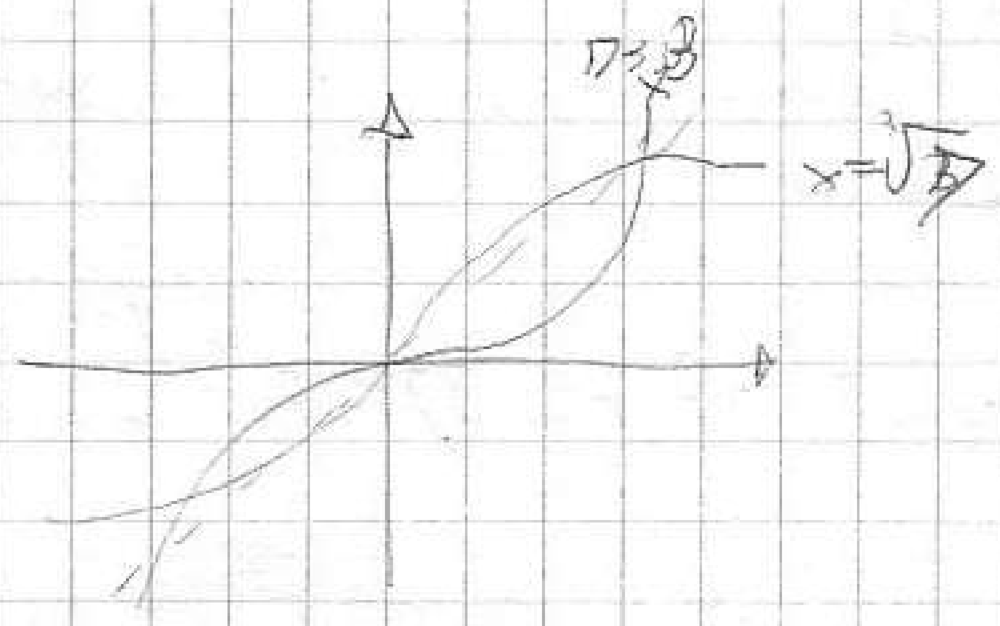
~~$x^2 \leq$~~ $[n, m \in \mathbb{N}]$

- $x^n < x^m$ se $n < m$ e $x > 1$
- $x^n > x^m$ se $n < m$ e $0 < x < 1$

(solo nel caso del restrizione $x \in \mathbb{R}^+$)

Ex: $y = x^3$ L'inversa è $x = \sqrt[3]{y}$

(con x^n dato n pari non si invertono)



$f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ | $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$x \to y = x^n$ | $y \to \boxed{x = \sqrt[n]{y}} \to y \geq 0$

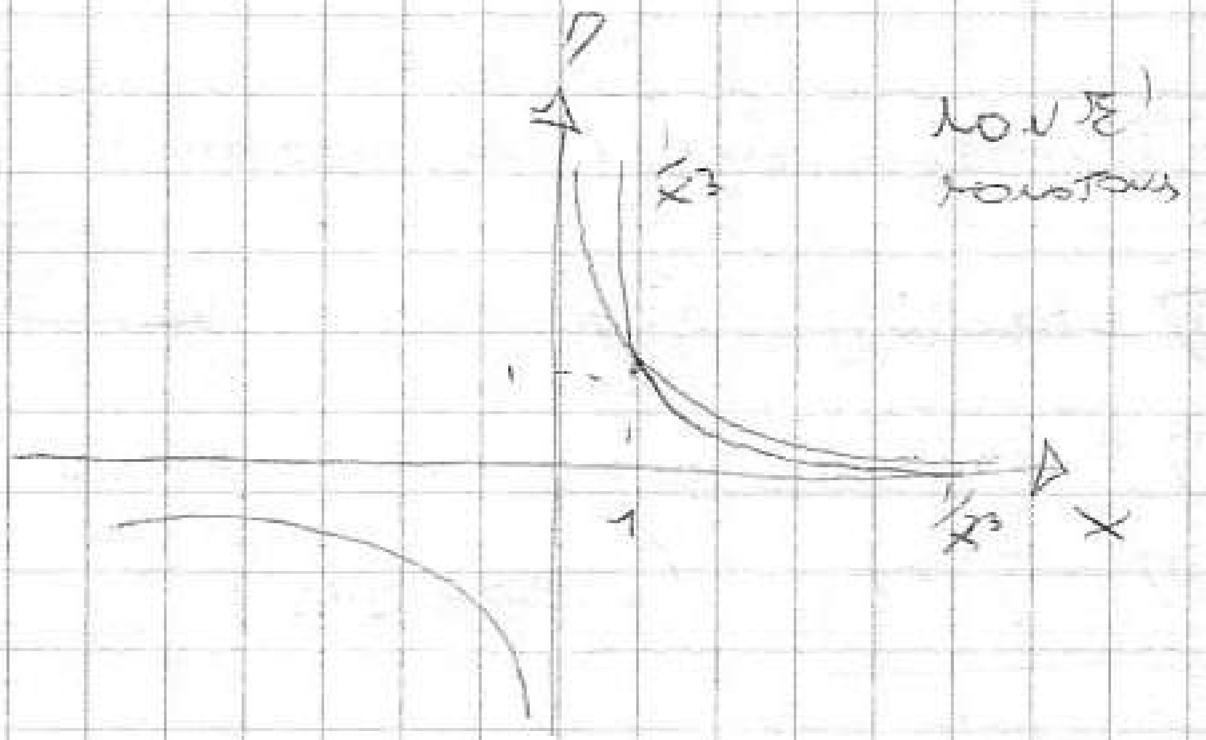
~~$m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$~~ $n \in \mathbb{N}$ dispari

$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Ex $\frac{1}{x}$

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

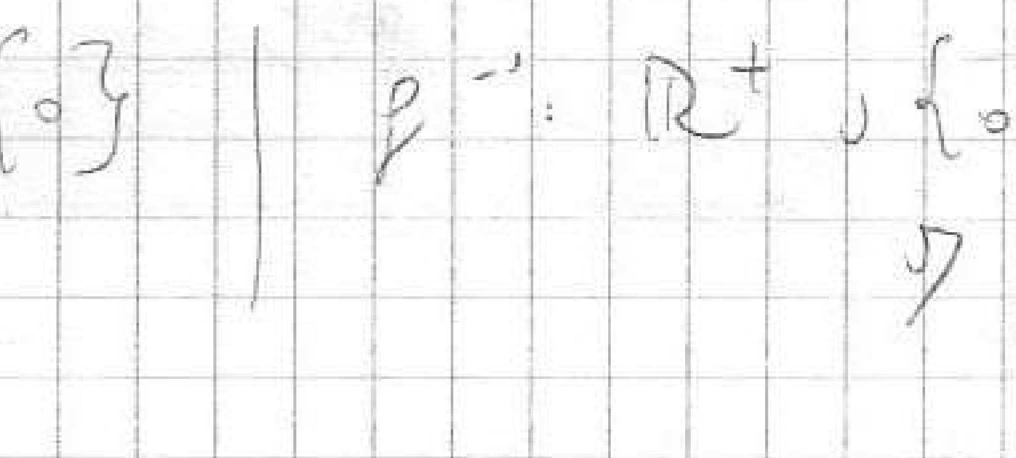
Inverso: $x = \frac{1}{y}$; $x = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$



n pari

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$

$x \to y = \frac{1}{x^n}$



$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$y \to x = y^{-\frac{1}{2}}$

È PARI, estr. inf: 0

non invertibile. Solo con restrizione

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$x \to y = \frac{1}{x^2}$

• POLINOMIO DI GRADO N

son tutti ∈ ℝ

$$P_n(x) \text{ è } \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \boxed{a_0} + \boxed{a_1} x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \quad [\text{con } a_n \neq 0]$$

(in generale non si può stabilire nulla) → PERÒ:

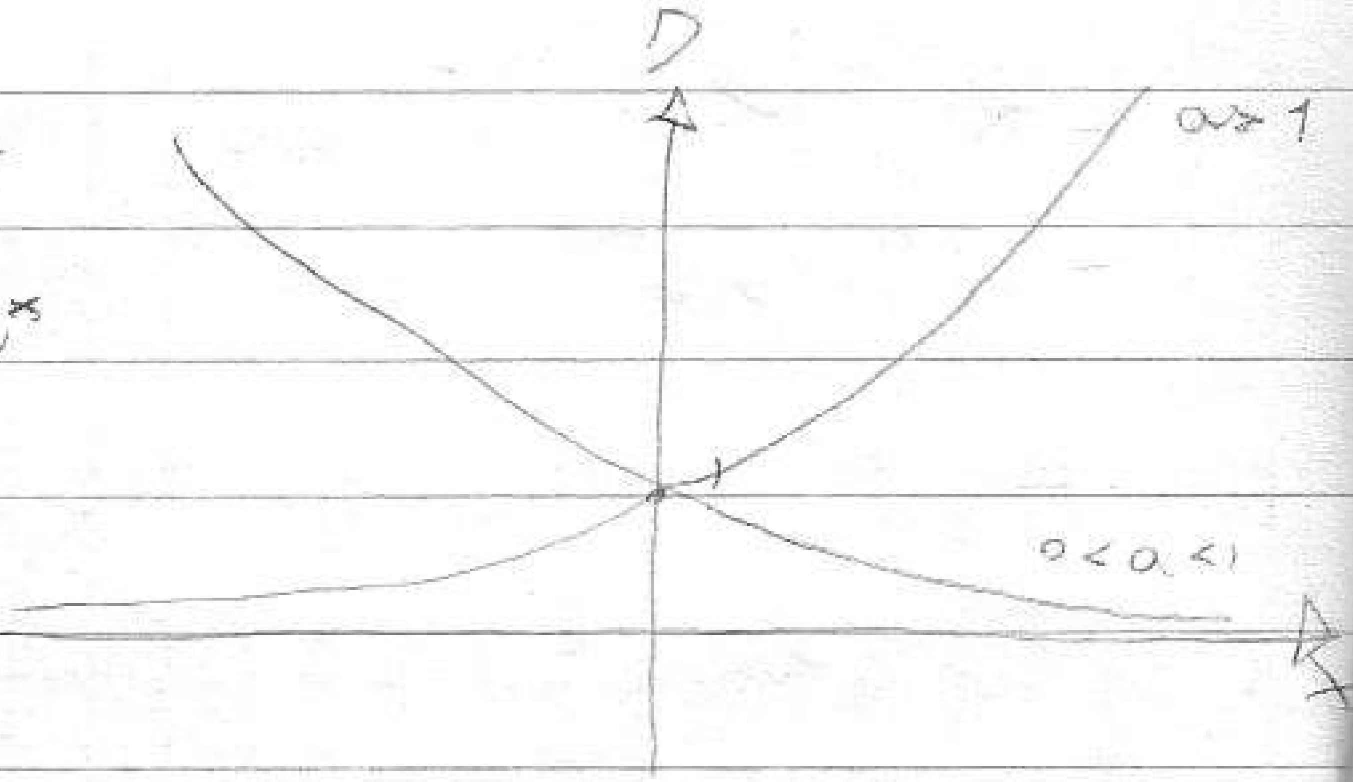
- se $a_n > 0$ $P(n)$ è ILLIM. SUP.

$a_n > 0$	$a_n > 0$
n pari	n disp.
lim ~~SUP~~ INF illim inf.	illim.
	∄ max P_n

• esponenziale:

$a \in \mathbb{R} / a > 0 , a \neq 1$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$[a \in \mathbb{R}^+ \text{ e } a \neq 1]$ $\quad x \to y = a^x$



- Caso 1: $0 < a < 1$
- Caso 2: $a > 1$

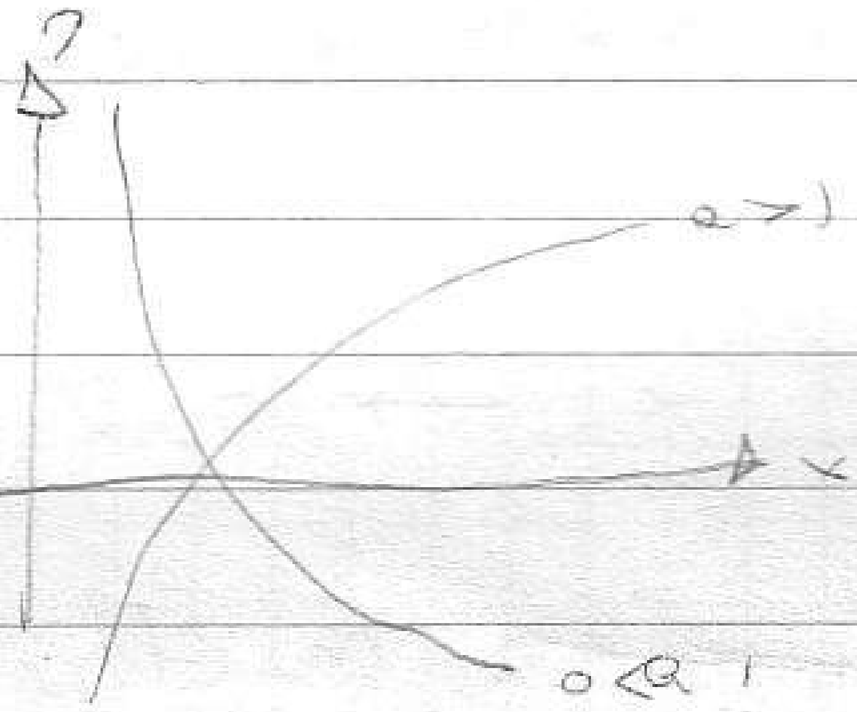
[Caso particolare: $e \cong 2,7$ $\quad y = e^x$]

[inverso]

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$y \to x = \log_{\boxed{a}} y$$

× convenzione spesso si mette ln

graf: →

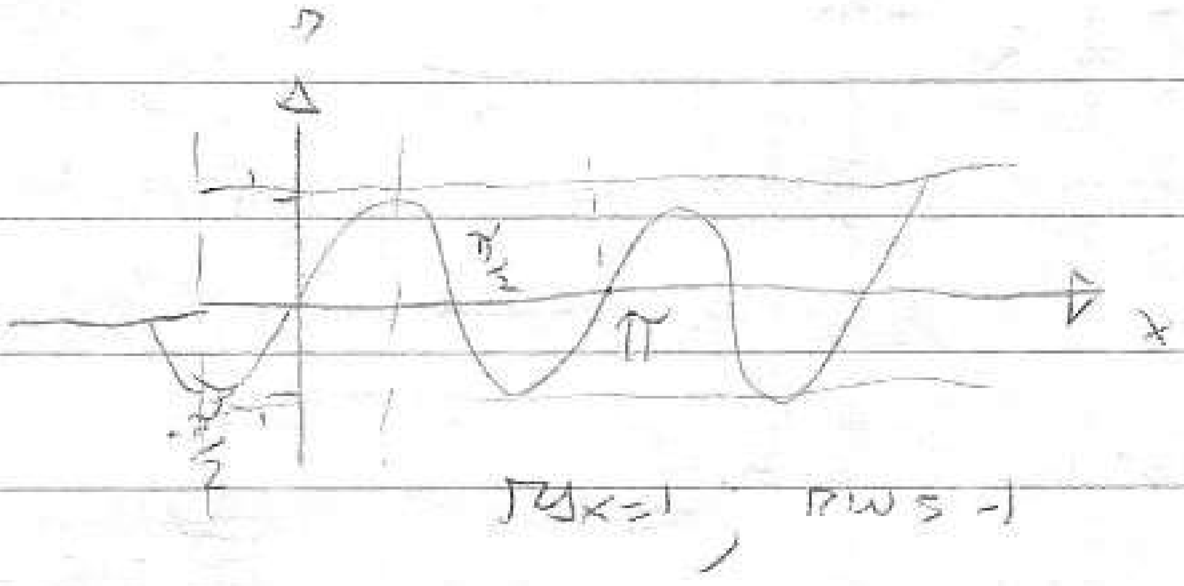


• f(x) TRIGONOMETRICHE (GONIOMETRICA)

$y = \sin(x)$ $\quad$ 1) $\sin(x) : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

$y = \cos(x)$ $\quad x \to y = \sin(x)$

$y = tg(x)$ $\quad$ (è PERIODICA)



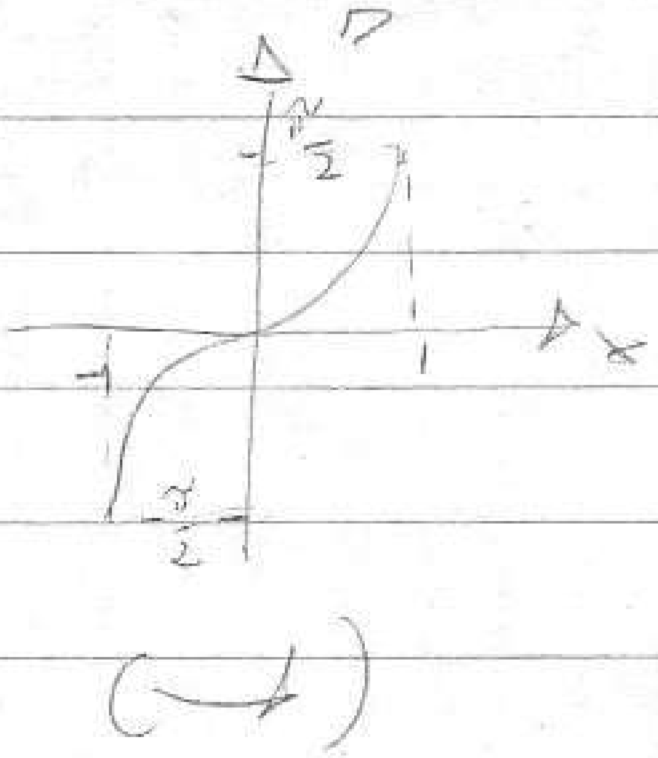
MAX=1 , MIN = -1

Per renderla inv è stata ristretta a: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

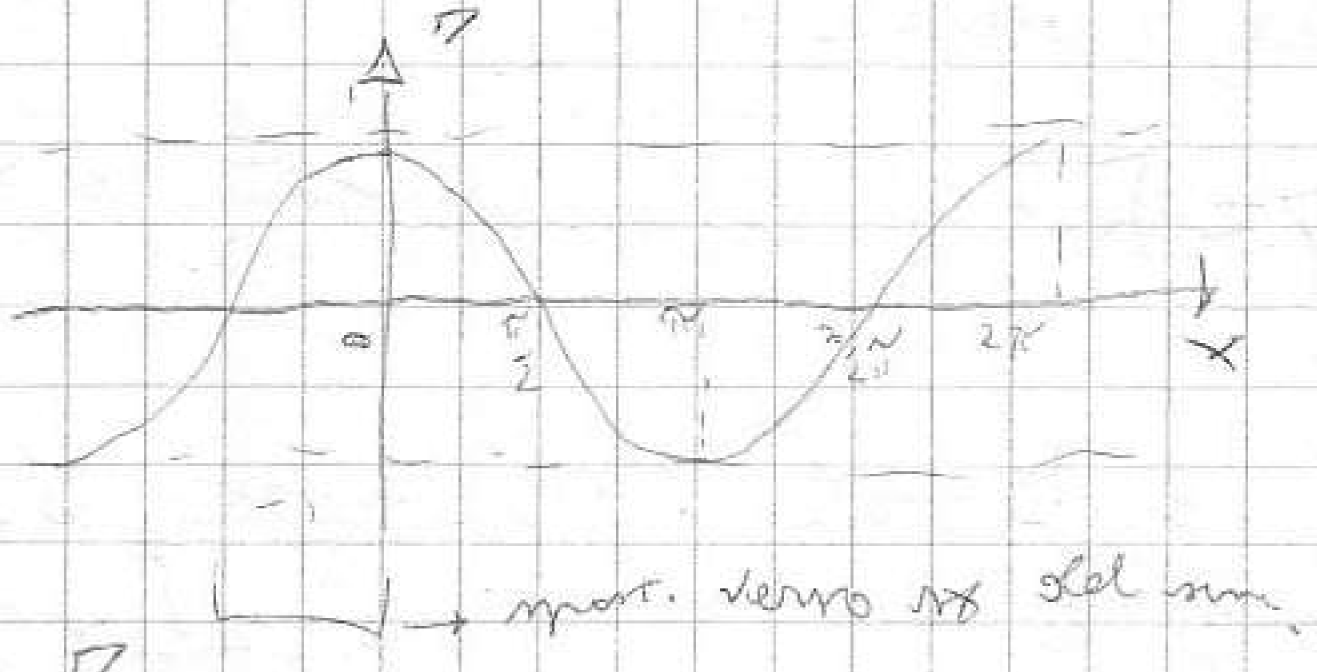
$x \to y = \sin x$

L'inversa è arcsin(x). $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ graf.

$y \to x = \arcsin y$



$y = \cos x$ $(\mathbb{R})$ - Traslazione del $\sin(x)$



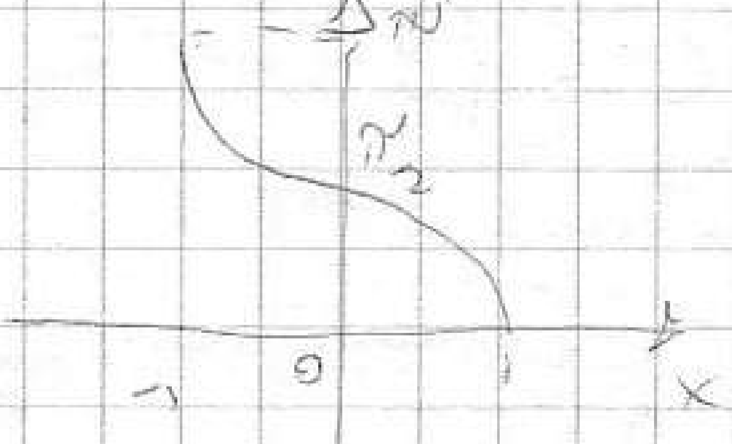
Anche qui si è voluto invertire

Applicando una restrizione

cosx:
$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$

arccos(x)
$[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

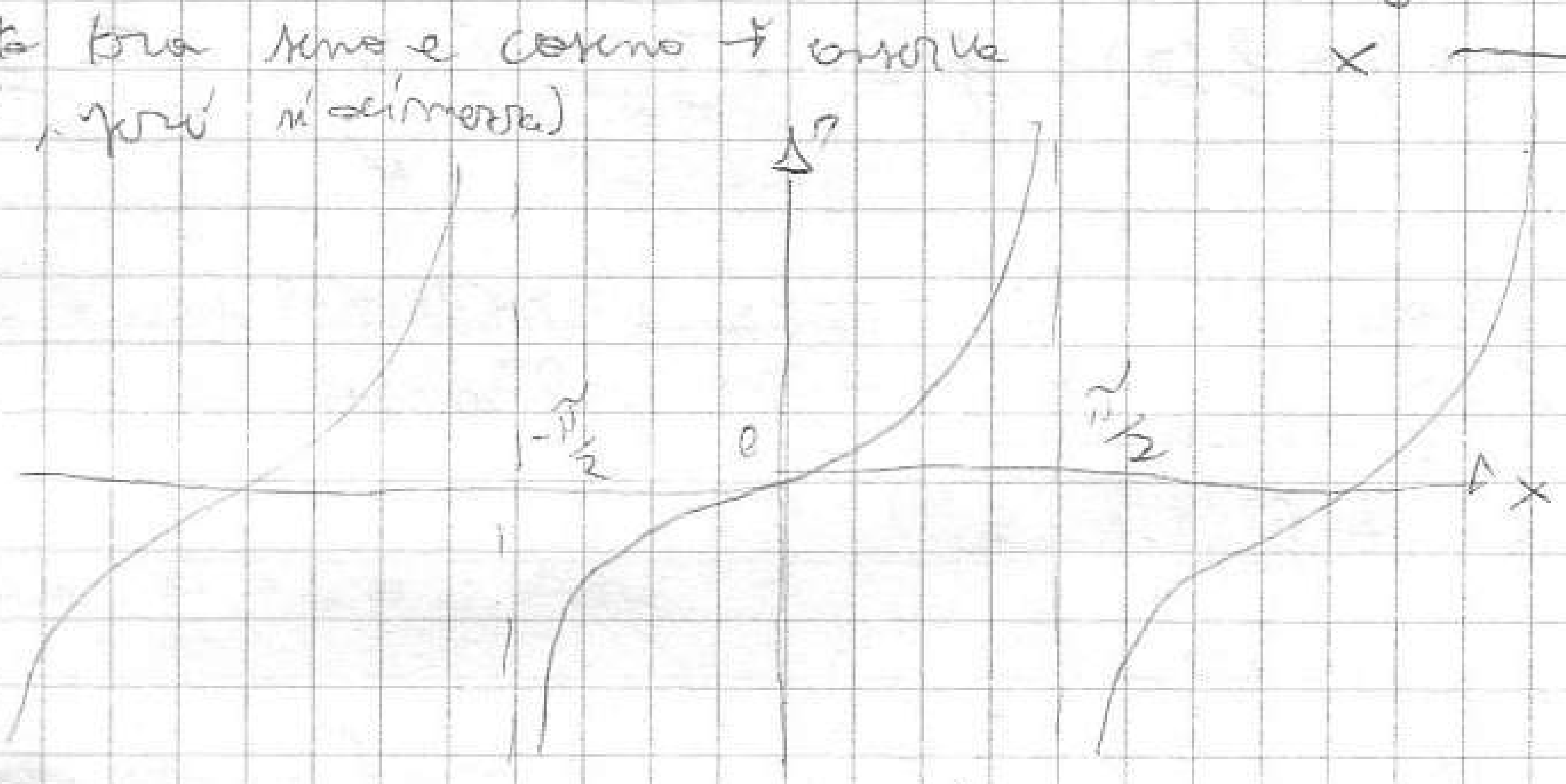
$y \longrightarrow x = \arccos x$



$y = tg\,x$; Cond: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \Rightarrow tg\,x = \mathbb{R}, A \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow y = tg\,x$

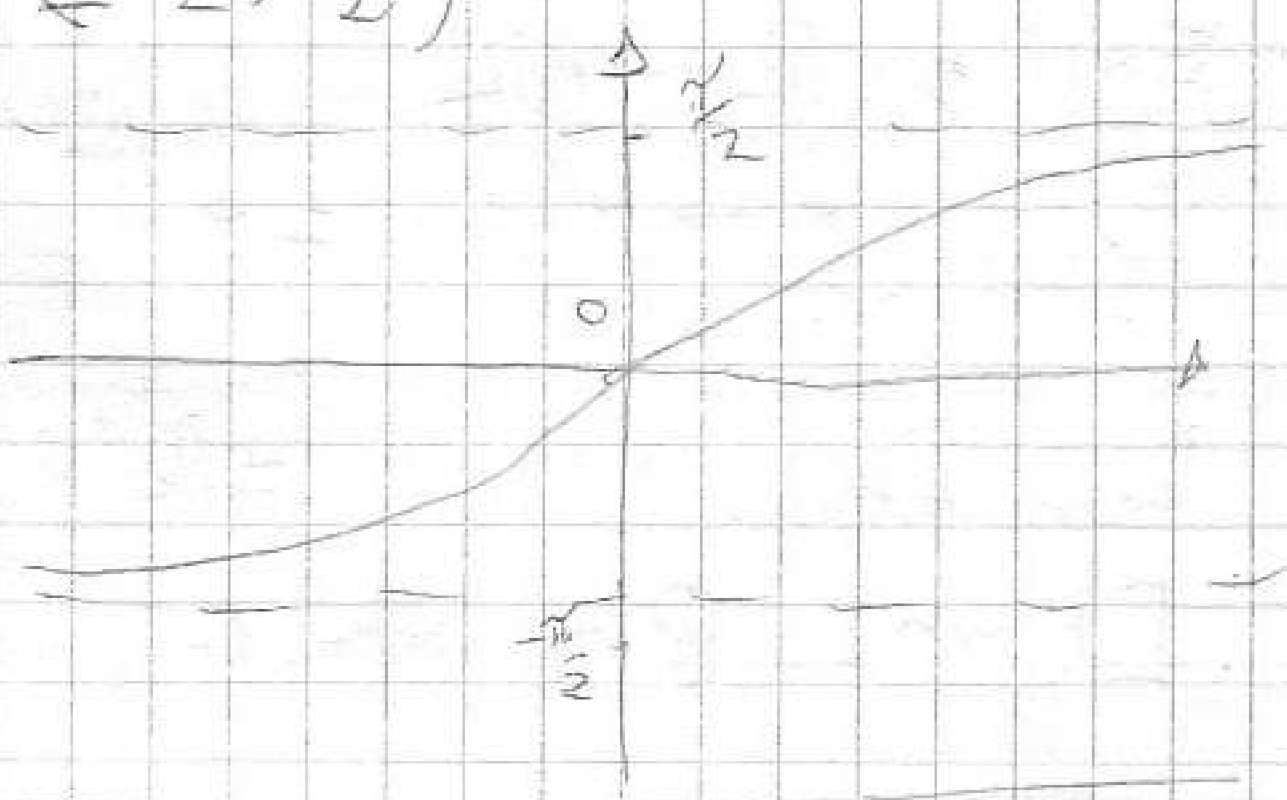
(è rapporto tra seno e coseno + osserva periodicità, però si dimostra)



La restrizione per renderla invertibile è $tg\,x \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$

L'inversa è $arctg\,x : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

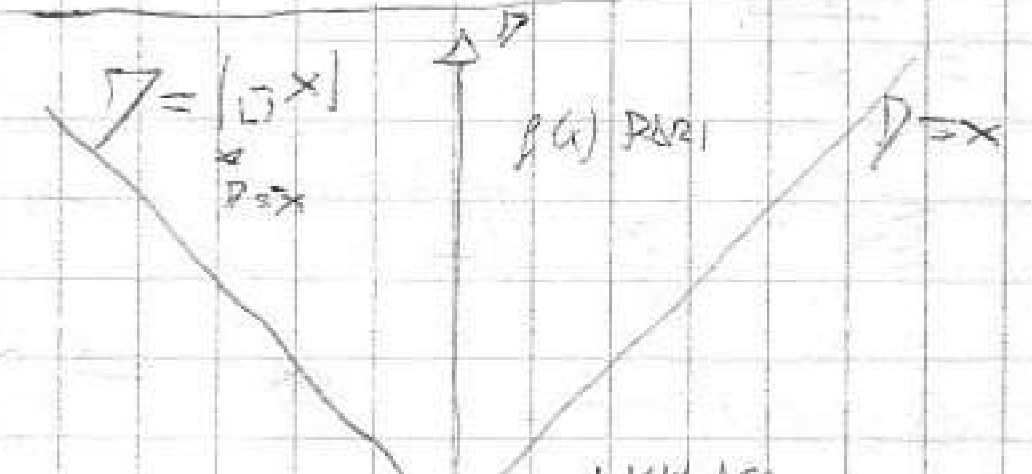
$x \longrightarrow y = arctg\,x$



1/10/2004

val. ass: $| \; | : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$x \longrightarrow y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$



$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Ex: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$

- $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow C \subset \mathbb{R}$ + è una f(x) non 1 var. ind.

⑤ $x \longrightarrow y = x^x = e^{\boxed{x \log x}}$

FUNZIONE COMPOSTA

Ex: $y = \sqrt{x-1}$ e' composizione di $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{t}\\ t=x-1\end{array}\right.$

Si ha $g: D \to C$ Si consideri $\overbrace{D' \cap C \neq \emptyset}^{\text{IPOTESI}}$ → cond. necessaria per avere f(x) COMPOSTA

$f: D' \to C'$ Poi $D'' = \{x \in D / g(\cancel{x}) \in D' \cap C\}$; $D'' \subseteq D$ mentre

$D' \cap C \subset \left\{\begin{array}{l}D'\\ C\end{array}\right.$ [sottoinsieme]

Si parte da D''. $D'' \xrightarrow{g} D' \cap C$ [prendo un punto in D'' e ne faccio l'imm. tramite g]

$x \longrightarrow y = g(x)$

$$D'' \xrightarrow{g} C \cap D' \xrightarrow{f} C'' \subseteq C'$$

$\forall x \longrightarrow y = g(x) \longrightarrow z = f(y) = f[g(x)]$ Comincio $F = f \overset{\text{DOPO}}{\circ} g$.

Come dominio ha D'', cod. e' C'' $D'' \longrightarrow C''$ (riporta dal punto x tornando z)

$x \longrightarrow z = F(x) = f[g(x)]$ (prima opera g, poi f)

(discorso generalizzabile a + f(x) elementari)

Il dom. della F(x) e' l'insieme che tiene conto sia di f(x) che g(x)

Ex: $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$x \to y = g(x) = \overbrace{x-1}^{f(x)\text{ elementare}}$; $t\ \cancel{y} \longrightarrow z = \sqrt{\cancel{y}\,t}$ → considero le f(x) elementari INDIP. l'una dall'altra

Devo costruire $D' \cap C = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Ora individuo $D'' = \{x \in \mathbb{R} / \overbrace{x-1}^{f(x)} \geq 0\}$ ← $D' \cap C$ =

$[1, +\infty)$. Ora vedo la f(x) composta. $F: [1, +\infty) \longrightarrow C''$

$x \longrightarrow z = F(x) = f[g(x)] = f(x-1) =$

$= \sqrt{x-1}$

Ex: $g: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $F = \boxed{z = e^{\sqrt{x}}}$

$x \to y = g(x) = \sqrt{x}$; $t \to z = f(t) = e^t$

$D = \sqrt{\boxed{\frac{\log(x+1)}{x^2-1}}} = f(x)$ Sono 3 f(x) elementari: $t \geq 0 \Rightarrow$

$\rightarrow t$

1) $\frac{\log(x+1)}{x^2-1} \geq 0$; 2) $x+1 > 0$; 3) $x^2-1 \neq 0$

$\Downarrow$ $\boxed{x > -1}$ $\Downarrow$ $\boxed{x \neq \pm 1}$

2) $\boxed{x > -1 \wedge x \neq 1}$ 3)

$\Downarrow$

Den: x^2-1

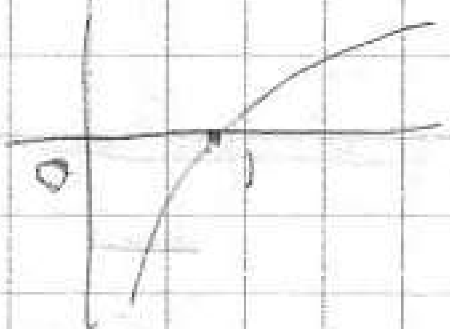
Num:

segno

A interessa

$\log(x+1) \geq 0$

$\log t =$



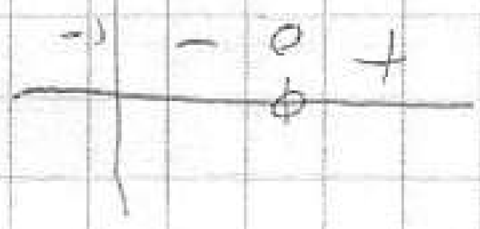
$\rightarrow \log(x)$ $\boxed{\geq 0 \text{ quando } x+1 > 1}$

$x \geq 0$

$= 0$ se $x+1 = 1$

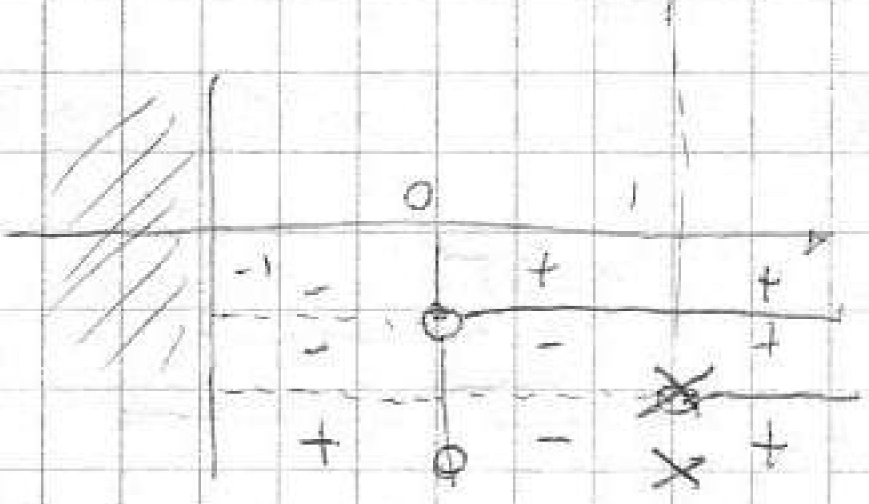
< 0 se $x+1 < 1$

Num:



Ora, ~~tabella~~ interseco i risultati.

Tabella che riassume il segno dell'espressione



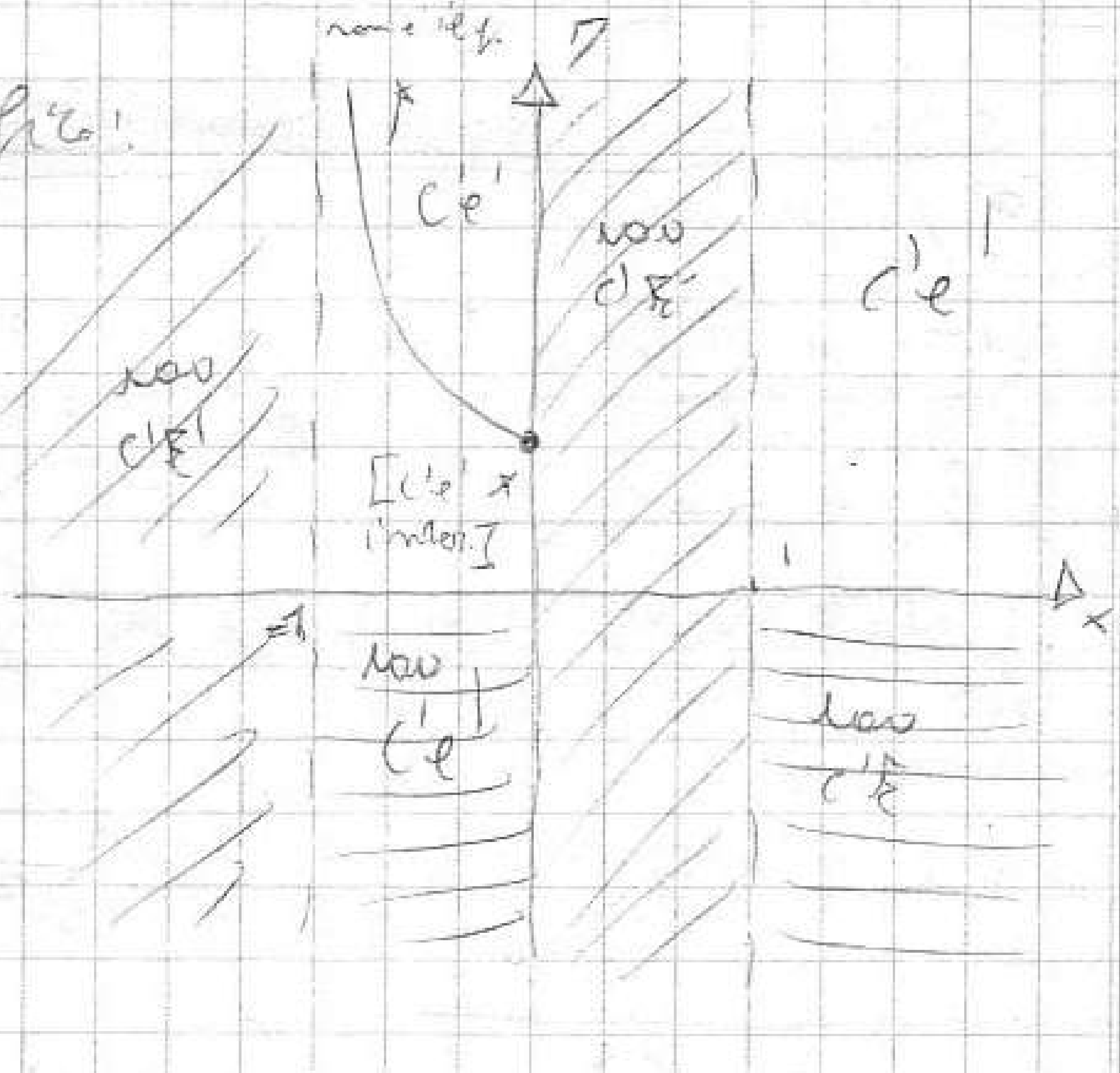
x deve variare da -1 a 0 e oltre 1 $\Leftarrow$

$\Downarrow$

ol 1): $\boxed{-1 < x \leq 0 \text{ e } x > 1}$ Ora interseco tutte le soluzioni, quindi il D di f(x).

Sol 1): $D = (1, 0] \cup (1, +\infty)$

Grafico!



i segno della F, x def. di f(x) elementare

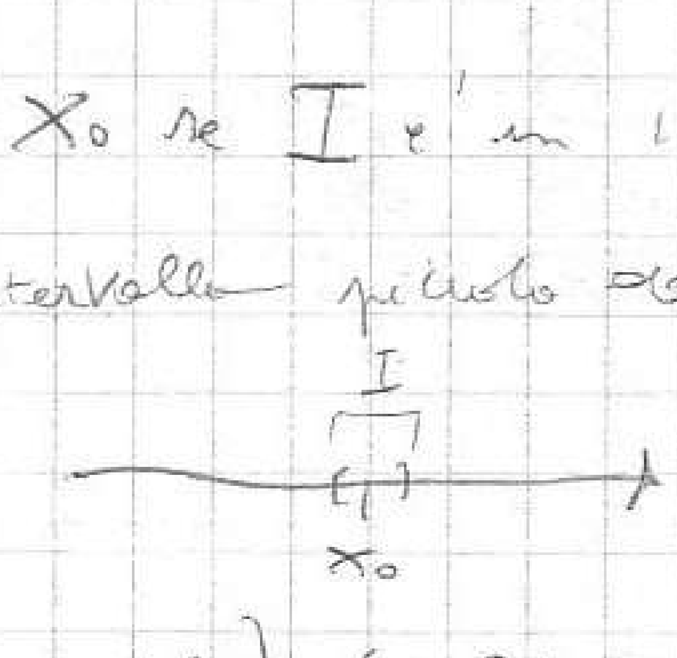
$D = \sqrt{x}$, il cod. di F è un insieme $\subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

a mia esperienza quindi ci dice che il grafico è solo sopra x

A

Prendendo $x_0 \in \mathbb{R}$. $I \subset \mathbb{R}$ si dice INTORNO di x_0 se I è un intervallo perto contenente x_0. (Come per ε, si caratterizza l'intervallo piccolo a piacere ma arbitrariamente; cioè gli estremi sono vicini tra loro)

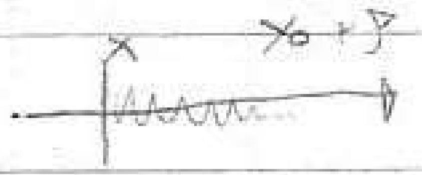
∞ vicini



Ex: $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ $\underline{\forall \varepsilon > 0}$ (ex: $x_0 - 9, x_0 + 9$) con $9 > 0$ Particolarità.

(c'è simmetria; si dice INTORNO SFERICO di raggio ρ $(x_0-\rho, x_0+\rho)$

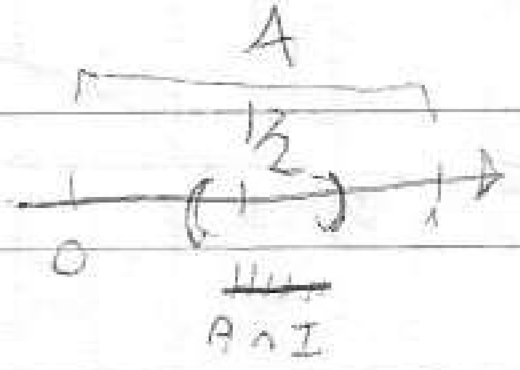
- Intorno DESTRO di x_0 $[x_0, x_0+\rho)$



- " SINISTRO di x_0 $(x_0-\rho, x_0]$
- " BUCATO: int. SFERICO - il p. x_0 / $(x_0-\rho, x_0)\cup(x_0, x_0+\rho)$ → NON È INTERVALLO

Cons: $A\subseteq\mathbb{R}$, $x_0 \overset{\in\mathbb{R}}{\text{è}}$ un punto di ~~A~~ ACCUMULAZIONE di A se ∀ intorno I di x_0 ∃ $x\in I\cap A$ / $x\neq x_0$.

Ex: $A=[0,1)$ e $x_0=\frac{1}{2}$

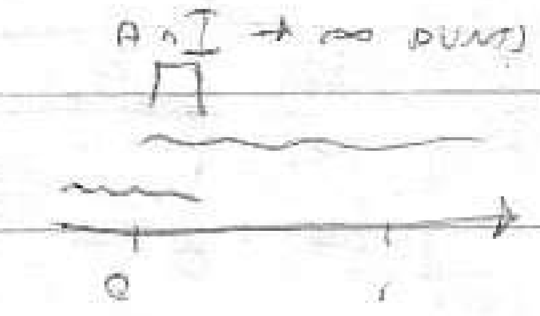


L'intorno ∞ punti, ho è int,

PUNTI INT: / $0<x<1$
" EST: COMPLEMENTARI DELL'INSIEME

0 e 1 non sono né INT, né EST (sono PUNTI DI FRONTIERA).

0 è P.ACC.?

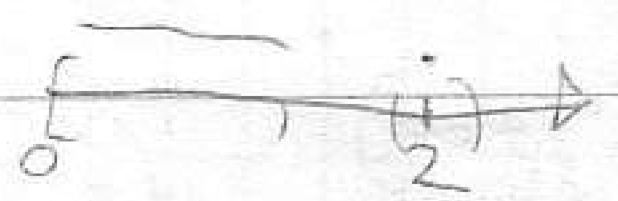


→ SI! Stesso discorso per 1.

⇓

L'insieme dei punti di accumulazione $[\mathcal{D}A] = [0,1]$

Ex: $A=[0,1)\cup\{2\}$.

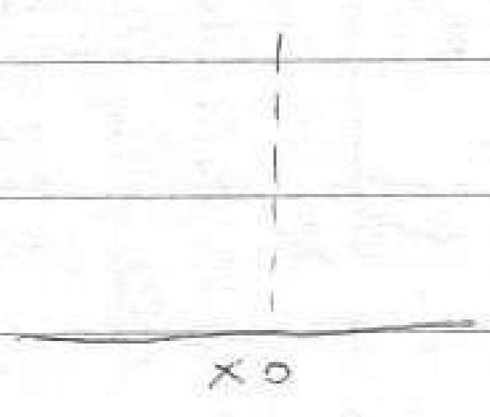


: 2 è un PUNTO ISOLATO ovvero ∈ all'insieme ma non è di acc.

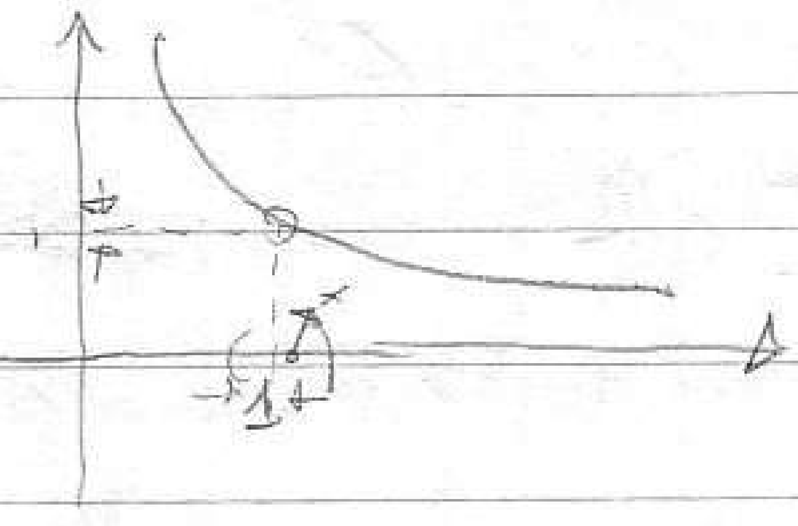
19/10/2004

LIMITE DI UNA F(x) IN UN PUNTO

$f: D\rightarrow C$; $x_0\in\mathbb{R}$ sia tale che $x_0\in\mathcal{D}D$ [punto di accumulazione]
(studiare il comportamento di una f(x) in un intorno bucato) -



Ex: $f(x)=\frac{1}{x^2}$ → come si comporta il grafico vicino a 1?



$f(1)=1$. Quando la x tende a 1, la f(x) tende a 1 (tende <> vale)

$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

(→)

Se prendiamo 0, $\exists\, \infty$ punti $\forall$ intorno di 0 (essendo PUNTO DI ACC.)

$f(0) \nexists$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} ① & l \text{ [Converge verso 1 valore]} \\ ② & \pm\infty \text{ [diverge]} \\ ③ & \nexists \to f. \text{ indeterminata per } x\to x_0 \end{cases}$$

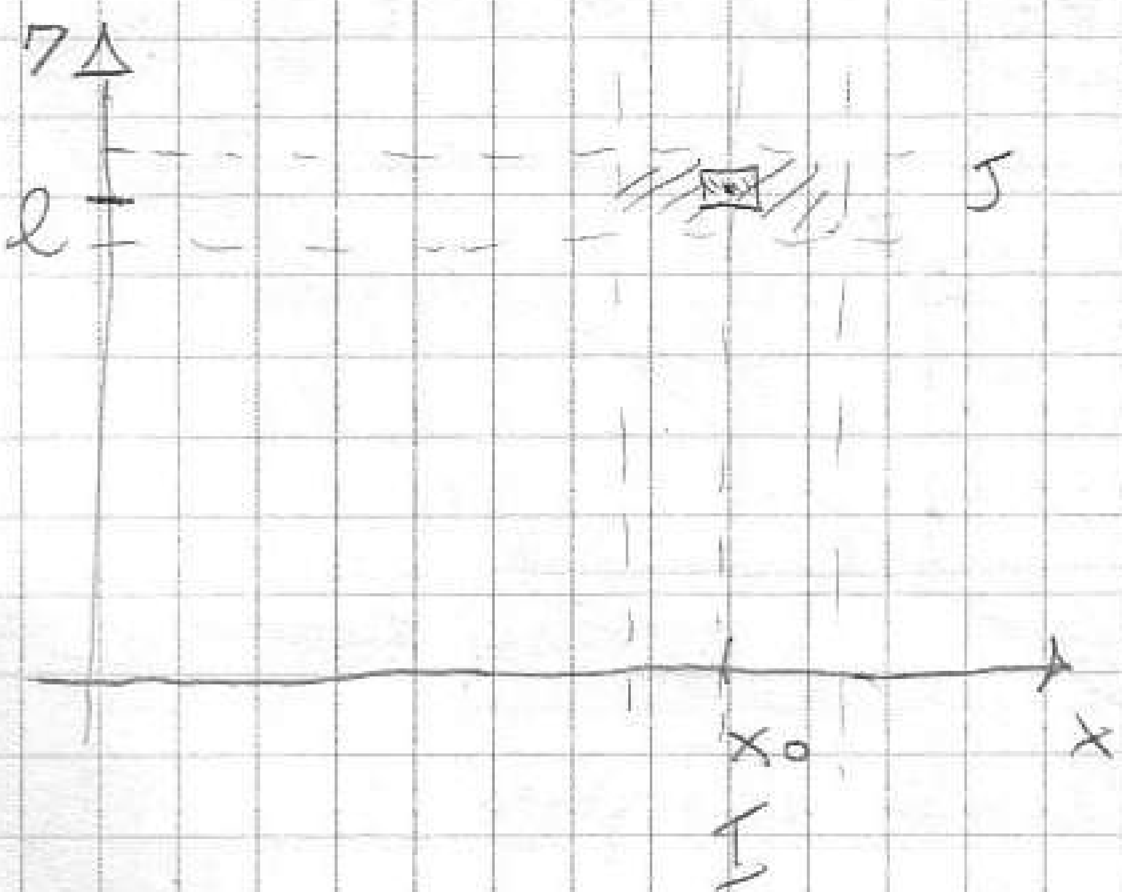
f è regolare per $f \to x_0$

Se fosse

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \to$ i valori crescono $\Downarrow$ DIVERGE

1/ $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ → FUNZIONE CONVERGENTE

(quando mi avvicino a x_0, la var. ind. si avvicina a l)



Considero un intorno J qualsiasi di l.

e un intorno bucato I di x_0

Mi aspetto che il grafico stia in ////

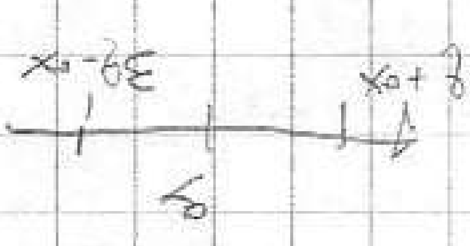
Restringendo gli intervalli diminuisce

il rettangolo di centro (x_0, l).

- $\forall$ intorno J di l $\exists$ intorno I di x_0 / $\forall x \in (D \cap I) \setminus \{x_0\}$ si ha che $f(x) \in J$. Invertendo I e J perdo l'arbitrarietà dell'intorno di D.

- $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 / \forall\, x \in D$ per cui $\boxed{0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon}$ si ha $\boxed{|f(x) - l| < \varepsilon}$

$|x - x_0| < \delta_\varepsilon$



$\Rightarrow x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\}$

$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

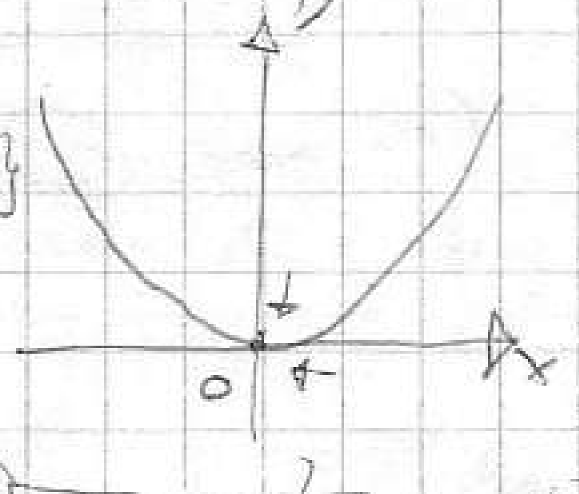
$\Updownarrow$

$f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Ex:

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

$x \in (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\}$



Devo dim. che fissato $\forall\, \varepsilon > 0$, devo trovare

D di x^2

$\delta_\varepsilon > 0 / \forall x \in \boxed{\mathbb{R}}$ per cui $\boxed{0 < |x| < \delta_\varepsilon} \Rightarrow \boxed{|x^2 - 0| < \varepsilon}$

$-\varepsilon < x^2 < \varepsilon$

$(\longrightarrow)$

~~[illegible]~~ Risolviamo il sistema di disequazioni. Otterremo, quindi, un S di soluzioni. Ora devo vedere se trovo $\delta_\varepsilon>0$ / $(-\delta_\varepsilon,\delta_\varepsilon)\setminus\{0\}$ sia $\subseteq S$
[devo ver. che $\forall\,\varepsilon$ positivo, ~~delta~~ $\exists$ in corr. un δ_ε + ε nell'intorno ~~$\forall$ f(x)-ε~~]

$$\downarrow$$

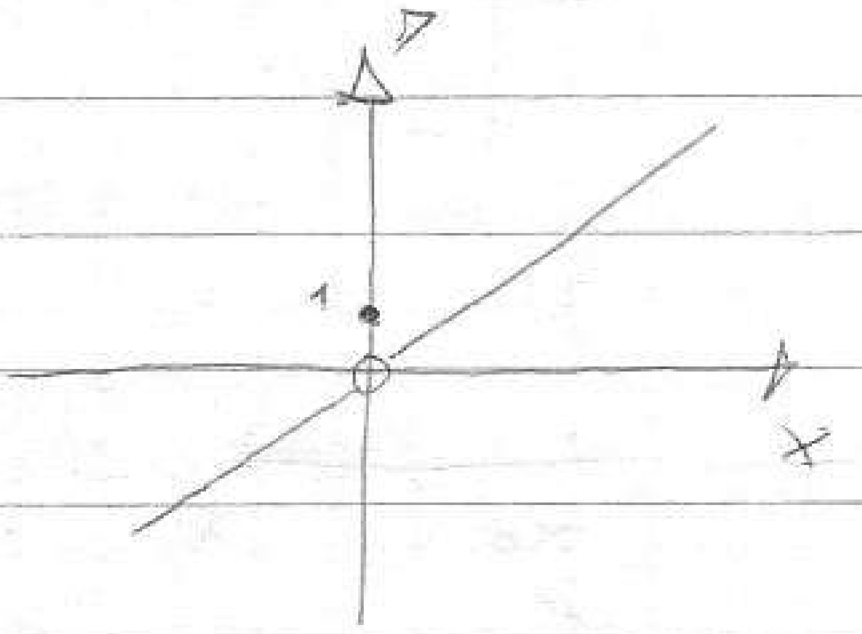
$$S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-\sqrt{\varepsilon}<x<\sqrt{\varepsilon}\}=(-\sqrt{\varepsilon},\sqrt{\varepsilon})$$

$$-\varepsilon<x^2<\varepsilon \rightarrow \begin{cases} x^2>-\varepsilon \Rightarrow S_1=\mathbb{R} \\ x^2<\varepsilon \Rightarrow S_2 \quad -\sqrt{\varepsilon}<x<\sqrt{\varepsilon},\ S_2=(-\sqrt{\varepsilon},\sqrt{\varepsilon}) \end{cases}$$

$$\exists\,\delta_\varepsilon>0\,/\,(-\delta_\varepsilon,\delta_\varepsilon)\setminus\{0\}\subseteq(-\sqrt{\varepsilon},\sqrt{\varepsilon}) \quad [\text{ex: } \delta_\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}]$$

Ex:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\neq 0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\ /$$

$$\boxed{\forall\,\varepsilon>0}\ \exists\,\delta_\varepsilon>0\,/\,\forall x\in\mathbb{R} \text{ per cui } 0<|x|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$$

$$\forall\ x\in(-\delta_\varepsilon,\delta_\varepsilon)\setminus\{0\} \qquad 1-\varepsilon<f(x)<1+\varepsilon \rightarrow 1-\varepsilon<x<1+\varepsilon \Rightarrow S=(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$$

[illegible]

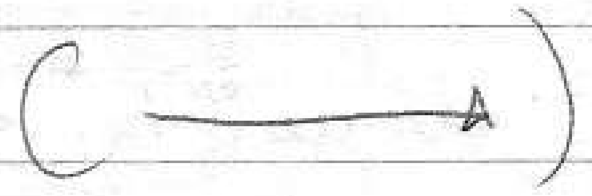
Se prendo $\varepsilon=1 \Rightarrow S=(0,2)$ + questo contiene numeri negativi, e oltre ...

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

Verifica: $-\varepsilon<x<\varepsilon$ $(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\delta_\varepsilon=\varepsilon$

Es. $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}=0$ VERIFICA (vedi eserc. (III))



10/10/2004

$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ (funzione INFINITESIMA)

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Dobbiamo dim. che, fissato $\forall \varepsilon > 0$, deve ∃ un numero R che dipende da ε e sia positivo (l'intorno di 0) $-\delta_\varepsilon$ per cui $\forall x \in D$, $0 < |x - 0| < \delta_\varepsilon$,

ovvero $-\delta_\varepsilon < x < \delta_\varepsilon$ ① si ha che $|e^{-\frac{1}{x^2}} - \overset{\lim}{0}| < \varepsilon$ $= -\varepsilon < e^{-\frac{1}{x^2}} < \varepsilon$ [2)]

Si determina l'insieme delle x che soddisfano 2) → $\begin{cases} e^{-1/x^2} < \varepsilon & | S_2 \\ e^{-1/x^2} > -\varepsilon & | S_1 \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} / -\varepsilon < e^{-\frac{1}{x^2}} < \varepsilon\}$ = risolvo il sistema

(Devo verificare che esiste δ_ε / l'intorno bucato sia $\subseteq S$)

$S_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $S_2 = e^{-1/x^2} < \varepsilon \to -\frac{1}{x^2} < \log \varepsilon =$

$= \frac{1}{x^2} > -\log \varepsilon$ Ora dovrei fare i reciproci ma: $A < B$ non vale sempre $\forall x$ $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ (valori concordi)

ex: $-1 < 2 \to -1 < \frac{1}{2}$. In questo caso: si scelgono 2 casi:

1 caso: $\varepsilon > 1$ $+\log \varepsilon$ e' $+$ $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (1 mentre $\frac{1}{x^2}$ e' sempre $>$ del $-\log \varepsilon$)

2 caso: $\varepsilon = 1$ e' lo stesso di 1

3 caso $0 < \varepsilon < 1$ $\log \varepsilon$ e' $-$, con il $-$ davanti e' $+$ $\to x^2 < -\frac{1}{\log \varepsilon} \Rightarrow$

$-\sqrt{\frac{-1}{\log \varepsilon}} < x < \sqrt{\frac{-1}{\log \varepsilon}}$, $S_2 = \left(-\sqrt{\frac{-1}{\log \varepsilon}}, \sqrt{\frac{-1}{\log \varepsilon}}\right) \setminus \{0\}$. Intersezione con S_1 e ottengo S, cioè:

$S = \left(-\sqrt{\frac{-1}{\log \varepsilon}}, \sqrt{\frac{-1}{\log \varepsilon}}\right) = S_2$

sia contenuto event. coincidente

Devo trovare $\delta_\varepsilon > 0$ per cui $(-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\} \overset{*}{\subseteq} S$. $\delta_\varepsilon = \sqrt{\frac{-1}{\log \varepsilon}}$,

basta dimostrare che ∃ per almeno 1 valore (quello e' il val max)

4

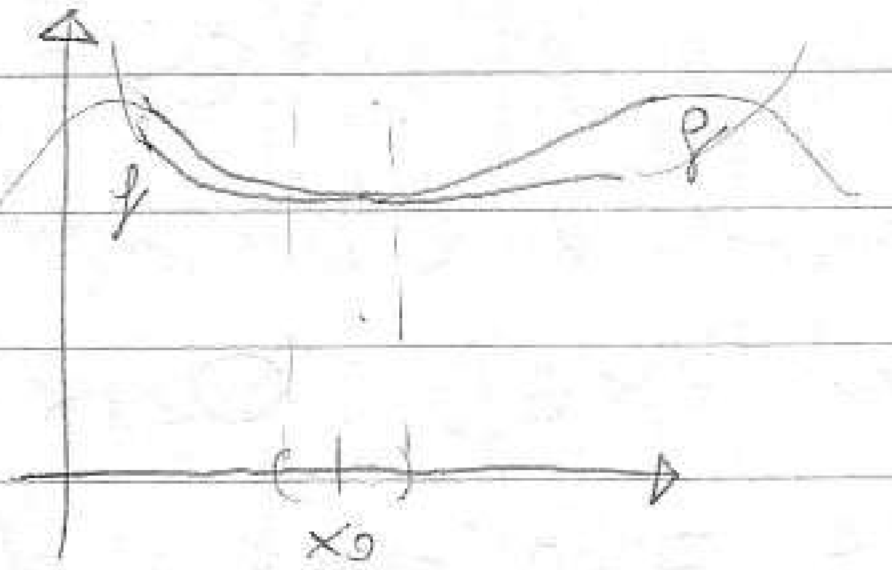
TEOR. UNICITA' DEL LIMITE

Sia f convergente per $x \to \overset{\text{p. acc.}}{\overline{x_0}}$, allora il suo limite e' unico

TEOREMA DEL CONFRONTO (del limite)

Sia x_0 un punto di acc. del dominio di f $[x_0 \in \mathcal{D} D_f] \cap [\mathcal{D} D_g]$.

$\forall x \in I_\delta(x_0)$ [intorno sferico di raggio δ con centro x_0] $\setminus \{x_0\}$ si ha che $f(x) \leq g(x)$

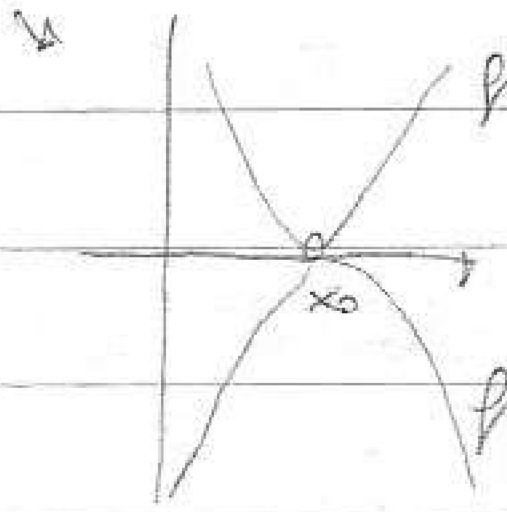


Sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e

$\lim_{x\to x_0} g(x) = m$

$\Downarrow$ ALLORA

$l \le m$ (anche se $f(x) < g(x)$, cioè strettamente minore)



Ex: $\underbrace{f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}}_{\text{strett pos}}$ e $\underbrace{f(x) = -e^{-\frac{1}{x^2}}}_{\text{strett neg.}}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x)$

TEOREMA DEL DOPPIO CONFRONTO

Sia $x_0 \in \mathcal{D}D_f \cap \mathcal{D}D_g \cap \mathcal{D}D_h$; $\overbrace{\forall x \in I_\delta(x_0)}^{\text{almeno 1 int.}} \setminus \{x_0\}$ si ha $g(x) \le f(x) \le h(x)$

Sia $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$

$\downarrow$

Si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ [anche la f(x) intermedia converge a l]

$\Downarrow$

Ex: Studio di $\lim_{x\to 0} x \cdot \boxed{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \to D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\left[f(x) \le x \sin\frac{1}{x} \le h(x)\right]$

$-x \le \downarrow \le x$

A partire da $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ moltiplicando per x non cambia:

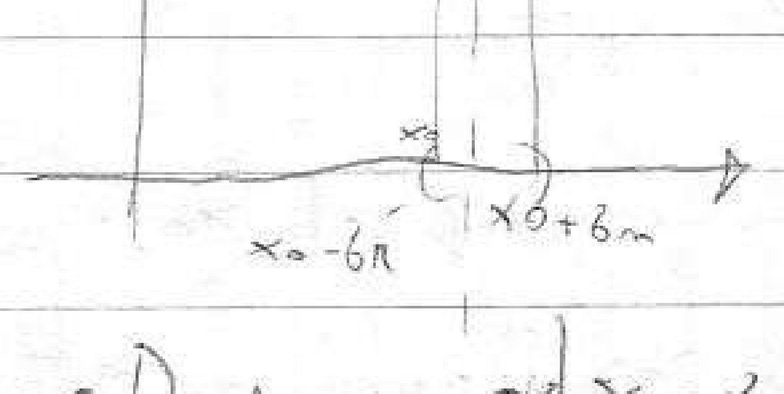
$\underbrace{-x}_{\text{va a 0}} \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le \underbrace{x}_{\text{va a 0}}$ (se $x>0$) e $\left[\underbrace{x}_{\text{va a 0}} \le x \sin\frac{1}{x} \le \underbrace{-x}_{\text{va a 0}} \text{ se } x<0\right]$ $\Rightarrow$ per il T del CONFR.

che il $\lim_{x\to 0} \cancel{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$\Downarrow$ + il graf si avvicina alla retta (asintoto) senza mai raggiungerla

FUNZIONI DIVERGENTI

$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$



la funzione è sempre sopra la retta $D \le M$

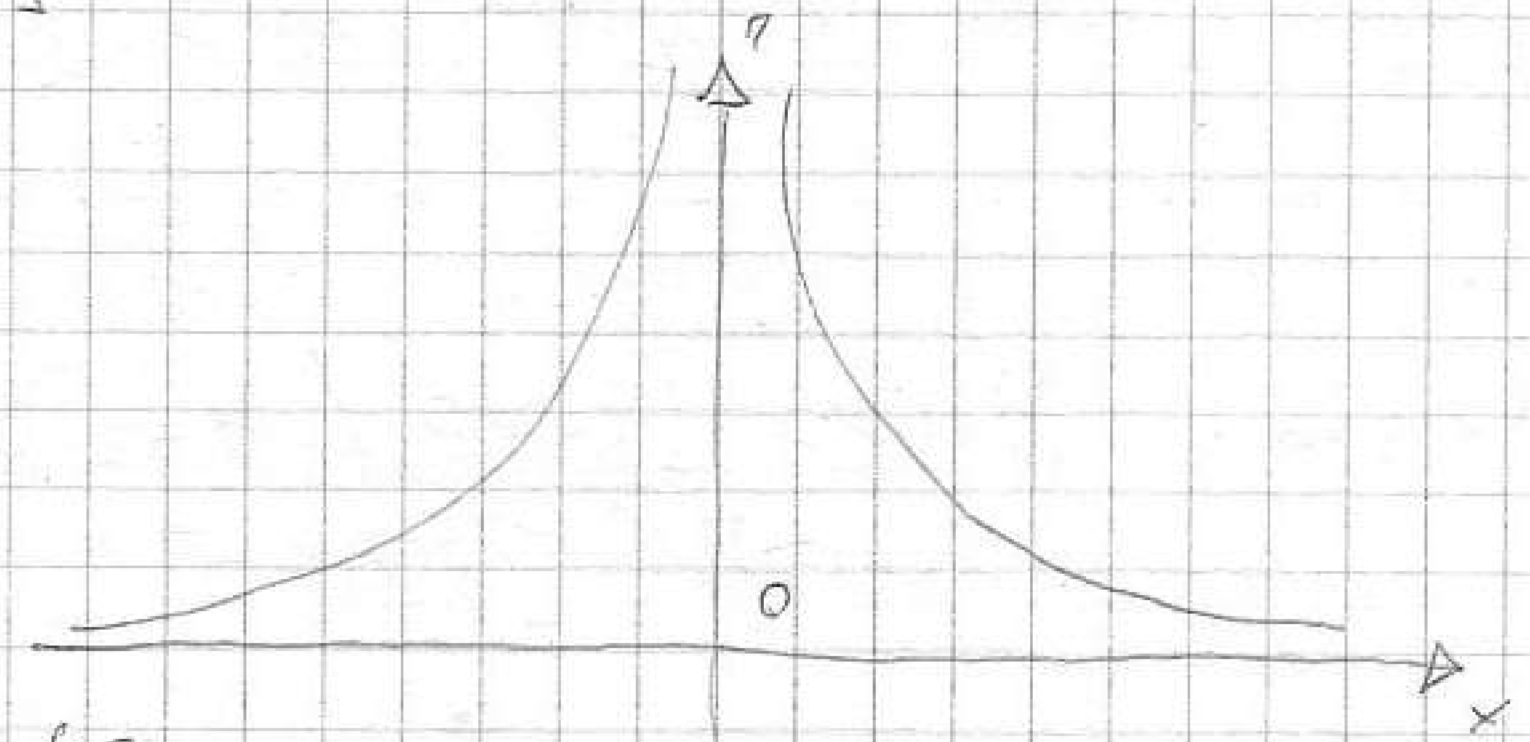
$\uparrow$

• $\forall M > 0, \exists \delta_M > 0 \;/\; \forall x \in D$ per cui $|x - x_0| < \delta_0$ si ha $f(x) \ge M$

[M è numero molto grande]

Ex:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



Dim:

$$\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \ / \ \forall x \in \overset{\mathbb{R} \setminus \{0\}}{D} \text{ per cui } x \in (-\delta_M, \delta_M) \text{ si ha } \overset{1)}{\frac{1}{x^2} > M}$$

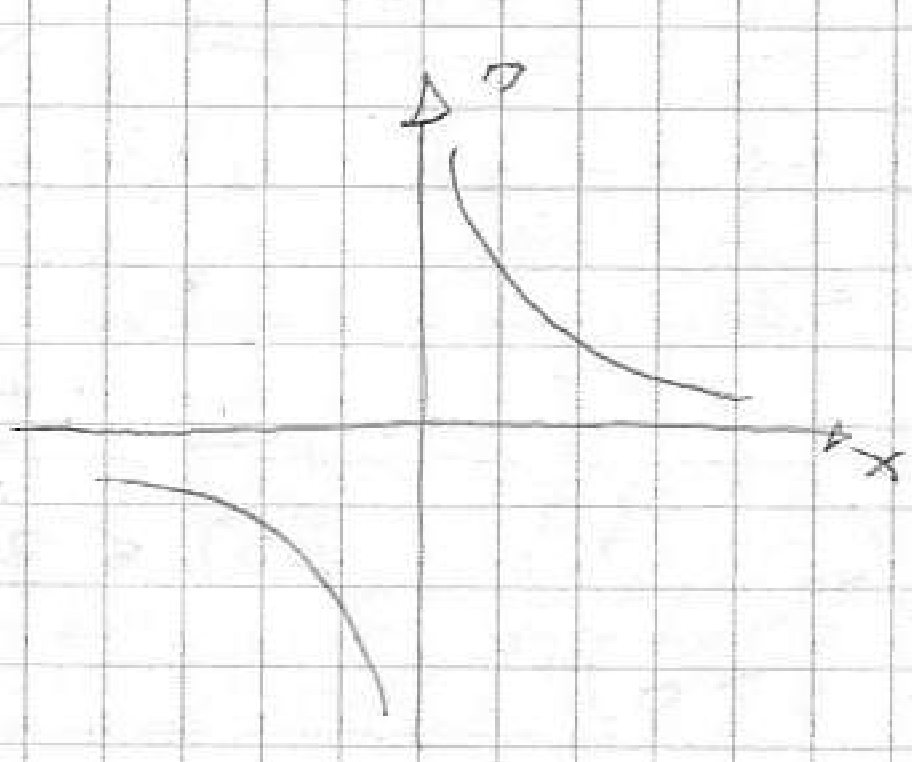
L'insieme delle soluzioni di 1): $x^2 < \frac{1}{M} \to -\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow S = \left(-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \setminus \{0\}$

Devo trovare $(-\delta_M, \delta_M) \setminus \{0\} \subseteq S$. Scelgo $\delta_M = \frac{1}{\sqrt{M}}$

Ex

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \nexists$$

la $f(x)$ non può divergere a $\pm\infty$



Dim: $\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \ /$

$\forall x \in D$ per cui $x \in (-\delta_M, \delta_M)$ si ha $\frac{1}{x} > M$.

Supponiamo che il limite sia $+\infty$

$$\overset{\text{sin } \cdot \text{ dex}}{\frac{1}{x}} > \overset{+}{M} \quad \begin{cases} 1: \text{se } x > 0 \to x < \frac{1}{M} & \left[S_1 = \left(0, \frac{1}{M}\right)\right] \\ 2: \text{se } x < 0 \to S_2 = \emptyset \end{cases} \Bigg] \ S = S_1 \cap S_2 = \cancel{\emptyset} \left\{x \in \mathbb{R} / 0 < x < \frac{1}{M}\right\}$$

$$-\underbrace{(\delta_M, \delta_M)}_{\text{ci sono } \infty \text{ numeri}} \subseteq S \ \cancel{\nexists}$$

21/10/2004

$S = \left(0, \frac{1}{M}\right)$ È impossibile trovare $(-\delta_M, \delta_M) \setminus \{0\}$, sottoinsieme di S

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$: $\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \ / \ \forall x \in D$ per cui $-\delta_M < x < \delta_M$ si ha $f(x) < -M$

$\left[\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{1}{x} = \pm\infty\right]$

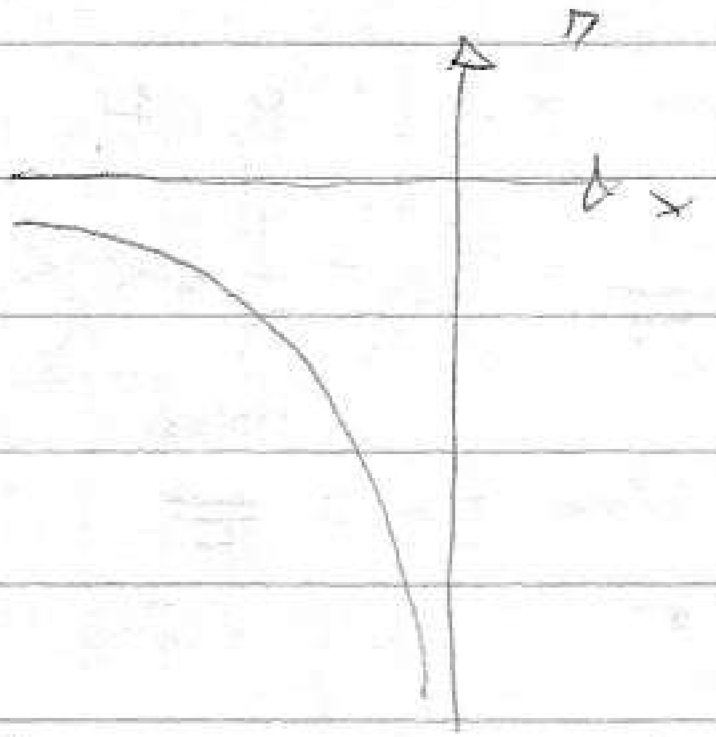
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = l$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 / \forall x \in D$ per cui $x \in (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$ si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = l$ [come sta prima solo che $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$

$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$: $\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \ / \ \forall x \in D$ per cui $x \in (x_0, x_0 + \delta_M)$ si ha $f(x) > M$ $[f(x) < -M$ x $-\infty]$

Dim.

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



$\frac{1}{x} < -M$, si:

$-x < 0, \ x > -\frac{1}{M}$

$-x > 0 \ \nexists x \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$S = \left(-\frac{1}{M}, 0\right)$; $(-\delta_M, 0] \subseteq S = \left(-\frac{1}{M}, 0\right)$ + $\delta_M = \frac{1}{M}$

TEOREMA DEL CONFRONTO

$x_0 \in D_f \cap D_g$; $\forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ $\overbrace{f(x)}^{\text{min}} \leq \overbrace{g(x)}^{\text{magg}}$
(deve esistere $\delta > 0$)

+

- se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

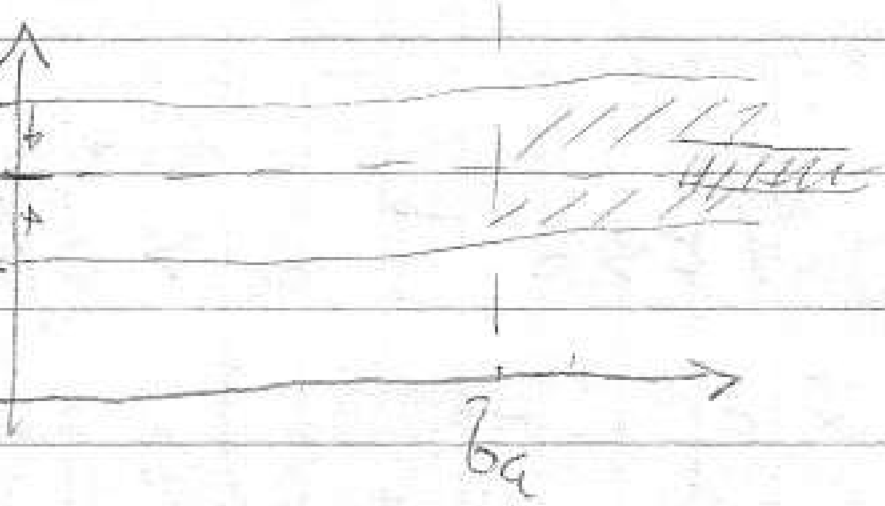
- se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$f: D \to C$ con D illimitato sup. Si considera $\lim_{\boxed{x \to +\infty}} f(x) =$

non ho senso se D è limitato

$$= \begin{cases} l \\ \pm\infty \\ \nexists \text{ (la } f(x) \text{ non si stabilizza)} \end{cases}$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

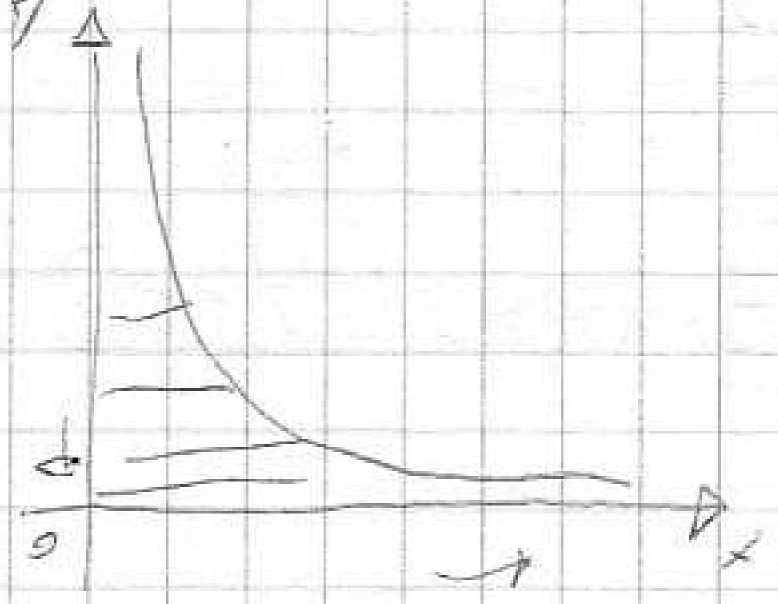


Se fisso un intorno arbitrario di l, deve ∃ un δε / ∀x > δε, il grafico si trova in ////

㉔ • $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ / \ \forall x \in D$ per cui $x > \delta_\varepsilon$ si ha che $|f(x) - l| < \varepsilon$

Es. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \boxed{0^+}$

I valori si avvicinano ma sempre con valori positivi



• $\forall \varepsilon>0 \ \exists\ \delta_\varepsilon>0 / \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ per cui $x>\delta_\varepsilon$ si ha $-\varepsilon<\frac{1}{x^2}<\varepsilon$

$$\begin{cases} -\varepsilon<\frac{1}{x^2} \quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ \frac{1}{x^2}<\varepsilon \to x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \to x \cancel{\in \left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \setminus \{0\}} > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},\ x < -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \end{cases}$$

$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, +\infty\right)$] → insieme $\boxed{S}$ del sistema

$\exists\ (\delta_\varepsilon, +\infty) \subseteq S$? Sì, per $\delta_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (e' propriamente contenuto)

Se fosse

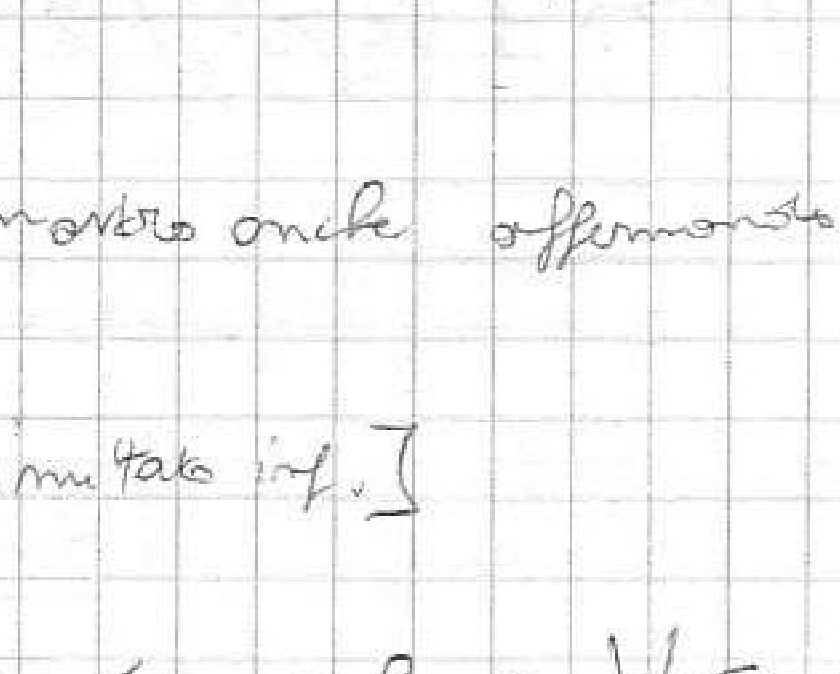
$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}=0$ lo dimostro anche affermando che la $f(x)$ e' pari

• $f: D\to C$ [D illimitato inf.]

$\lim_{x\to-\infty} = \begin{cases} l \\ \pm\infty \\ \nexists \end{cases}$, se $= l$: $\forall\varepsilon>0$ deve $\exists\ \delta_\varepsilon>0 / \forall x\in D$ per cui $x<-\delta_\varepsilon$ si ha $|f(x)-l|<\varepsilon$

Ex: $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}=0$. Per dim. basta considerare $x<-\delta_\varepsilon$. Quindi $(-\infty,-\delta_\varepsilon)\subseteq S$ e' sempre $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

$\lim_{\underbrace{x\to+\infty}_{\text{D illimitato}}} f(x)=+\infty$



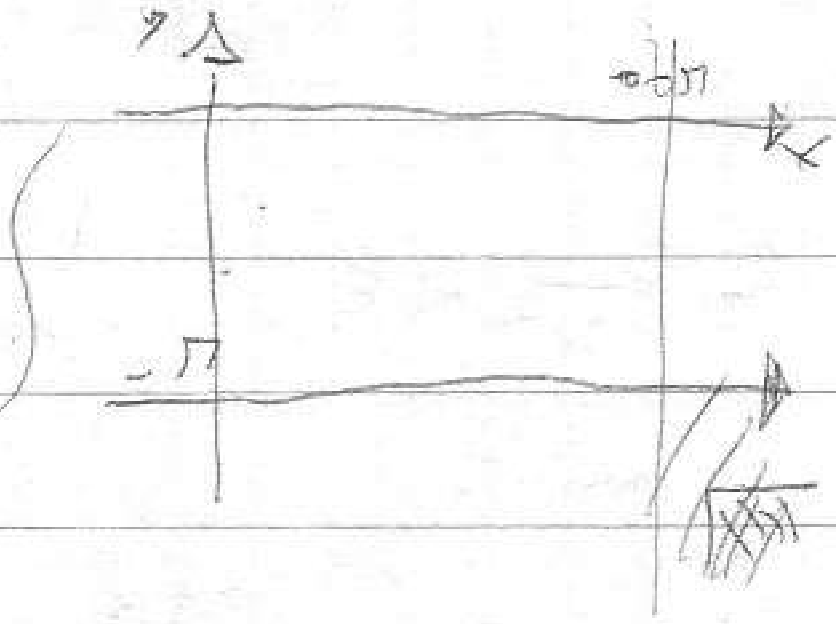
(rettangolo senza 2 lati)

$\forall M>0 \ \exists\ \delta_M>0 / \forall x\in D$ per cui $x>\delta_M$ si ha $f(x)>M$

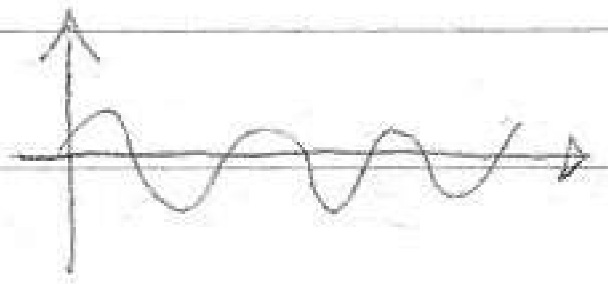
Ex: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ Dobbiamo dim. che $\forall M>0 \ \exists\ \delta_M>0 / \forall x\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ per cui $x>\delta_M$ si ha $\cancel{f}$ $\sqrt{x}>M$

$S = (M^2, +\infty)$. $\delta_M = M^2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\forall M > 0 \ \exists \ \delta_M > 0 \ / \ \forall x \in D$ per cui $x > \delta_M$ si ha $f(x) < -M$



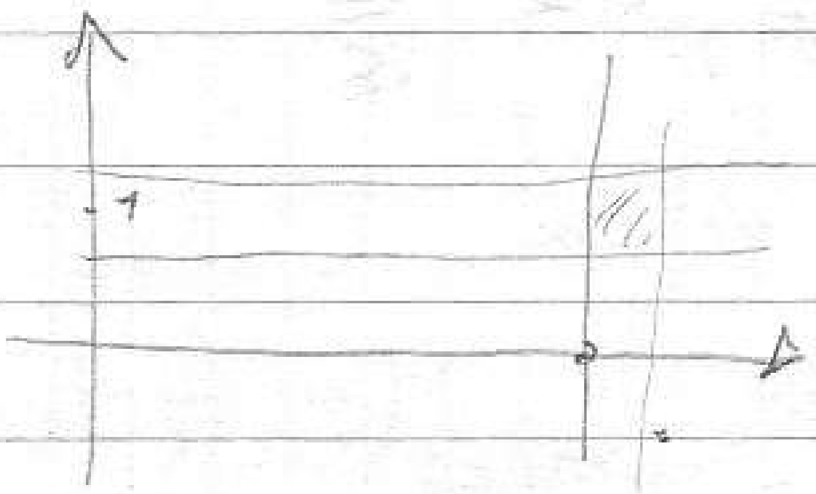
Ex: $\lim_{x \to +\infty} \sin(x) = \nexists$



$\lim_{n \to +\infty} (-1)^n = 1$ NON E' POSSIBILE perchè vuol dire che la successione converge

↓

Non si stabilizza in un intorno



//

[LIMITE DI UNA SUCCESSIONE]

$$\underbrace{\lim_{n \to +\infty}}_{D = N} a_n = \begin{cases} l \\ \pm\infty \\ \nexists \end{cases}$$

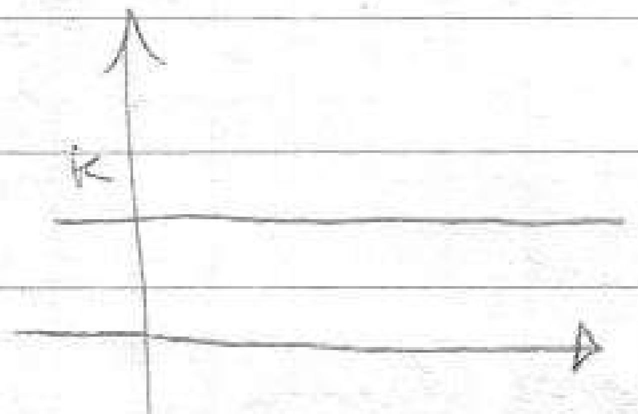
Se $= l$, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0 \ / \ \forall n > \delta_\varepsilon$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon$

//

CALCOLO DEI LIMITI

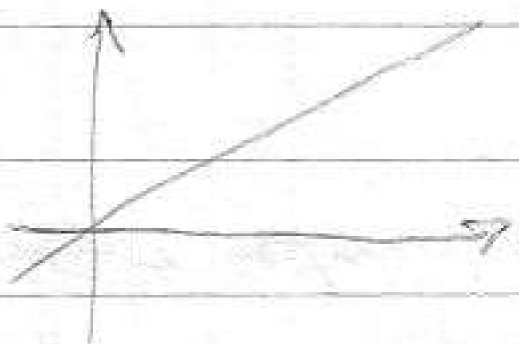
$f(x)$ ELEMENTARI.

* $y = k$



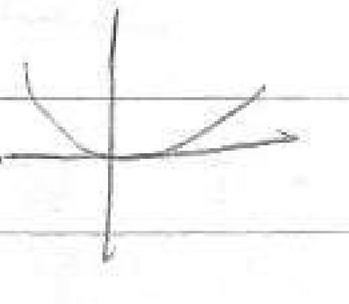
Ex $\lim_{x \to \infty} k = k$ E' sempre k.

* $y = x$

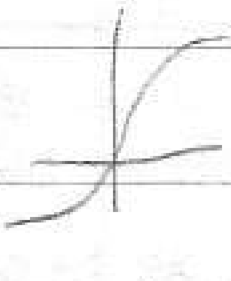


$+\infty = +\infty$
$-\infty = -\infty$

* $y = x^n$ (n pari) : $\lim_{x \to \pm\infty} x^n = +\infty$

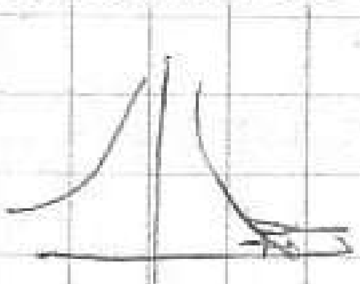


* $y = x^n$ (n dispari) : $\lim_{x \to \pm\infty} x^n = \pm\infty$



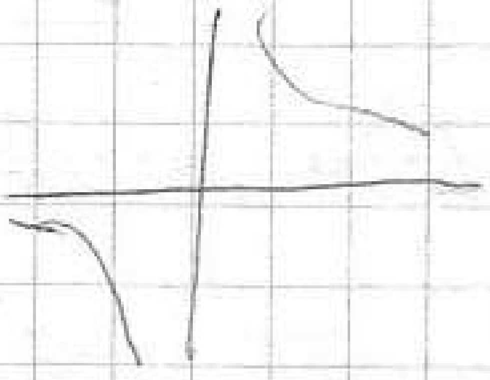
* $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n = \text{pari}]{x} = +\infty$; $\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[2n+1]{x} = \pm\infty$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$



[f(x) INFINITESIMO per x → ...]

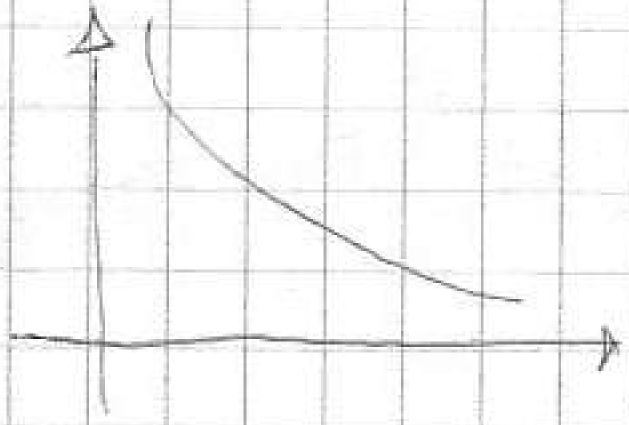
$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{\boxed{n+1}}}$ dispari $= 0$



, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2n+1}} = \nexists$

26/10/2004

x^n ; $\frac{1}{x^n}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt[2n]{x}}} \rightarrow D: (0, +\infty)$



Con indice pari:

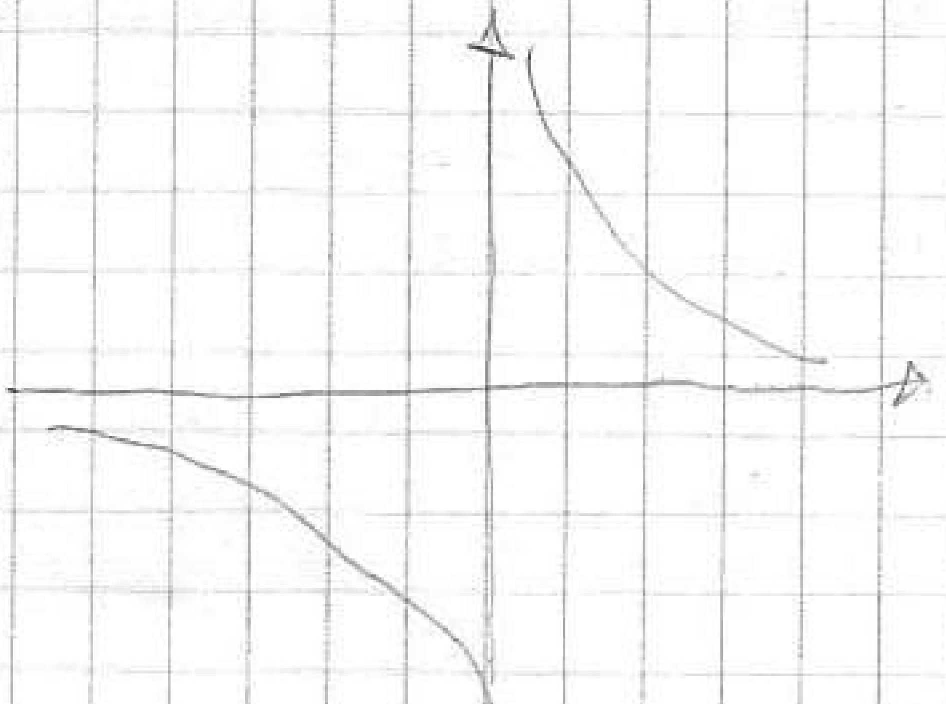
$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[2n]{x}} = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{x}} = 0^+ \rightarrow$ assume valori strettamente positivi

$\lim_{x \to \lambda} f(x) = 0^+$ (per $x >$ certo valore o in un intorno escluso di λ, la $f(x) > 0$)

$\lim_{x \to 0} \underbrace{\boxed{e}}_{\text{strett.}+}{}^{-\frac{1}{x^2}} = 0^+ \rightarrow f(x)$ tende a 0 "dall'alto"

indice dispari:

$\frac{1}{\sqrt[n]{x}} \rightarrow D: (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{\sqrt[2n]{x}} = \pm\infty$ $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{x}} = 0^-$

H

POLINOMI

$P_n(x) = a_n x^n + \dots$

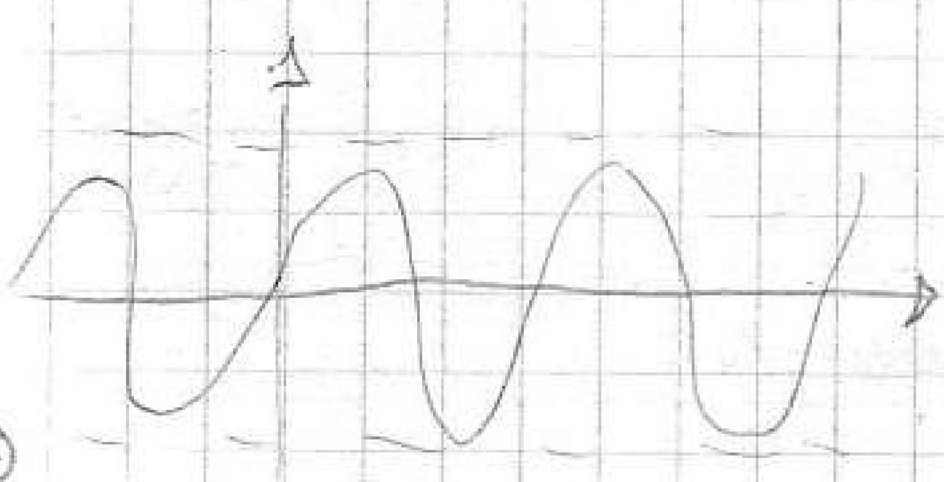
[a intorno di ±∞]

$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty \rightarrow$ se $a_n > 0$
$-\infty \rightarrow$ se $a_n < 0$

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0 \text{ e } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \text{ e } '' \; '' \; '' \\ +\infty & \text{se } a_n < 0 \text{ e } '' \; '' \text{ dispari} \\ -\infty & \text{se } a_n > 0 \text{ e } '' \; '' \; '' \end{cases}$$

$sen(x)$ $D: \mathbb{R} \rightarrow$

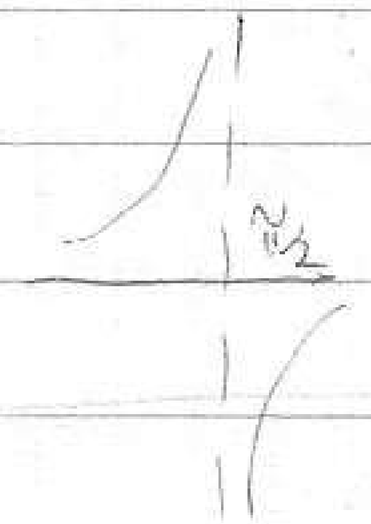
$\lim_{x \to +\infty} sen(x) = \nexists$, $\lim_{x \to -\infty} sen(x) = \nexists$



NON DIVERGE NÉ CONVERGE

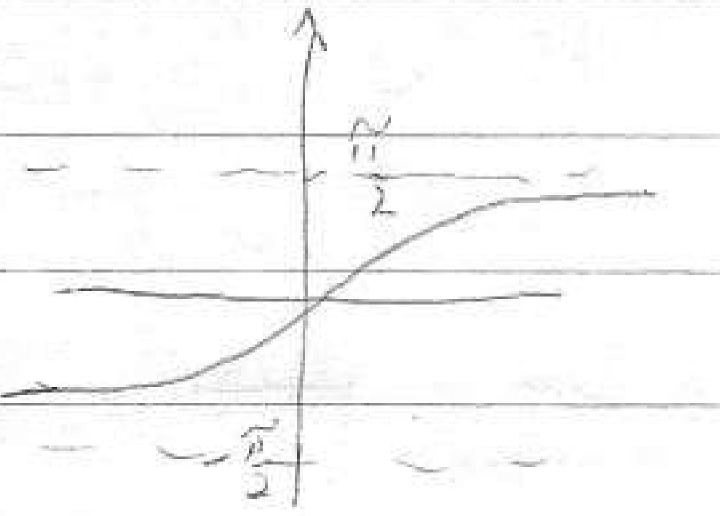
[lo stesso per il coseno]

- $y = tg\,x \quad \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{\pm}} tg\,x = \mp\infty \ \forall k \in \mathbb{Z}$



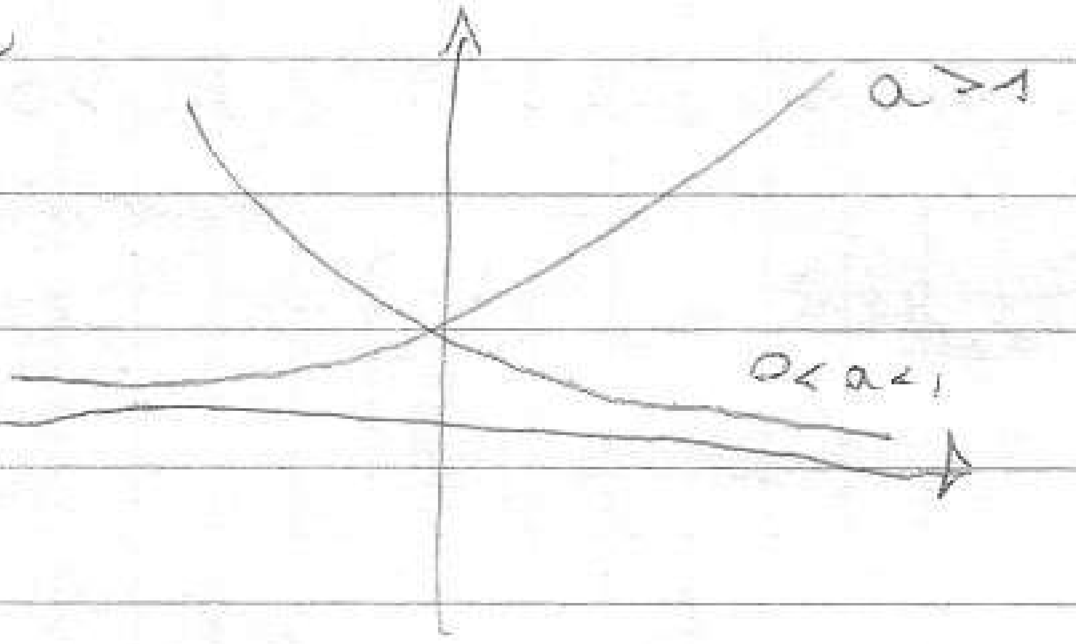
$\lim_{x \to \pm\infty} tg\,x = \nexists$ → NÈ CONVERGE, NÈ DIVERGE

- $y = arctg(x) \quad D \to \mathbb{R}$



$\lim_{x \to \pm\infty} arctg\,x = \pm\frac{\pi}{2}$

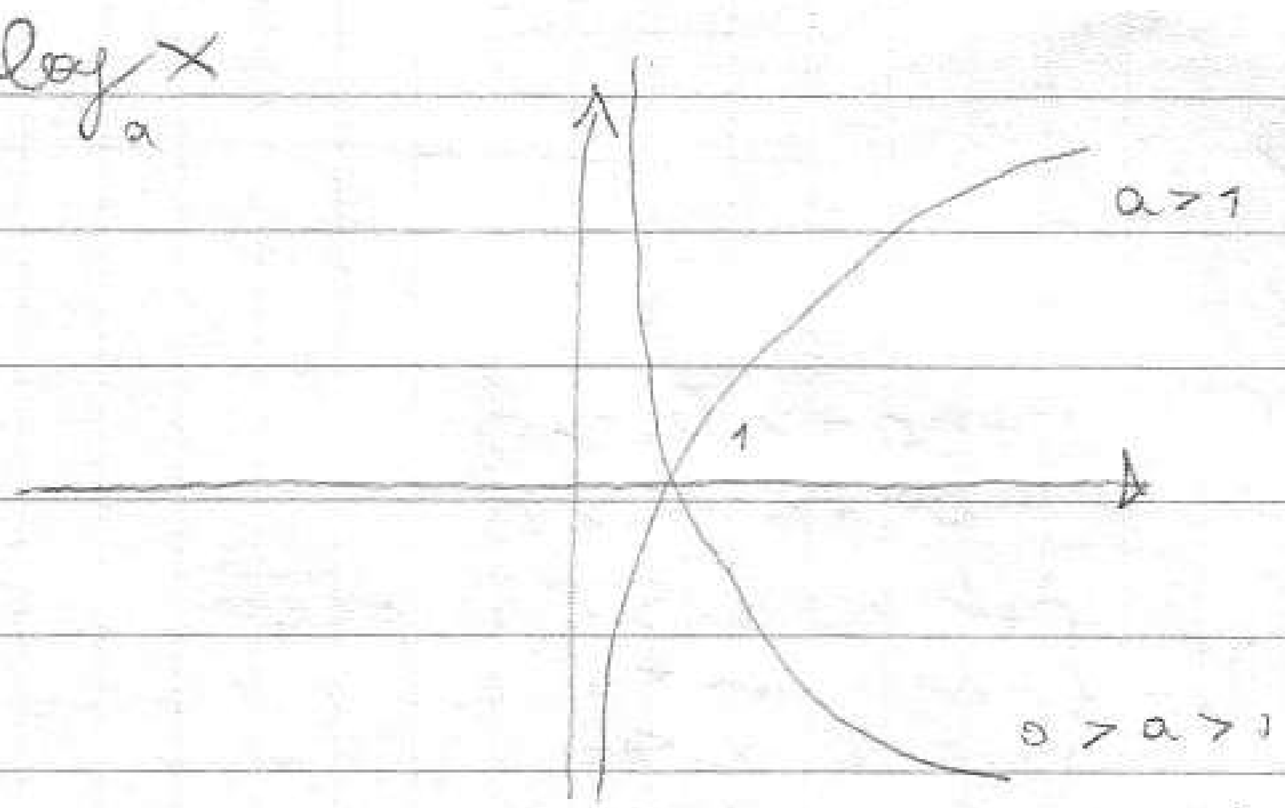
- $y = a^x$



$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \\ &\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \end{aligned}\right] \to a > 1$

$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \\ &\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \end{aligned}\right] \to 0 < a < 1$

- $y = \log_a x$



$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{matrix} +\infty & \text{con } 0>a>1 \\ -\infty & \text{con } a>1 \end{matrix}$

$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{matrix} +\infty & \text{con } a>1 \\ -\infty & \text{con } 0>a>1 \end{matrix}$

LIMITE DI F(X) COMPOSTE

$F(x) = f[g(x)] \qquad \lim_{x \to \boxed{\lambda}} F(x)$

$\lambda = \begin{cases} x_0 \to \text{p. di acc. del } D \text{ della } F(x) \\ +\infty \,] \to D \text{ è ill. sup} \\ -\infty \,] \to D \text{ è ill. inf} \end{cases}$

$\lim_{x\to\lambda} F(x) =$ — Se λ è x_0 allora lo sarà anche di $g(x)$
[D F(x) tiene conto di D di g(x)]

⇓

si studia anche $\boxed{\lim_{x\to\lambda} g(x)}$

Il dominio di $g(x) > D.\ F(x)$. Studiamo, ad ex: $\lim_{x\to\lambda} g(x) = l$ [converge]

TH: Se $g(x)$ converge, $\lim_{x\to\lambda} F(x) = \lim_{t\to l\ [\pm\infty]} F(t)$ $[t = g(x)]$

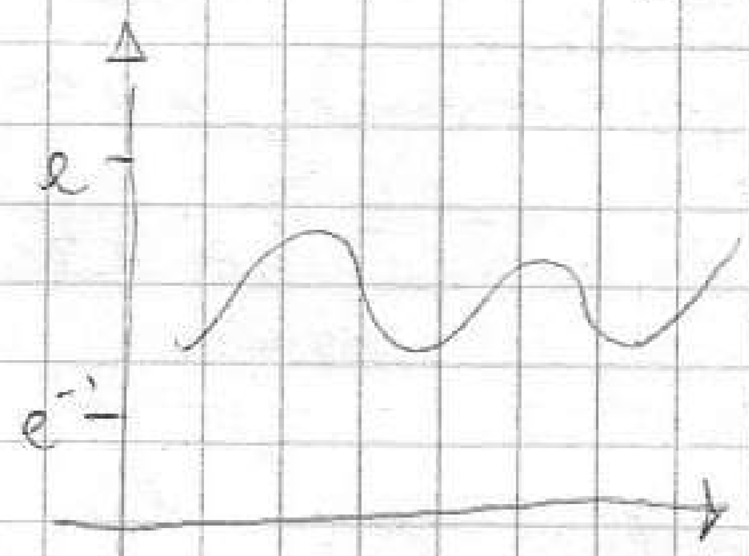
$\lim_{x\to 0} \boxed{e}^{\boxed{-\frac{1}{x^2}}} =$; $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty \longrightarrow \lim_{t\to -\infty} e^t = 0$

$\lim_{x\to+\infty} e^{\sin(x)} = \nexists$

$e^{-1} \le e^{\sin x} \le e^{1}$ → è limitata, non diverge e né converge

Per $x\to+\infty$, $e^{-1} \to \frac{1}{e} \wedge e^{1} = e$ [sono costanti]

Non può convergere perché $\sin(x)$ è periodica, quindi e e e^{-1} saranno raggiunti in ∞ punti!



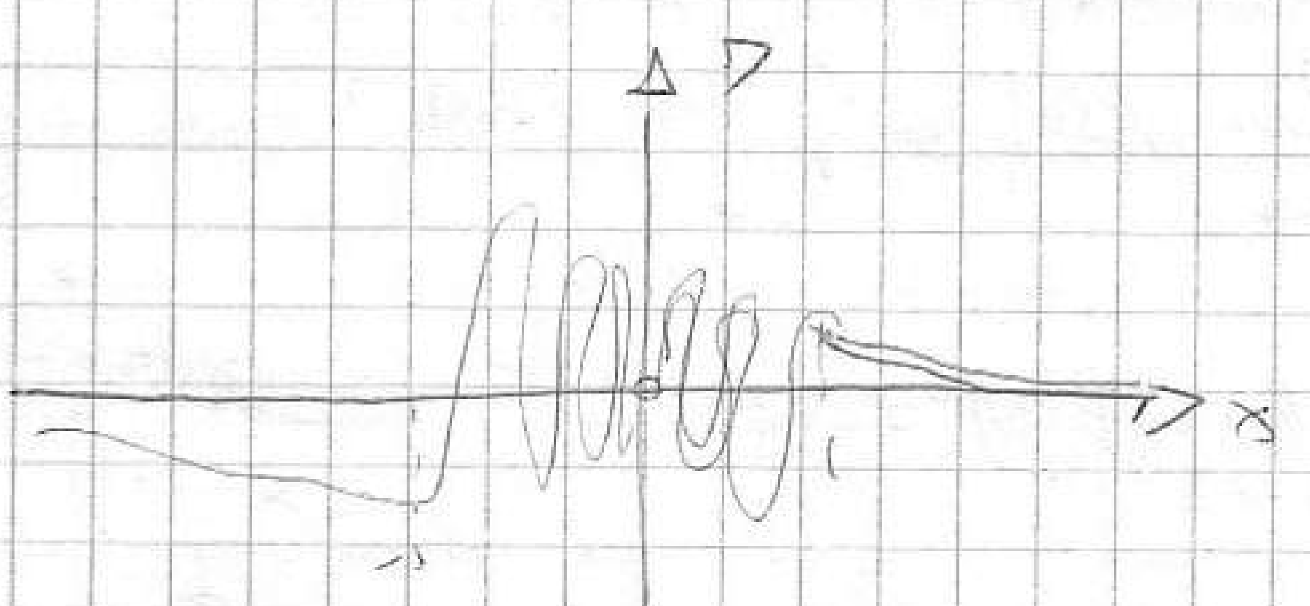
→ non si stabilizza in un punto

$\lim_{x\to+\infty} \overset{F}{\boxed{\sin}}\left(\overset{g(x)}{\boxed{\frac{1}{x}}}\right) = 0^+$; $t = \frac{1}{x}$. Se $x\to+\infty$, $\frac{1}{x}\to 0^+$

⇓

$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0} \sin(t)$

$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$



LIMITE DELLA F(x) COMBINAZIONE LINEARE

$\lim_{x\to\lambda} F(x)$ e $\lim_{x\to\lambda} g(x)$ Detti $a, b \in \mathbb{R}$, voglio vedere

$\lim_{x\to\lambda} \left[a f(x) + b\, g(x)\right] =$

[CONV]

1) $\lim_{x\to\lambda} F(x) = \ell$; $\lim_{x\to\lambda} g(x) = \ell$ $\to$ $\lim_{x\to\lambda}\left[af(x)+bg(x)\right] = a\ell + b\ell$

Ex: $\lim_{x\to 0}\left[5\overset{0}{e^{-1/x^2}} + (\overset{\to 0}{x}+1)\right] = \underline{1}$

[DIV]

2) $\lim_{x\to\lambda}\left[af(x)+bg(x)\right] = \begin{matrix} +\infty & \text{se } b>0 \\ -\infty & \text{se } b<0 \end{matrix}$, $\lim_{x\to\lambda}\left[af(x)+bg(x)\right] = \begin{matrix} -\infty & \text{se } b>0 \\ +\infty & \text{se } b<0 \end{matrix}$

Ex: $\lim_{x\to+\infty}\left[\overset{0}{\boxed{5e^{\boxed{-x^2}}}} + (x+1)\right] = +\infty$ (tende a $-\infty$) ; $\lim_{\lambda\to+\infty}\left[5e^{-x^2} - (x+1)\right] = -\infty$

3) [ENTRAMBE DIV]

$\lim_{x\to\lambda} F(x) = +\infty$; $\lim_{x\to\lambda} g(x) = +\infty$; $\lim_{x\to\lambda}\left[af(x)+bg(x)\right] = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>0, b>0 \\ \boxed{+\infty-\infty} & \text{se } a \text{ e } b \text{ discordi} \\ -\infty & \text{se } a<0,\ b<0 \end{cases}$ INDET.

H

$\lim_{x\to+\infty}\left(\overset{+\infty}{\boxed{\sqrt{x+2}}} - \overset{+\infty}{\boxed{\sqrt{x-1}}}\right) = \infty - \infty$ posso molt. e divid. $= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1})} =$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}+2 \cancel{-x}+1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}$ [quando x è grande il den. non si annulla e posso fare l'uguaglianza] $= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}} = 0^+$

4) [ENTRAMBE DIV. E DISC.]

$\lim_{x\to\lambda} F(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\lambda} g(x) = -\infty$ | $\lim_{x\to\lambda}$ [comb. lin.] $= \begin{cases} +\infty & a>0,\ b<0 \\ \text{IND.} & \text{se } a \text{ e } b \text{ concorde} \\ -\infty & a<0,\ b>0 \end{cases}$

17/10/2006

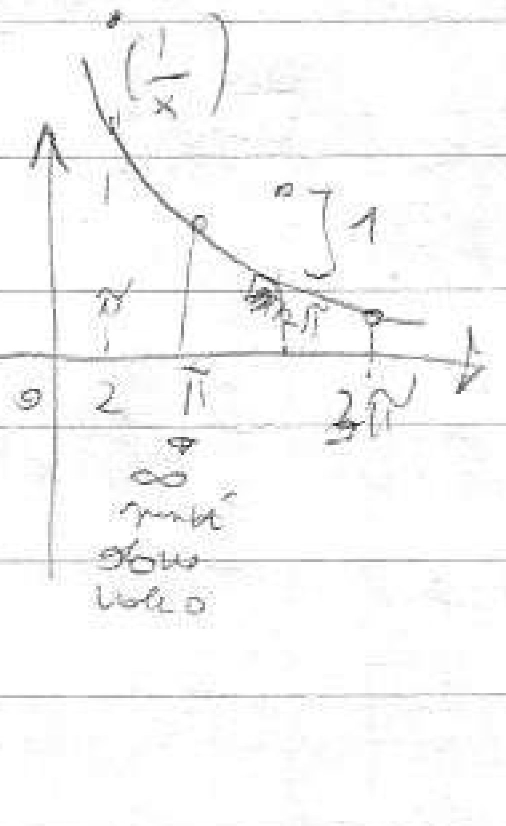
5) [ALMENO 1 NON HA LIM]

$\lim_{x\to\lambda} f(x) =$, $\lim_{x\to\lambda} g(x)$, $\lim_{x\to\lambda}\left[af(x)+bg(x)\right]$

$\lim_{x\to\lambda} f(x) = \nexists$ Ex: $\lim_{x\to+\infty}\left[\overset{\text{diverge}}{x} + \underset{\text{indet.}}{\sin(x)}\right]$ $\underbrace{x-1}_{\downarrow\ +\infty} \leq x+\sin x$ $\Rightarrow$ diverge a $= +\infty$

[la somma è regolare anche se uno è irregolare]

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} + \sin(x)\right)$ $\underbrace{\frac{1}{x} - 1}_{-1} \leq \frac{1}{x} + \sin x \leq \underbrace{\frac{1}{x} + 1}_{1}$



$\forall\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \to \forall k \in \mathbb{N}$

↳ $\sin x + \frac{1}{x} > 0$

$f(x) = \frac{1}{x} + \sin(x)$ Se calcolo $\left[\begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) > 0 \\ f(k\pi) > 0 \end{array}\right\} \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

il grafico sarà sempre sopra l'asse delle x, anzi $\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) > 1$

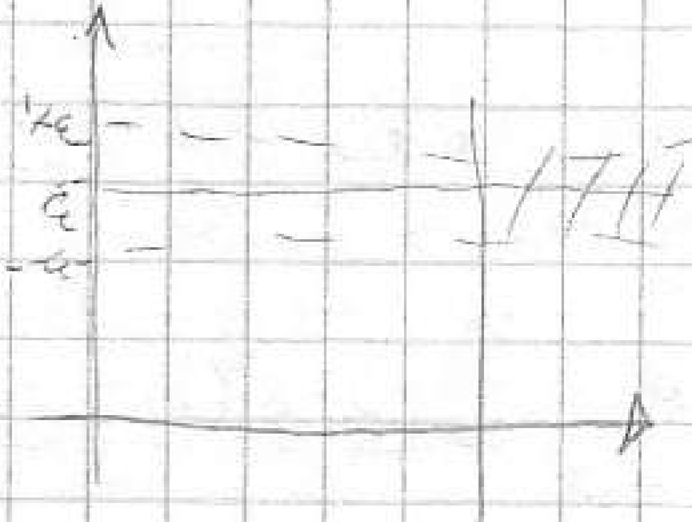
Allo stesso tempo ci sono ∞ valori dove è -1, quindi $-1 < f\left(\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right) < 0$

$\Downarrow$

- $f(x)$ non diverge a $+\infty$ (non esiste $M > 0$ che / $f(x) > M$)
- " " " a $-\infty$ (" " $-M < 0$ / $f(x) < -M$)
- " ad ex non può convergere a 1 (o -1)

$\Downarrow$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \nexists$

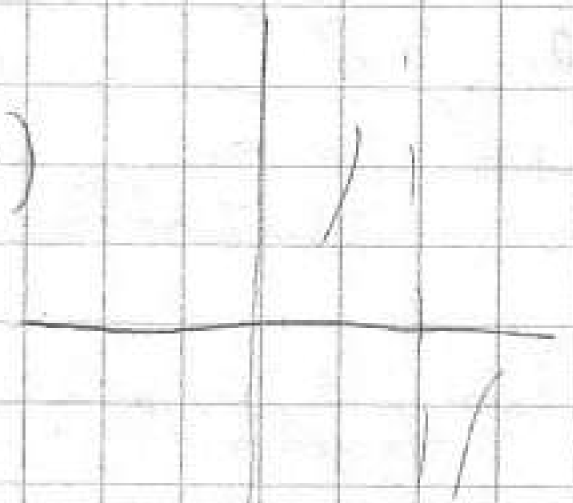


→ la $f(x)$ non può essere rinchiusa dentro . ///

$\Downarrow$

$\exists \lim_{x \to +\infty} (x + \operatorname{tg} x)$ $\nexists \lim_{x \to +\infty} (x + \boxed{\operatorname{tg}^2(x)})$ → $\exists \infty$ punti in cui si annulla, non diverge a $+\infty$

$x + \operatorname{tg} x \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$ $\forall x \in \left(\frac{\pi}{2}+k\pi-\delta, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$



$f(x) > 0 \Rightarrow f \not\to -\infty$ → non può divergere

$x + \operatorname{tg} x \xrightarrow{x \to +\infty} -\infty$ $\exists \rho > 0 / \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi+\rho\right] \to f(x) < 0$

$\Downarrow$

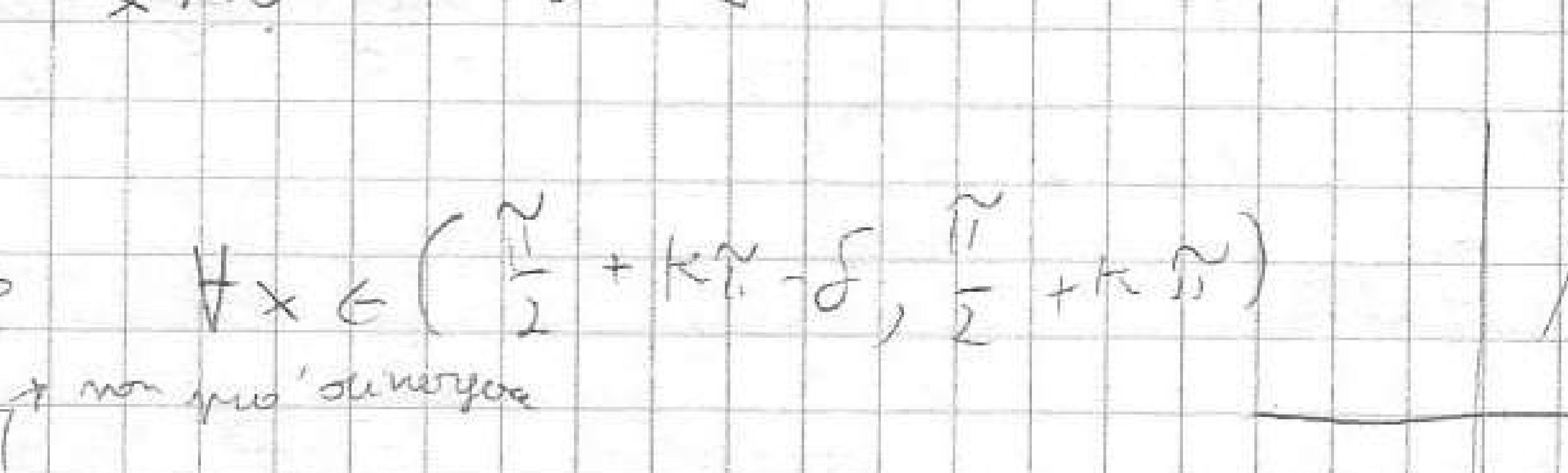
$f(x) \not\to +\infty$

$\nexists$

Ex: $\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq +\infty$ perché, per la periodicità di $\operatorname{tg}(x)$, $\exists \infty$ punti

$\bar{x}$ in cui la $f(x)$ assume valori negativi

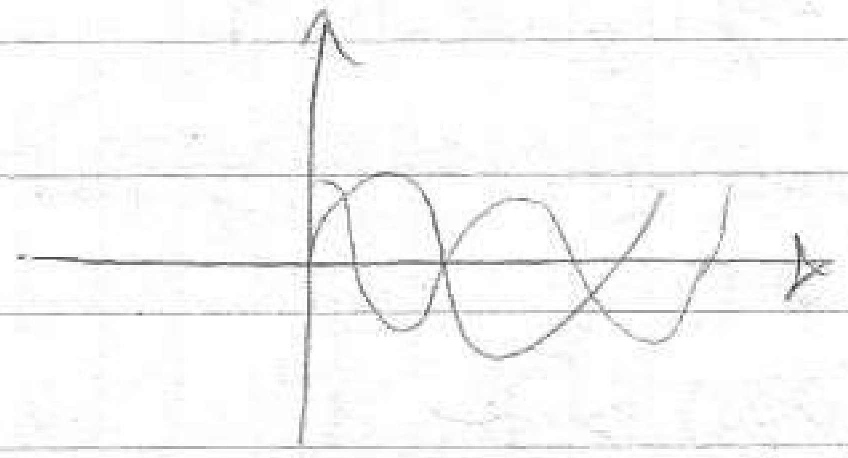
Per $f(x) = x + \operatorname{tg}^2 x$,



$f(x) > M$ sempre

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin(x)+tg^2(x)\right)$ Domanda: $\lim_{x\to\lambda} f(x)=\nexists$ e $\lim_{x\to\lambda} g(x)=\nexists$. È

possibile che $\lim_{x\to\lambda}\left[af(x)+bg(x)\right]$?



Dato $\lim_{x\to\lambda} f(x)$ e $\lim_{x\to\lambda} g(x)$; $\lim_{x\to\lambda}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$

1 l ~~Fin~~ I LIMITI CONVERGONO → lim del prodotto = prodotto dei due limiti

2 1 CONV., 1 DIV. A $+\infty$

$$\lim_{x\to\lambda}\left[f(x)g(x)\right]=\begin{cases}\pm\infty & se\ l\gtrless 0\\ \overset{IND.}{\boxed{\infty\cdot 0}} & se\ l=0\end{cases}$$

Ex: $\lim_{x\to0} x\cdot lg x = 0\cdot\infty$

$\neq$

posso scriverla in maniera equiv. ← $\lim_{x\to0}\left[x\cdot\frac{1}{x^2}\right]=0\cdot\infty$

$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

Nemo =

NON SONO UGUALI

$$\left.\lim_{x\to0}\underbrace{x^2\cdot\frac{1}{x}}_{restrizione}=\lim_{x\to0^+}x=0\right]$$

3 1 CONV., 1 DIV a $-\infty$ (analogo)

4 ENT. DIV.

- se ent a $+\infty$ il prodotto è $+\infty$
- " " " $-\infty$ " " " $-\infty$

28/10/2004

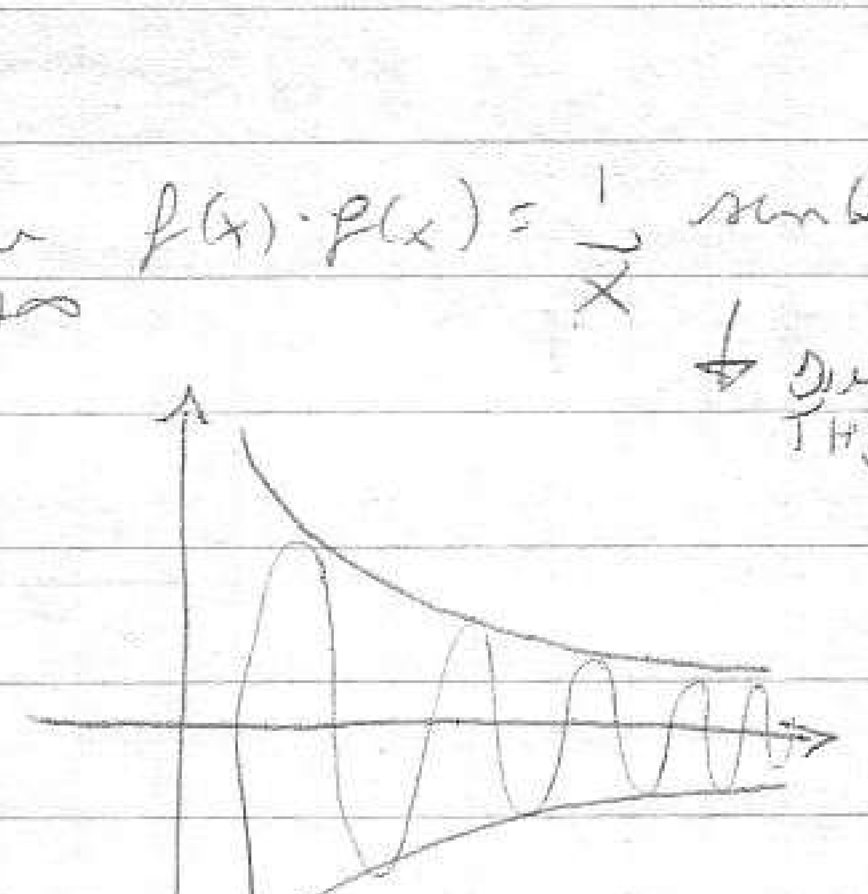
$\lim_{x\to\lambda} f(x)=l$, $\lim_{x\to\lambda} g(x)=+\infty$; $\lim_{x\to\lambda} f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}\pm\infty & l\gtrless 0\\ \mp\infty & l\gtrless 0\\ 0\cdot\infty & l=0\end{cases}$

$\lim_{x\to\lambda} f(x)=\nexists$; $\lim_{x\to\lambda} g(x)$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{x}\sin(x)=0$

NON LO POSSO DIRE ⇒ ∄

↓ DIM CON IL TH. DEL CONFRONTO

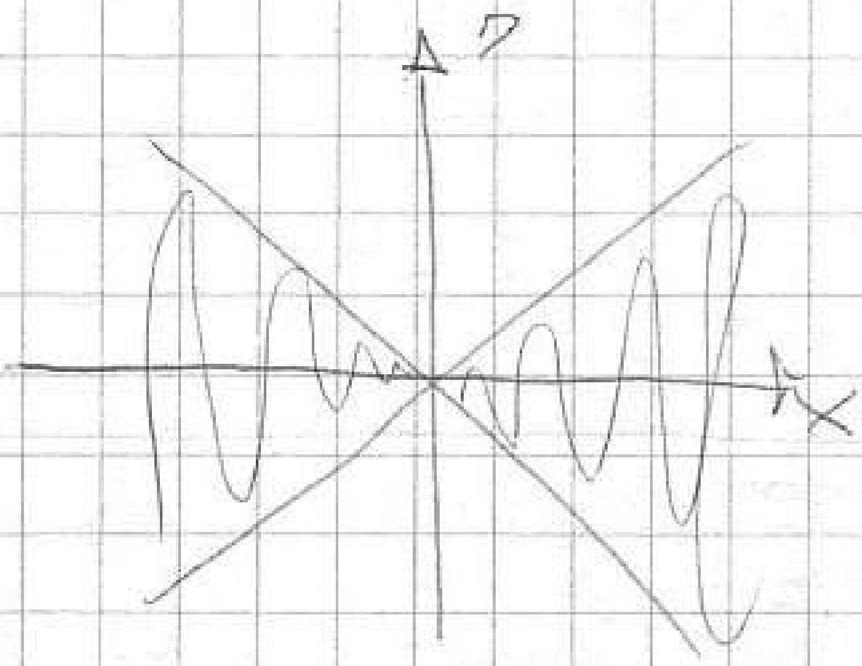
$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{0\ x\to+\infty}\le\frac{1}{x}\sin(x)\le\underbrace{\frac{1}{x}}_{0\ x\to+\infty}$$



$$\lim_{x\to+\infty}\left[\overset{\infty}{x}\,\overset{0}{\sin\frac{1}{x}}\right]=\overset{IND.}{\infty\cdot0}$$ → Trasformiamo in una equivalente

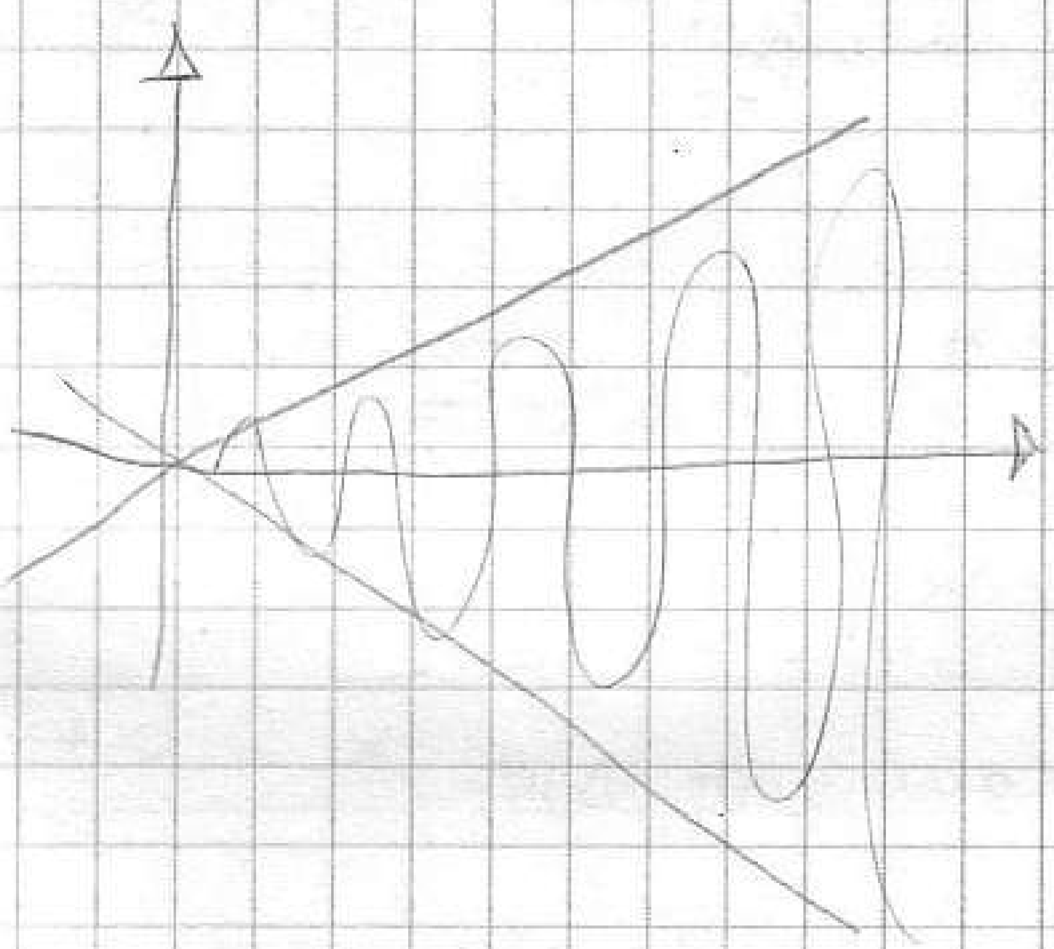
Se $x > 0$ $\qquad \overset{\to 0}{-x} \leq x \cdot \sin\frac{1}{x} \leq \overset{\to 0}{x}$ $\qquad \lim_{x \to 0^+} x \sin\frac{1}{x} = 0$

Se $x < 0$ $\qquad x \leq x \sin\frac{1}{x} \leq -x$



$\lim_{x \to +\infty} \boxed{x \cdot} \sin x$

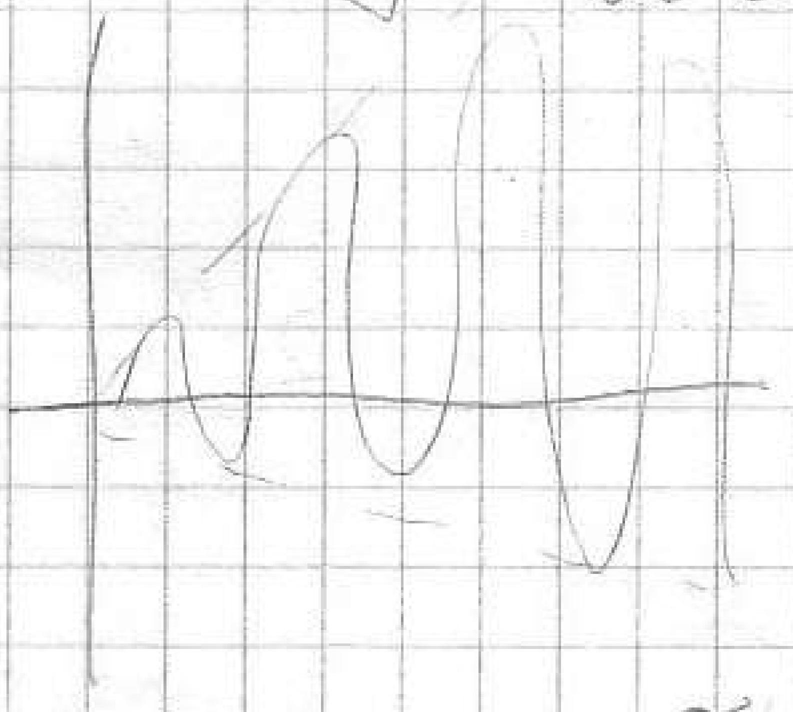
$\underset{-\infty}{-x} < x \sin x < \underset{+\infty}{x}$ → NON CI DICE NULLA



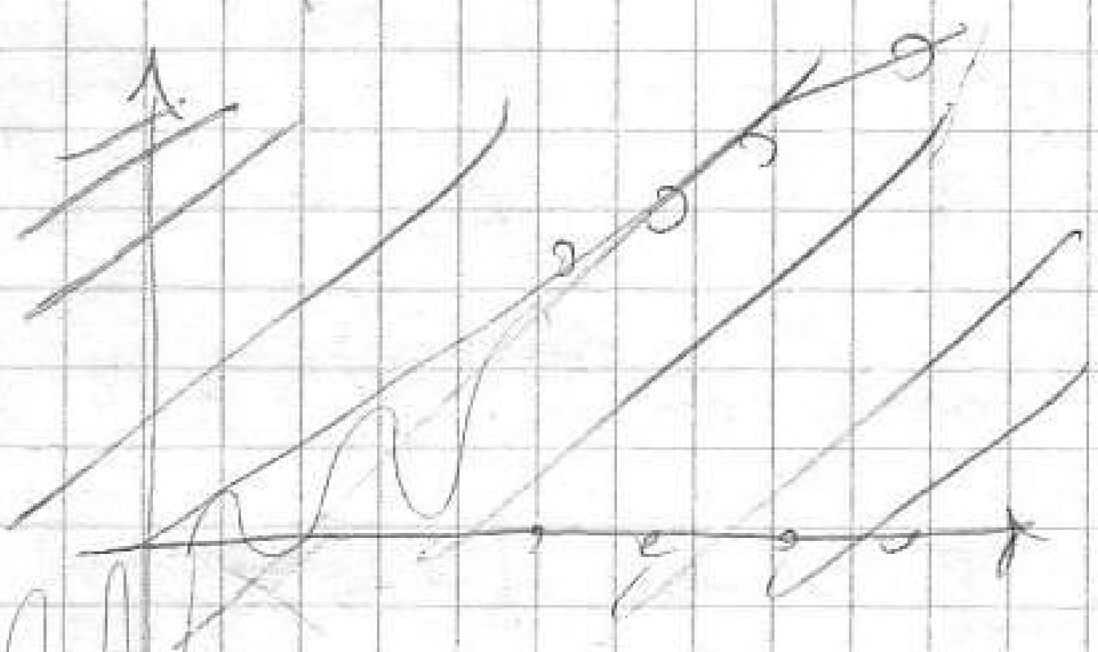
$\Rightarrow \nexists$

$\frac{1}{2}x + \boxed{x \cos x}$ stesso comportamento di $\cos(x)$

$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{2} + \cos(x)\right) =$



$\lim_{x \to +\infty} x(1 + \cos x) = \nexists$



$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{3}{2} + \cos x\right) = +\infty$

$\underset{+\infty}{\frac{x}{2}} \leq \underset{+\infty}{x\left(\frac{3}{2} + \cos x\right)}$

(37)

$\frac{3}{2}-1 \le \frac{3}{2}+\cos x$, Se moltiplico per lo stesso valore non cambia $\to \frac{x}{2} \le (\frac{3}{2}+\cos x)x$

Det, il valore di $c \in \mathbb{R}$, il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\left[c+\sin(x)\right] \quad \text{dove} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Esame!

2 ex in 1 h e 15

2 t. : in 45 min

02/11/2004

$\lim_{x\to\lambda} f(x) = \nexists$, $\lim_{x\to\lambda} g(x)$; $\nexists \lim_{x\to\lambda} f(x)\cdot g(x)$

Ex: $f(x) = a_n = (-1)^n$; $g(x) = b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ $[D: \mathbb{N}]$

$\downarrow$ IND. $(-1 \ldots 1 \ldots -1 \ldots)$ $\downarrow$

$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \nexists$ $\qquad$ $\lim_{n\to+\infty} g(x) = 0$ [converge]

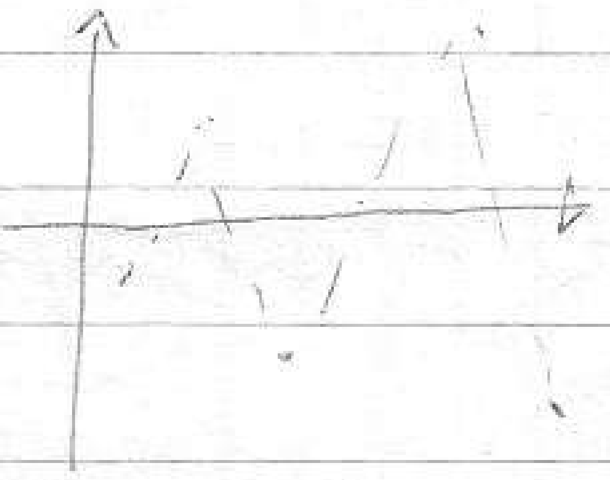
$\downarrow$

$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$ $\quad \to -b_n \le a_n b_n \le b_n$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow\qquad\qquad\downarrow$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 0\qquad\qquad 0$

Ex: $g(x) = (-2)^n$



$\to$ né conv. né div.

$\downarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} \overset{(-2^n)(-1)^n}{a_n b_n} = \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

RAPPORTO TRA FUNZIONI

$\lim_{x\to\lambda} f(x) = l$ $\qquad$ $\lim_{x\to\lambda} g(x) = m \ (\neq 0)$ $\qquad$ FUNZIONI CONVERGENTI $\lim_{x\to\lambda} \boxed{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{l}{m}$

IP.

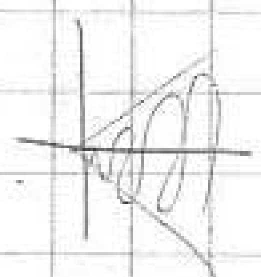
- Se $\lambda \in \mathbb{R}$ ci assicuriamo che $f(x) \neq \ \forall\ x \in I(\lambda)$
- Se $\lambda = +\infty$, $f(x) \neq 0 \ \forall\ x > \cancel{x}_0$
- Se $\lambda = -\infty$, $g(x) \neq 0 \ \forall\ x < x_0$

$\lim_{x\to\lambda} f(x) = l \neq 0$; $\lim_{x\to\lambda} g(x)$ $\lim_{x\to\lambda}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } l>0 \text{ e } m=0^+ \\ -\infty & \text{se } l<0 \text{ e } m=0^+ \\ -\infty & \text{se } l>0 \text{ e } m=0^- \\ +\infty & \text{se } l<0 \text{ e } m=0^- \\ & m=0 \\ \nexists & \text{se } l\neq 0, \text{ [ne dall'alto e ne dal basso]} \end{cases}$

Ex: $$\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\to 1}{(x+1)}}{\underset{\to 0}{e^{-1/x^2}}} = +\infty$$ (se era $x-1$, il lim era $-\infty$)

Ex: $$\lim_{x\to 0^-}\frac{\overset{-1}{(x-1)}}{\underset{0^-}{\sin(x)}} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\overset{\to -1}{x-1}}{\underset{\to 0}{x\sin(\frac{1}{x})}} = \nexists$$

ne' dall'alto e ne' dal basso



Dimmenso il denominatore si ottiene un numero molto piccolo

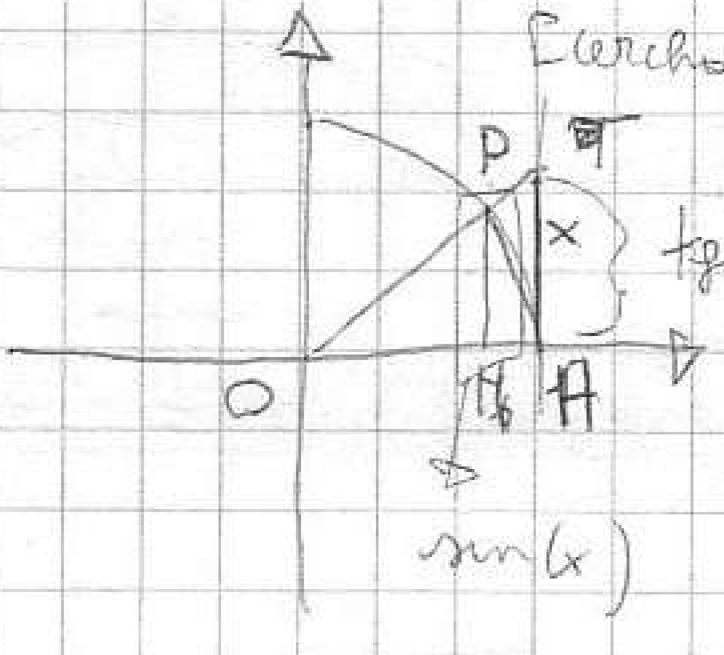
Ex: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overset{\to 1}{e^{-x}+1}}{\underset{\to 0}{\frac{1}{x}\sin(x)}} = \nexists$$ $\to 0$ ma:

non so il SEGNO

Se entrambe le $f(x)$ sono infinitesime c'è la 3ª indeterminazione! $\frac{0}{0}$

Ex: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, Dim:

[Cerchio goniometrico]



[OA=1]

$0 < x < \frac{\pi}{2}$

Caso per $x\to 0^+$

$$A(\overset{\triangle}{OAP}) = \frac{\overbrace{OA}^{1}\cdot\overbrace{\cancel{A}PH}^{\sin x}}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$$

[settore area circolare]

$$A(\overset{\frown}{OAP}) = \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad A(\overset{\triangle}{OAT}) = \frac{tg\,x}{2}$$

L'area del triangolo $\overset{\triangle}{OAP}$ < Area settore circolare $\overset{\frown}{OAP}$

, e quest'ultima è < di $\overset{\triangle}{OAT}$ $\Rightarrow$ $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tg\,x}{2}$ $\to$ $\sin x < x < tg\,x$

↓ divido per SIN(x) [sempre + in quell'intervallo e ≠0]

$\Leftarrow$

$1 < \frac{\cancel{\sin x}\, x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ $\to$ Considero i reciproci $\to$ $\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\cos x} < \frac{\sin x}{x} < \underset{\underset{1}{\downarrow}}{1}$ 0^+

$\Leftarrow$

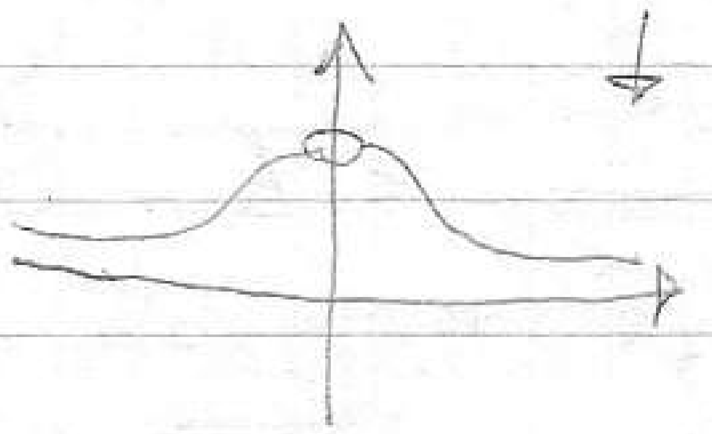
$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$

Dim: $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x}$; Si conosce ~~f(x)~~ (x) P(e) [sim. rispetto all'asse] dimostrato con:

$$f(x) \to \frac{\sin x}{x} \ ; \ f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\cancel{-}\sin(x)}{\cancel{-}x}$$

Il comportamento nell'intorno destro = intorno sinistro $\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



//

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin\frac{1}{x} = \left(\boxed{\infty \cdot 0} \text{ INDETERMINATA}\right) \to \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \ ; \text{ Pongo } t = \frac{1}{x},$$

se $x \to +\infty$, $t \to 0^+ \Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$

Ex: $\lim_{x \to \lambda} f(x) = l \neq 0$ e $\lim_{x \to \lambda} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \to \lambda} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0^+ \text{ se } l > 0 \\ 0^- \text{ se } l < 0 \\ \text{~~0 se l=0 e -∞~~} \end{cases}$

// e // $= -\infty$ // $= \begin{cases} 0^+ \text{ se } l < 0 \\ 0^- \text{ se } l > 0 \end{cases}$

~~lim~~ // $= l = 0^-$ e // // $= -\infty$ // $= \begin{cases} 0^+ \text{ se } l = 0^- \\ 0^- \text{ se } l = 0^+ \end{cases}$

// $= 0^+ = l$ // // // $= -\infty$ // $= \begin{cases} 0^- \text{ se } l = 0^+ \\ 0^+ \text{ se } l = 0^+ \end{cases}$

// $= 0 = l$ // // // $= \{ 0 \text{ se } l = 0$

da ricontrollare

//

Ex: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{\to 0}{\left(\frac{1}{x} \sin(x)\right)}}{\underset{\to -\infty}{(-x)}} = 0$

//

$\lim_{x \to \lambda} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to \lambda} g(x) = +\infty \to \lim_{x \to \lambda} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \to$ INDETERMINATA

Es: $\lim_{x \to +\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots}{b_m x^m + \ldots}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases}\frac{a_n}{b_m} & \text{se } m=n\\ 0 & \text{se } m>n\\ \pm\infty & \text{se } m<n\end{cases}$$

$$\underset{x\to-\infty}{''} \quad '' = \left\{ \text{dipende dal coefficiente} \right.$$

Ex: $\frac{x^3+2x-1}{3x^3+x+1}$ $\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x-1}{3x^3+x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\overset{\to 0}{\frac{2}{x^2}}-\overset{\to 0}{\frac{1}{x^3}}}{3(1+\underset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}+\underset{\to 0}{\frac{1}{x^3}})} = \frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to\lambda} f(x) = +\infty \;;\; \lim_{x\to\lambda} g(x) = l \neq 0 \quad \lim_{x\to\lambda}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases}+\infty & \text{se } l>0\\ -\infty & \text{se } l<0\end{cases}$$

$$'' \quad '' \quad '' \;;\; '' \quad '' \quad '' = 0 \quad '' \quad '' = \begin{cases}+\infty & \text{se } l=0^+\\ \nexists & \text{se } l=0\\ -\infty & \text{se } l=0^-\end{cases}$$

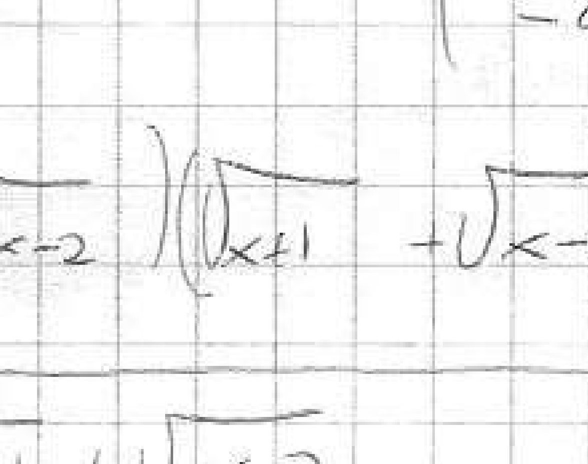
Ex

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\underset{\to+\infty}{(\quad)}} = 0^+$$

$$\lim_{x\to\lambda} f(x) = \nexists \;;\; \lim_{x\to\lambda} g(x) \overset{\nexists}{=} \exists \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\0}}{-\frac{1}{x}} \le \frac{\sin x}{x} \le \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{x}}$$



Ex: $\lim_{x\to1}\frac{1}{e^{x^2-1}}$ $\;,\; \lim_{x\to1}\frac{1}{e^{\frac{1}{1-x^2}}}$ → definibile in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{e^{\frac{1}{1-x^2}}} = 0^+ \Big] \;;\; \lim_{x\to1}\frac{1}{e^{\frac{1}{x^2-1}}} = 0^- \Big] \to \;'' \;\setminus\{1\}$$

• $\lim_{x\to 1} \frac{1}{e^{\frac{1}{1-x^2}}}$ → ∄

$\lim_{x\to 1^+}$ %. il den è NEGATIVO, l'esponente di e è $-\infty$, $\Rightarrow\ \to 0$

$= +\infty$

$\left[\frac{1}{1-x^2} \to -\infty\right]$

$e^{-\infty} \to 0$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}}$ → 0 da sinistra → +∞ $\quad e^{+\infty} \to +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{e^{\frac{1}{1-x^2}}} = 0^+$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{e^{\frac{1}{1-x^2}}} = \nexists$$

• in $\lim_{x\to 1} \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}}$ si inverte la situazione ma è sempre ∄

$\lim_{x\to\lambda} f(x) = \nexists \quad , \quad \lim_{x\to\lambda} f(x) = \nexists \to \lim_{n\to+\infty} \boxed{\frac{(-1)^n}{(-2)^n}} = 0 \quad \to \left(\frac{1}{2}\right)^n$

• $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} x^x = \lim_{x\to+\infty} e^{\overset{+\infty}{x}\,\overset{+\infty}{\log(x)}}$

$\lim_{x\to+\infty} e^{\boxed{x\log(x)}} \to +\infty = +\infty$

Ex.: $e^{\overset{0}{f(x)}\,\overset{+\infty}{\log(f x)}} \to \boxed{\infty^0} \to 5^a$ FORMA INDETERMINATA

$\lim_{x\to+\infty} \underset{\to +\infty}{x}^{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x)\right) \to 0} = \lim_{x\to+\infty} e^{\overset{0}{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\right)}\,\overset{\infty}{\log x}}$

$e^{\overset{0}{f(x)}\,\overset{0}{\log(g(x))}} = \boxed{0^0} \to 6^a$ FORMA IND

$\boxed{1^\infty} \to 7^a$ " "

⑧ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad \forall a\in\mathbb{R}$

7/11/2004

(Lim) $\boxed{1}$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\boxed{2}$ $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^{\boxed{a}} \to \in \mathbb{R}$ → LIMITI NOTEVOLI

Dim:

FATTORE ESPONENZ. NOB.

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \Big]^{I}_{D} \to \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right) \log(1+x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \log(1+x)^{\boxed{\frac{1}{x}}}$

Prendo $x = \frac{1}{t}$ $[t \neq 0]$ → Quando $x \to 0$ lo intendo da destra $[0^+]$, se $x \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty$

$t = \frac{1}{x}$

$\Downarrow$

$\lim_{t\to+\infty} \log \boxed{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t} \to \boxed{2}$ $\to \log e = 1$. Devo vedere che succede se $x \to 0^-$

Ripeto sapendo $t<0$, quindi $x \to 0^- \Rightarrow t \to -\infty \Rightarrow \lim_{t\to-\infty} \log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \to 1$

→ si comporta allo stesso modo

$\Downarrow$

$\boxed{3}$ $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

Prendo relativo a 2

Dim $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \Big]^{I}_{D}$ Prendo $t = e^x - 1$ se $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$ $\Rightarrow \lim_{t\to 0} \boxed{\frac{t}{\log(t+1)}} =$

$\Downarrow$

$e^x = t+1$ $x = \log(t+1)$

$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\boxed{\frac{\log(1+t)}{t}}} \to 1$ $= \underline{1}$

$\Downarrow$

$\boxed{4}$ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \underline{1}$

4

~~CONTINUITÀ - DISCONTINUITÀ~~

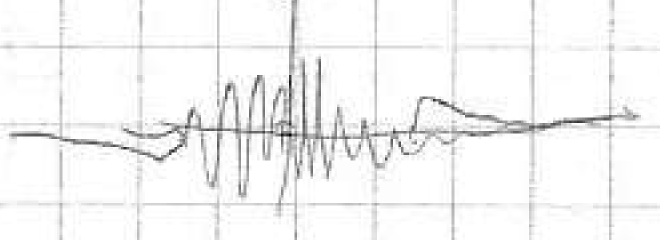
$f: D \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \text{\textcircled{$\mathcal{I}$}} D$, se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ o

si ha che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ oppure entrambe le situazioni

[$x = x_0$ → ASINTOTO VERTICALE]

se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$, $\exists\, y = l$ → AS. OR. DES.
m , $\exists\, y = m$ → " " SIN.] → $\nexists_x$ $\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = ?$

$\Downarrow$



CONTINUITA' DI UNA F(X) IN UN PUNTO

$f : D \to ($, $x_0 \in \mathcal{D}D \cap D$ [deve essere anche un punto del dominio]

⇓ *[tutti i punti fuori da quello insieme non li consideriamo]

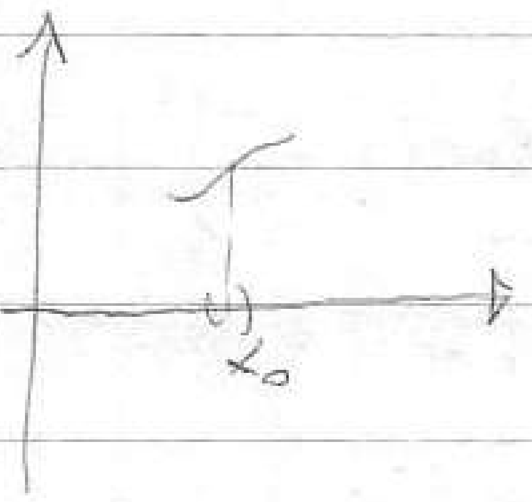
ha senso $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e ha senso $f(x_0)$. lo stesso per un PUNTO ISOLATO *

Si dice che una FUNZIONE E' CONTINUA in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

" " " " " " " in un SOTTOINSIEME se lo e' in TUTTI I PUNTI DEL SOTTOINSIEME [f è cont. in $A \subseteq D$ se è cont. $\forall$ p. $\in A$]

↓

Preso $I(x_0)$ "non stacchi la penna"



* $f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \in (0,1) \\ 1 & x = 2 \end{cases}$

↓

$D = (0,1) \cup \{\boxed{2}\}$ ← ISOLATO

↓ NE' P. DI CONT.
" " " DISC.

Con $x_0 \in \mathcal{D}D \cap D$!

$\overbrace{\lim_{x \to x_0} f(x)}^{(1)} \neq \overbrace{f(x_0)}^{(2)}$

↓

① $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x) = m$ [(1) non ha senso]

↓

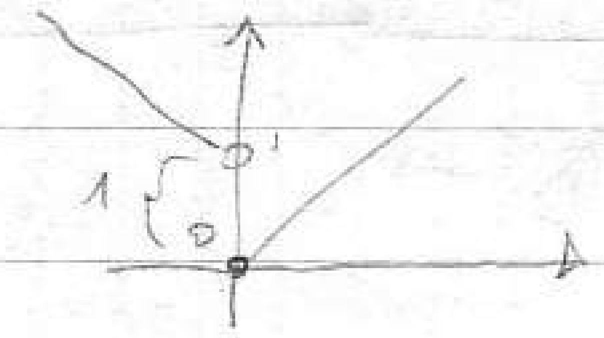
x_0 = P. DI DISCONTINUITA' DI 1° SPECIE [di salto

Ex. $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 1 - x & \text{per } x < 0 \end{cases}$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 - x) = \boxed{1}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = \boxed{0}$ → 2 lim. finiti ma <> tra loro. Δ

↓

Disc. di 1ª specie di salto 1

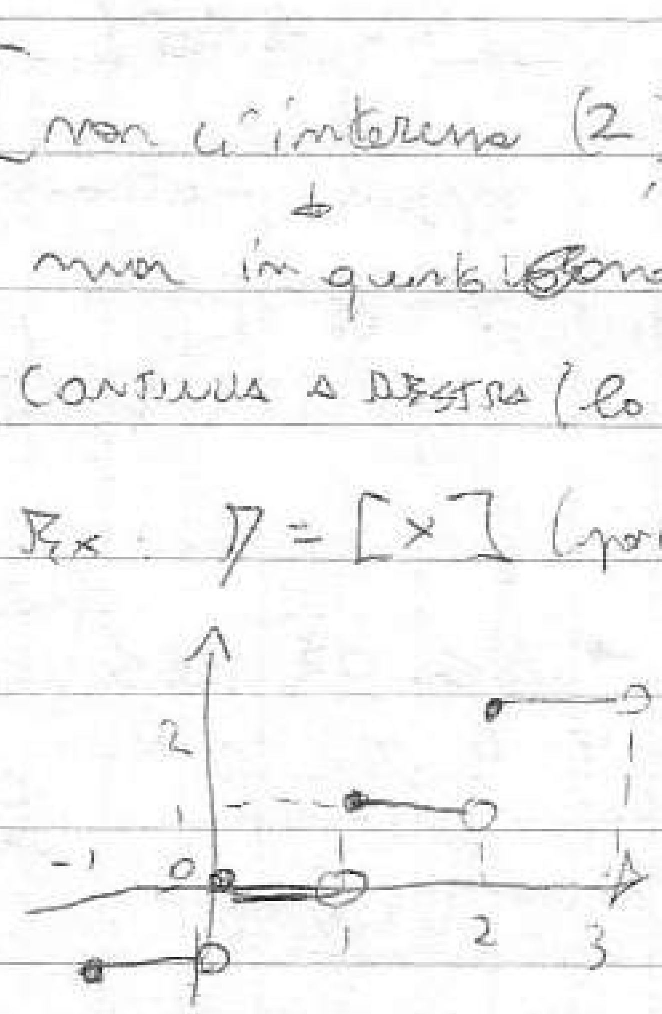


[non ci interessa (2)]

↓

ma in questo caso vale $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ e si dice CONTINUA A DESTRA (lo stesso per sinistra)

Ex. $y = [x]$ (parte intera)



Sempre continua a destra dei punti e mai a sinistra

$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x>0 \\ 1-x & \text{se } x<0 \end{cases}$ D: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ③

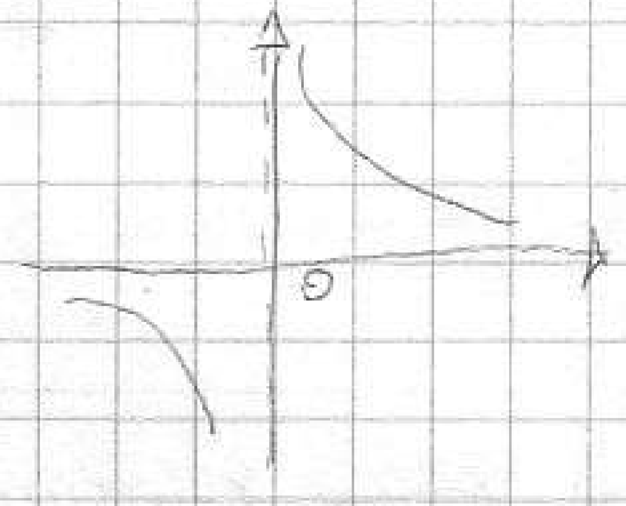
0 non $\nexists$ quindi non la consideriamo [alcuni testi lo considerano]

//

② se $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e/o $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ sono $= \pm\infty$ [almeno 1 dei 2]

x_0 è PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI 2 SPECIE

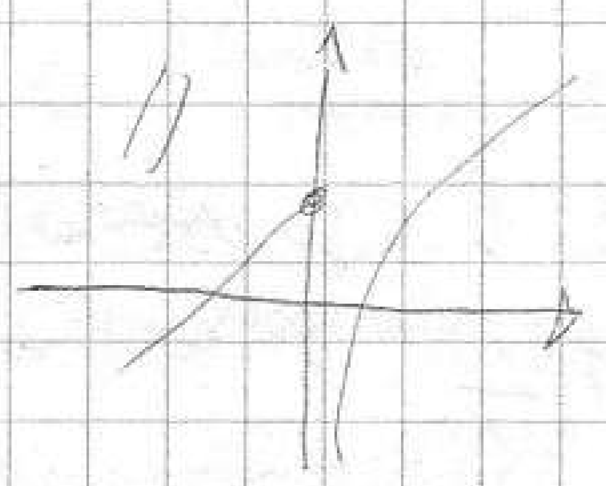
Ex: $f(x) = \frac{1}{x}$



In 0 f(x) non è definita quindi non è disc. [di 2 specie]

$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{con } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 0 è disc. di 2 specie

$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{se } x \leq 0 \\ \log x & \text{se } x > 0 \end{cases}$



//

③ Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$,

x_0 è PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI 3 SPECIE [o ELIMINABILE]

[perché ex:

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ma $0 \in D$,

quindi aggiungiamo e otteniamo $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{con } x \neq 0 \\ 0 & \text{con } x = \boxed{0} \neq 1 \end{cases}$

se mettessi $\boxed{1 \text{ al posto di } 0}$ la renderei continua]

↓

$\forall\, \alpha \neq 1$ l'ex era discontinua

(→)

Ex:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x \sin x - \sin x}{x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Determinare il valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ affinché $f(x)$ continua in 0

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = \alpha, \text{ cioè } \lim_{x \to 0} \frac{\overset{1}{e^x} \overset{0}{\sin x} - \overset{0}{\sin x}}{x^2 \to 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x (e^x - 1)}{x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overset{1}{\sin x}}{x} \cdot \frac{\overset{1}{(e^x - 1)}}{x} = 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

Tutte le $f(x)$ elementari sono continue nel loro insieme di definizione e sono + le regolari

Prop. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono CONTINUE in x_0, allora anche la funzione $a f(x) + b g(x)$ $[(a, b \in \mathbb{R})]$ è CONTINUA in x_0 [ex: $\sin x + e^x$]

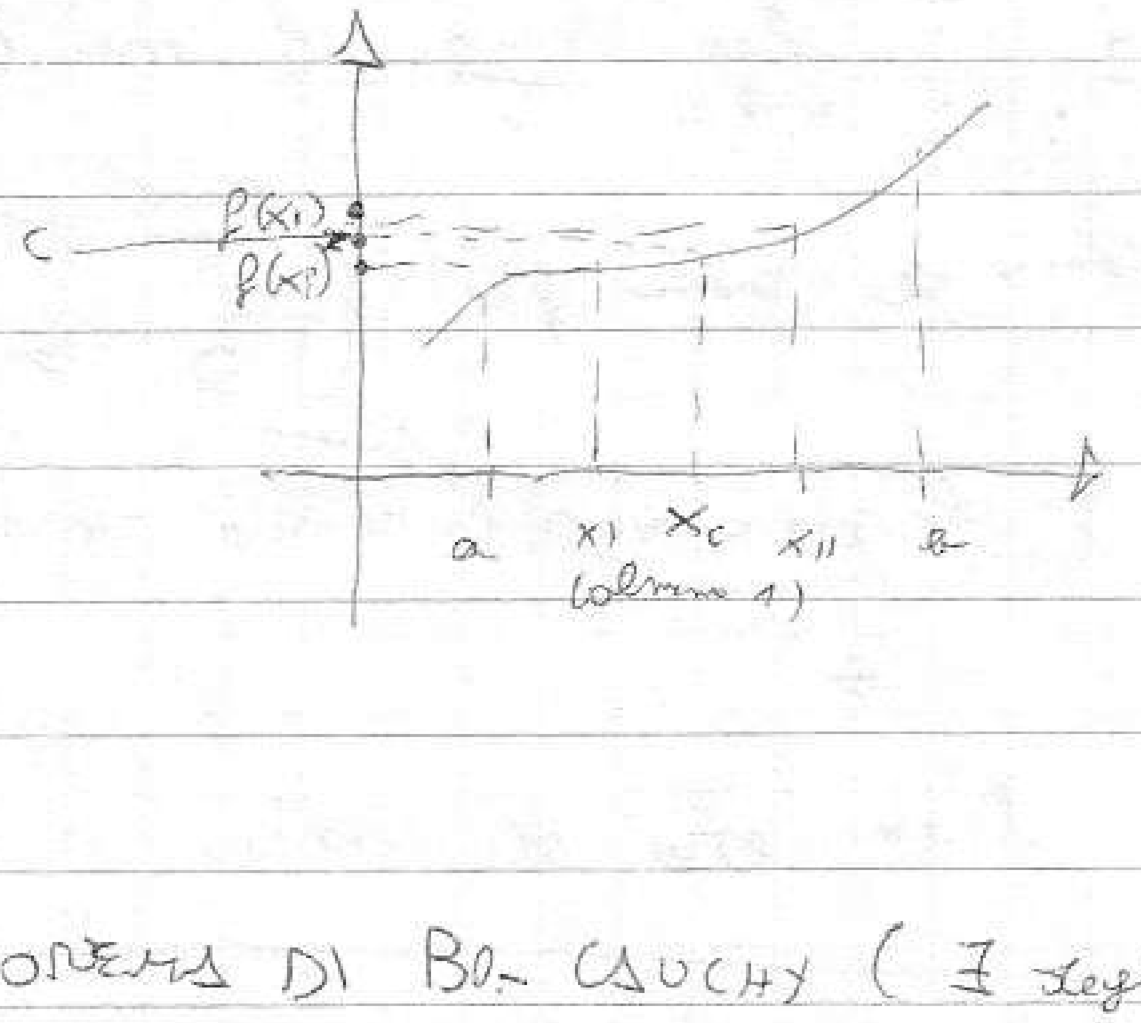
Prop lo stesso anche per $f(x) \cdot g(x)$ [ex: $\sin x \cdot e^x$]

Se f e g sono continue in x_0 e $g(x) \neq 0$ $\forall x \in I_\delta(x_0)$ allora anche $\frac{f(x)}{g(x)}$ è continua in x_0 [ex: $\frac{\sin x}{e^x}$] mentre [$\frac{e^x}{\sin x}$ è CONTINUA in TUTTI I PUNTI $\neq k\pi$]

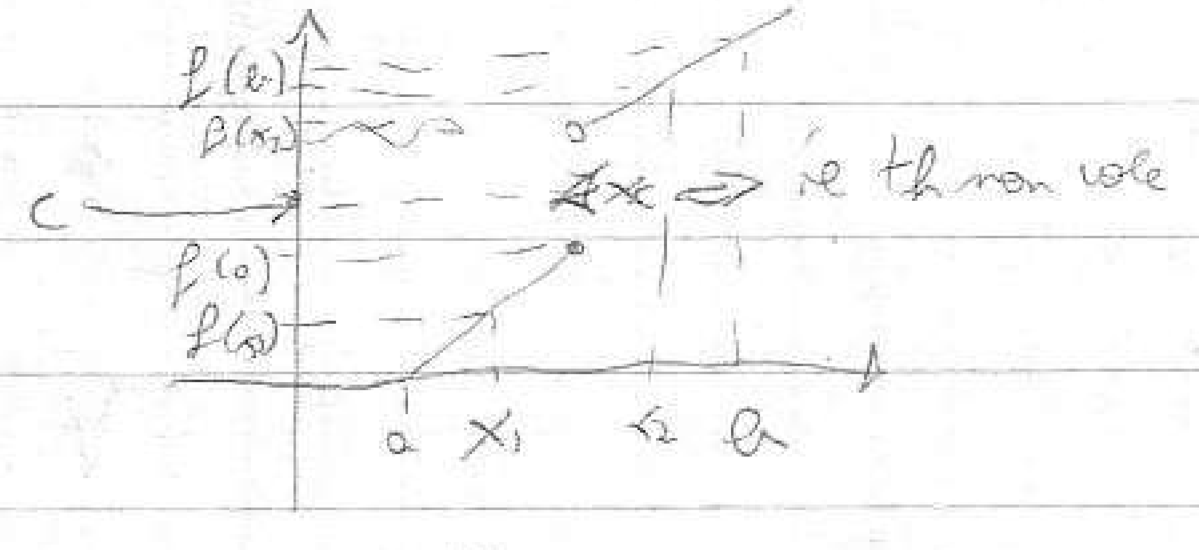
04/11/2004 - TEOREMI FONDAMENTALI SULLE f(x) CONTINUE

1/ TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI: Sia f continua in un intervallo I (può anche essere illimitato). Siano $x', x'' \in I$ (ex $x' < x''$), allora $\forall\, c$ compreso tra $f(x')$ e $f(x'')$ $\exists\, x_c \in [x', x''] \,/\, f(x_c) = c$

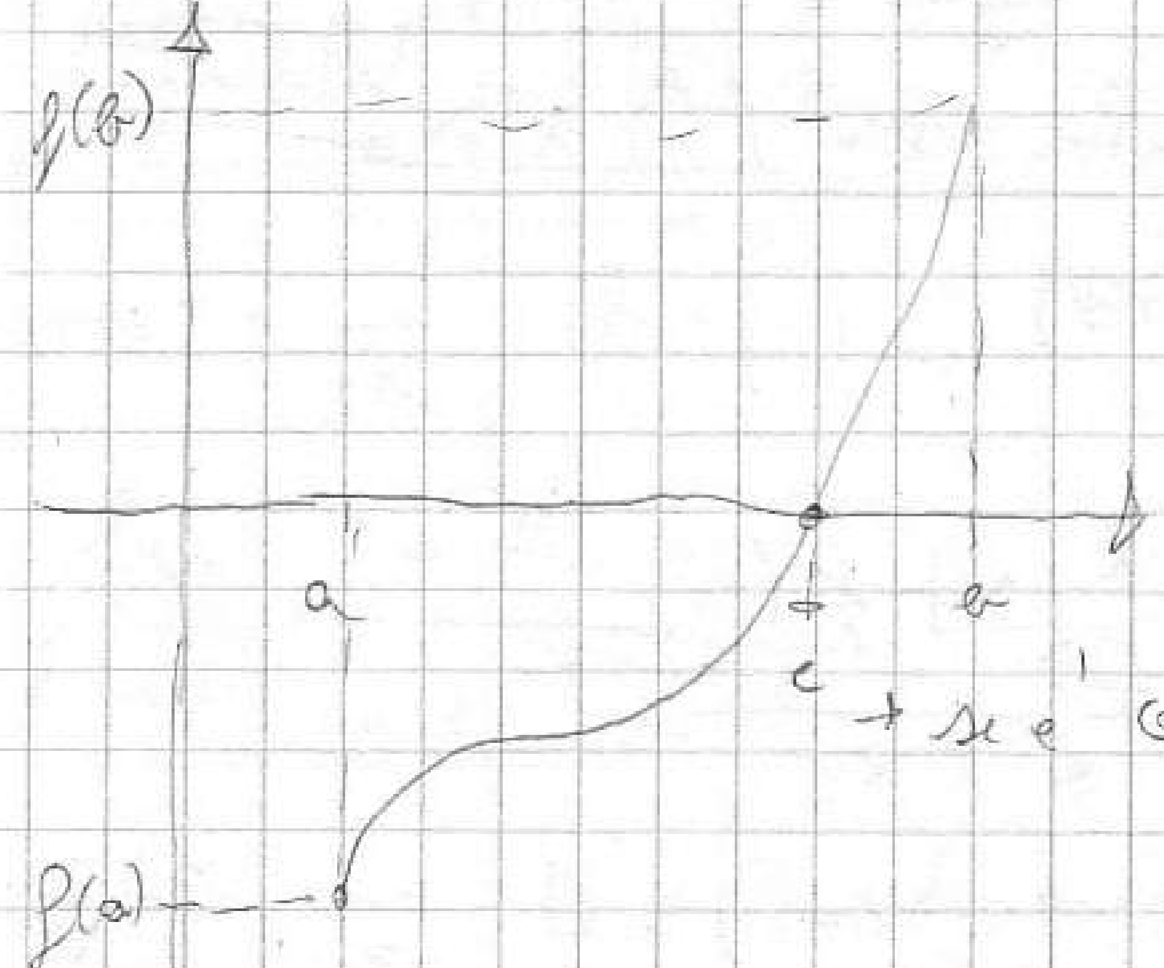
Ex:



Le teorema non vale in un intervallo "discontinuo".



2/ TEOREMA DI BOLZANO-CAUCHY ($\exists$ degli ZERI): Sia f continua in un intervallo I. Siano x' e $x'' \in I$ (ex $x' < x''$) / $f(x') \cdot f(x'') < 0$ (la f in quei 2 punti ha segno contrario) $\Rightarrow \exists\, c \in (x_1, x_{11}) \,/\, f(c) = 0$



Ex : $[a, b]$

+ se è continua deve intersecare l'asse x almeno 1 volta.

[GENERALIZZAZIONE]: Sia f continua in un intervallo $(\overset{\text{anche} = \pm\infty}{\lambda_1}, \lambda_2)$, se

$$\left(\lim_{x \to \lambda_1^+} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to \lambda_2^-} f(x)\right) < 0 \text{ oppure } (-\infty)$$

, allora $\exists\ c \in (\lambda_1, \lambda_2) \,/\, f(c) = 0$

Ex: $\log(x)$ $D: (0, +\infty)$; $\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$

Il prodotto è $= -\infty \cdot +\infty = -\infty \Rightarrow \exists$ 1 punto dove si annulla

3/ TEOR. DI WEIERSTRASS : Sia f continua in $[a, b]$. Allora $\exists\ x_m, x_M \in [a, b] \,/\, f(x_m) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ e $f(x_M) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$

Ex: e^x ; $[0, 1)$ − int. non chiuso

$\log x$; $[1, +\infty)$ − " " limitato

NON VALE WEIR. ~~PER~~ ~~IL MAX~~

[$\min e^x = 0$; $\min \log(x) = 1$]

3/11 2004

DERIVATA DI UNA F(x)

$f: D \to C$; $x_0 \in D \cap \mathcal{D}D$ Incremento della x_0 a $x_0 + h \in D$; ho ora $f(x_0 + h)$,

$$\overset{\text{var. indip.}}{h} \longrightarrow \overset{\text{var. dip.}}{f(x_0 + h) - f(x_0)}$$

Relazione tra gli incrementi quando $h \to 0$. ; $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ← RAPPORTO INCREMENTALE

Studiamo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$\Rightarrow$ F è derivabile in x_0 se quel limite $\exists$ finito.

$$\lim_{\substack{h\to 0\\(\Delta x)}} \frac{f(x_0+\overset{(\Delta x)}{h})-f(x_0)}{\overset{h}{(\Delta x)}\to x-x_0} = l = f'(x_0)$$; derivata della $f(x)$ in x_0.

$\left[\frac{df(x_0)}{dx} = Df(x_0)\right.$

[se è $\pm\infty$ o $\nexists$ la $f(x)$ non è derivabile]

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

(variazione dell' incremento della var. dip. in rapporto alla var. indip.)

f è derivabile in $A \subseteq D$ (in tutti i punti vale il rapporto incr.)

passiamo da $\left[y = f(x) : D \Rightarrow y = f'(x) : A\right]$

Ex:

- $f(x) = k : \mathbb{R}$; prendiamo $x_0 \in \mathbb{R}$. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$

$$\lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = k$$ è DERIVABILE in tutto il suo dominio

Passo da $f(x) = k : \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $f(x) = x : \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h} = 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$f(x) = x : \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} =$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x_0+h)}{\cancel{h}} = 2x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} =$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h(3x_0^2 + 3x_0h + h^2)}{\cancel{h}} = 3x_0^2$$

$f(x) = x^3 : \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

→ particolare con n∈ℤ — → se ∈ℕ, altrimenti D

$\forall \boxed{n \in \mathbb{N}}$, $f(x) = x^n$ è derivabile in $\boxed{\mathbb{R}}$ e si ha che $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x} : \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\forall x_0 \in D$ $\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = ~~\lim_{h\to 0} \frac{1}{x_0}\left(\frac{1}{h}-1\right)~~$

$\lim_{h \to 0} \frac{-h}{(x_0+h)\,x_0 \cdot h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x_0(x_0+h)} = \frac{1}{x_0^2}$

$f(x) = \frac{1}{x} : D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$ $\forall x \in D$

$= x^{-1}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x_0+h)^2} - \frac{1}{x_0^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2x_0h - h^2}{(x_0+h)^2 x_0^2 h} =$

$\lim_{h \to 0} \frac{-2x_0 - h}{(x_0+h^0)^2 x_0^2} = -\frac{2x_0}{x_0^4} = -\frac{2}{x_0^3}$

$f(x) = \frac{1}{x^2} : D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ $\forall x \in D$

- $f(x) = \sqrt{x}$: $D = [0, +\infty)$ (potenze ad exp. razionale)

$x_0 \in D$, $\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{x_0 - h} - \sqrt{x_0}}{h}$. Avevamo detto che h può essere $\gtrless 0$. MA qui il Dominio è limitato, quindi non possiamo scegliere $h < 0$.

Per il momento prendiamo $x_0 \in (0, +\infty) \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} =$

$\lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0} + \cancel{h} - \cancel{x_0}\,{}^1}{\cancel{h}(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}$ derivabile $\forall x \in D \setminus \{0\}$

Nell'origine si ha:

$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt{h}} = +\infty \Rightarrow$ $f(x)$, Nell'origine, pur essendo definita e continua, non è DERIVABILE

$f(x) = \sqrt{x}$: $[0, +\infty) \Rightarrow$ è derivabile in $(0, +\infty)$ e si ha che $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f: = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \; x^{-\frac{1}{2}}$

(⟶)

$f(x) = \sqrt[3]{x}$: $D = \mathbb{R}$; $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x_0+h} - \sqrt[3]{x_0}}{h} =$

$\cancel{\lim_{h \to 0}}$ $\left[A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2) \right]$ $A = \sqrt[3]{x_0+h}$, $B = \sqrt[3]{x_0}$

$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}}{\cancel{h}\left(\sqrt[3]{(x_0+h)^2} + \sqrt[3]{x_0(x_0+h)} + \sqrt[3]{x_0^2}\right)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$. Se scelgo $x_0 = 0$ $f(x)$ non è derivabile

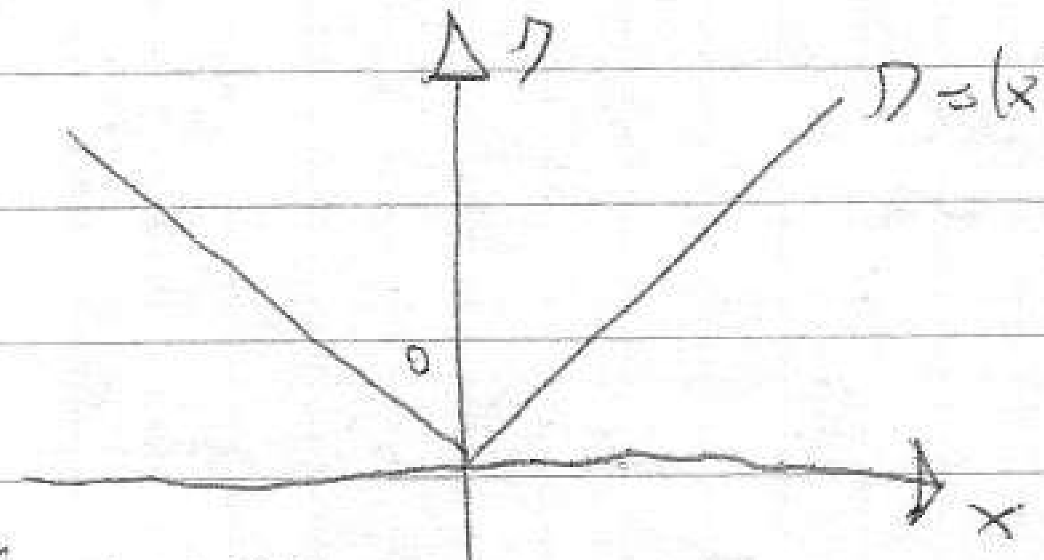
$f(x) = \sqrt[3]{x}$: $D = \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt[3]{h^2}} = \boxed{+\infty}$

$\Downarrow$

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{Q},\ f(x) = x^r \text{ è derivabile in } D \text{ e si ha } f'(x) = r x^{r-1} \quad \forall x \in D}$$

$- f(x) = |x|$: $\mathbb{R}$, f continua in $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1)\ x \text{ se } x \geq 0 \text{ in } [0, +\infty) \to |x| = x \\ 2)\ -x \text{ se } x < 0 \text{ in } (-\infty, 0) \to |x| = -x \end{cases}$$



- In 1), $D|x| = 1$ $\forall x > 0$
- In 2), $D|x| = -1$ $\forall x < 0$

Derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Con $x_0 = 0$:

$\lim_{h \to 0^\pm} \frac{|h|}{h} = \pm 1$, $\frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 \text{ se } h > 0 \\ -1 \text{ se } h < 0 \end{cases}$

Essendo $\neq$ nell'intorno di 0, $\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \nexists \Rightarrow f(x)$ non è derivabile nell'origine

$- f(x) = e^x$: $\mathbb{R}$ $\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \frac{(e^h - 1)}{h} = e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = e^x$: $\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = e^x$: $\mathbb{R}$

$- f(x) = a^x$ $(a > 0, \neq 1)$ $f'(x) = ~~a~~ a^x \cdot \log a$

$- f(x) = \log x$: $(0, +\infty)$ $\lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \log\left(\frac{x+h}{x}\right) =$

$\lim_{h \to 0} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} = 1) \lim_{h \to 0^+} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$, $h = \frac{1}{t}$, $t = \frac{1}{h}$

Se $h \to 0^+$, $t \to +\infty \Rightarrow$

$\lim_{t \to +\infty} \left[\log\left(1 + \frac{1/x}{t}\right)^t = \cancel{\lim} \log e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\right.$; 2) $\lim_{h \to 0^-} \log\left(1 + \frac{1}{x}t\right)^{1/t} = \Rightarrow$

$h \to 0^- \to t \to -\infty$

$\lim_{t\to-\infty} \log\left(1+\frac{1/x}{t}\right)^t = \frac{1}{x}$

$f(x) = \log x$ è deriv. in $(0,+\infty)$ e vale $f'(x) = \frac{1}{x}$

- $f(x) = \log_a x : \mathbb{R}^+ \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \log a}$

10/11/2004

- $f(x) = \sin x : \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\, 2 \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot$ [prostaferesi]

$\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) = \lim_{h\to 0} \cos\left(\frac{x+h}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sin h/2}{h/2}\right) \to 1 = \cos x$

$f(x) = \sin x : \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \cos x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \cos x \ \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = -\sin x$, "

$f(x) = tg\, x : D \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \forall x \in D$

- $f(x) = \cot g : D' \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \forall x \in D'$

(DERIVATA F(X) COMPOSTA)

TH: Sia $t = g(x)$, derivabile in x_0 e $y = f(t)$ derivabile $t_0 = g(x_0)$.

Allora $F(x) = f[g(x)]$ è derivabile in x_0 e si ha che $F'(x) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0)$

Ex: $F(x) = \sin(\log(x))$; $\quad g(x) = \log x = t \to$ derivabile in $\mathbb{R}^+$ (nel dominio)

$D = \mathbb{R}^+$ $\quad y = f(t) = \sin t \to$ " $\quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

F è derivabile in D [per le th] e si ha che $\forall x \in D$, $F'(x) = \overbrace{\cos(\log(x))}^{\sin(t)'} \cdot \overbrace{\frac{1}{x}}^{\log x'}$

Ex: $F(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad t = x^2$, derivabile in $\mathbb{R}$

$\Downarrow$ $\quad y = f(t) = \sqrt[3]{t}$, derivabile $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $[t_0 \neq 0]$

$D = \mathbb{R}$ $\quad t_0$ è immagine di x_0 secondo $x^2 \to t_0 = \boxed{x^2 = 0} \Rightarrow x = 0, \boxed{t = 0}$

Le th non la posso applicare nell'origine (manca la derivabilità di $t = g(x_0)$)

㊷ Studiamo $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h}$ (derivata nella origine) $= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^2}\cdot\sqrt[3]{h}}{h \sqrt[3]{h}} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \pm\infty$

la f(x) NON E' DERIVABILE in 0

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $F'(x) = \frac{1}{3}(x^2)^{-2/3} \cdot 2x \to \frac{2\cancel{x}}{3\sqrt[3]{x^{\cancel{4}}}}$

Ex: $F(x) = |x^3|$ $t = f(x) = x^3 \to$ e' der. $\forall x \in \mathbb{R}$

$\downarrow$ $D = f(t) = |t| \to$ " " " $\setminus \{0\}$

$D = \mathbb{R}$

Qual e' il valore di $x_0 / f(x_0) = 0 \mid t(x_0) = 0$. F e' derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$F(x) = \begin{cases} x^3 & \text{per } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{per } x < 0 \end{cases} \qquad F'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{per } x \cancel{\geq} > 0 \\ \boxed{0 \quad \text{per } x = 0} \\ -3x^2 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

strettamente maggiore, ma...

$$\lim_{h \to 0} \frac{|h^3|}{h} = \begin{cases} \lim_{h \to 0^+} \frac{h^{\cancel{3}}}{\cancel{h}} = 0 \\ \lim_{h \to 0^-} -\frac{h^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{h}} = 0 \end{cases} \Rightarrow = 0 \to$$ F(x) e' derivabile in tutto $\mathbb{R}$

[$|A+B| \leq |A| + |B|$ → DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE] come se non ci fosse il modulo

[$|A \cdot B| = |A|\,|B|$] $\lim_{h \to 0} \frac{|h^2 \cdot h|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h^{\cancel{2}}|\,|h|}{\cancel{h}} = 0$

Ex: $\sin|x|$ $t = |x|$, derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\downarrow$ $D = f(t) = \sin t$, " $\forall t \in \mathbb{R}$ → Ora il problema e' la f(x) interna.

$D = \mathbb{R}$, F e' derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si ha, $f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ \nexists, & x = 0 \\ -\cos x, & x < 0 \end{cases}$

In $x = 0$, $\lim_{h \to 0} \frac{\sin|h|}{h}$ $\begin{cases} \lim_{h \to 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1 \\ \lim_{h \to 0^-} \frac{\sin(-h)}{h} = -\lim_{h \to 0^-} \frac{\sin h}{h} = -1 \end{cases} \neq$

$\Rightarrow$ F non e' derivabile in $\nexists$ 0

(DERIVATA F(x) DI COMBINAZIONE LINEARE) H

TH: Siano f e g derivabili in x_0, allora $F(x) = af(x) + bg(x)$ e' derivabile in x_0 e si ha $F'(x) = a f'(x_0) + b g'(x_0)$

$\Downarrow$

Studiamo la derivabilita' dei POLINOMI.

(48) Ex: $P_n(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1$

Derivabile in $\mathbb{R}$ → $P'_n(x) = 15x^4 - 15x^2 + 4x - 1$

Ex: $f(x) = x + |x|$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f'(x) = \begin{cases} 2, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ Per $x=0$, $\lim_{h\to 0} \frac{h+|h|}{h}$ $\begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = 2 \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{h-h}{h} = 0 \end{cases}$

Non DERIVABILE

H

(DERIVATA DI UNA F(x) PRODOTTO)

Siano f e g derivabili in x_0, allora $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ è derivabile in x_0 e si ha:

$$F'(x) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Ex: $f(x) = \sin x \cdot \log x$, derivabile in $\mathbb{R}^+$; $f'(x) = \cos x \log x + \frac{\sin x}{x}$

$D = \mathbb{R}^+$

H

(DERIVATA DI UNA F(x) RAPPORTO)

Siano f e g derivabili in x_0, sia g continua in $I_\delta(x_0)$ e $g(x_0) \neq 0$, allora $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Ex: $f(x) = \frac{\sin x}{x^2+3x+1}$ $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

F è derivabile in D e si ha $F'(x) = \frac{\cos x(x^2+3x+1) - \sin x(2x+3)}{(x^2+3x+1)^2}$ $\forall x \in D$

H

Sia $t = f(x)$ invertibile in D. Sia f derivabile in x_0 e continua in $I_\delta(x_0)$. Sia $f'(x_0) \neq 0$. Allora ($f^{-1}(x)$ ovvero:) $x = f^{-1}(t)$ è derivabile in $t_0 = f(x_0)$ e si ha $D f^{-1}(t_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ dove $x_0 = f^{-1}(t_0)$.

Ex: $t = x^2 : \overbrace{[0, +\infty]}^{D}$ (in questo insieme è invertibile) → $x = \sqrt{t} : [0, +\infty)$

f è derivabile in D e continua; $f'(x) = 2x \to 0$. Nell'origine però si

annulla; $x = g(t) = \sqrt{t}$ è derivabile in $(0, +\infty)$ [$\sqrt{0} = 0$, annulla la der.]
e la derivata è:

$$D\sqrt{t} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \text{In } 0!$$

Ex: $t = f(x) = e^x \Rightarrow x = f^{-1}(t) = \log t$

Invertibile, continua, derivabile e $\neq 0 \Rightarrow f^{-1}(t)$ è derivabile in tutto il suo dominio $(\mathbb{R}^+)$

e si ha $D \log t = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\log t}} = \frac{1}{t}$

- $t = f(x) =$ ~~arc~~ $\sin x$: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow x = f^{-1}(t) = \arcsin t$: $[-1, 1]$

$f'(x) = \cos x = 0$ se $x = \pm\frac{\pi}{2}$, ovvero coincide con estremi $\Leftrightarrow t = \pm 1$
$\forall t \in (-1,1)$ è derivabile e si ha $D \arcsin t = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\oplus\sqrt{1-\sin^2 x}} \Rightarrow$

Per $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ il coseno è positivo

$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}$

[$f(x) = \arcsin x$: $[-1,1] \Rightarrow$ è derivabile in $(-1,1)$ e $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$]

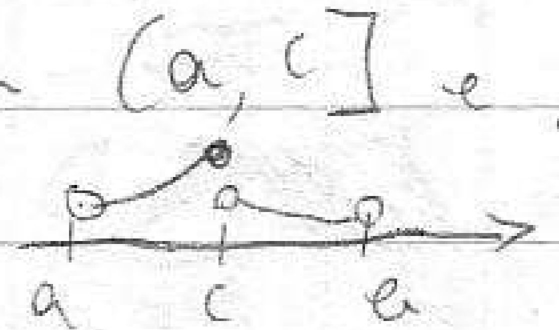
- " $=$ $\arccos x$ " $\Rightarrow$ " " " " $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$]

- " $=$ $\operatorname{arctg} x$: $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ " " $\mathbb{R}$ " $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

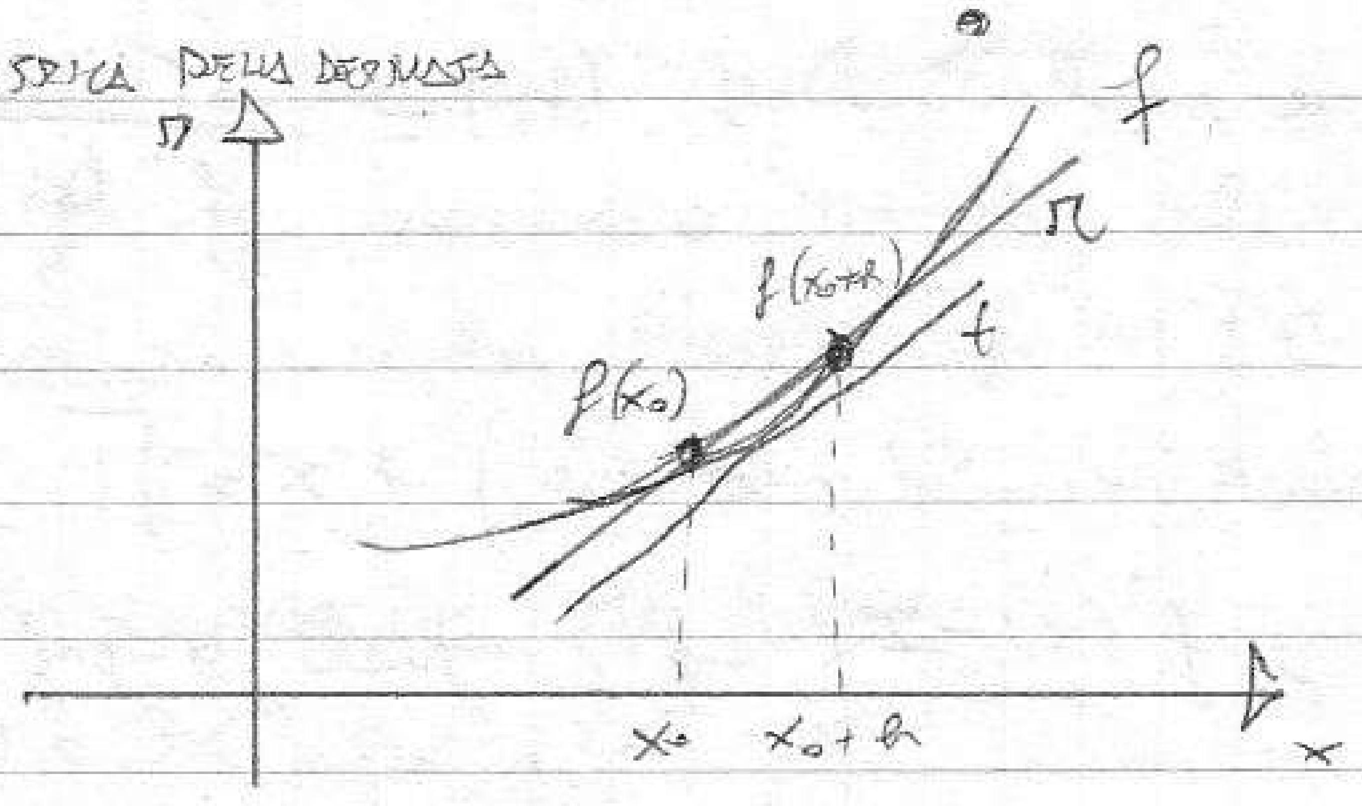
- " $=$ $\operatorname{arc\,cotg}$: $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ " " " " $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

11/11/04

Es: $c \in (a,b)$; f è continua in $(a,c]$ e f è continua in (c,b)
Ciò $\Rightarrow f$ è continua in (a,b) (non lo possiamo dire, ma il contrario $\Leftarrow$ sì)



INT. GEOMETRICA DELLA DERIVATA



$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_0+h) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{h}$$

$$\Downarrow$$

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

Dalla funzione si riconosce il rapporto incrementale. Se facciamo tendere h a x_0, la retta che fa] tende a sovrapporsi alla tangente del profilo nel punto [se la $f(x)$ è derivabile] - p secante va a sovrapporsi a t tangente

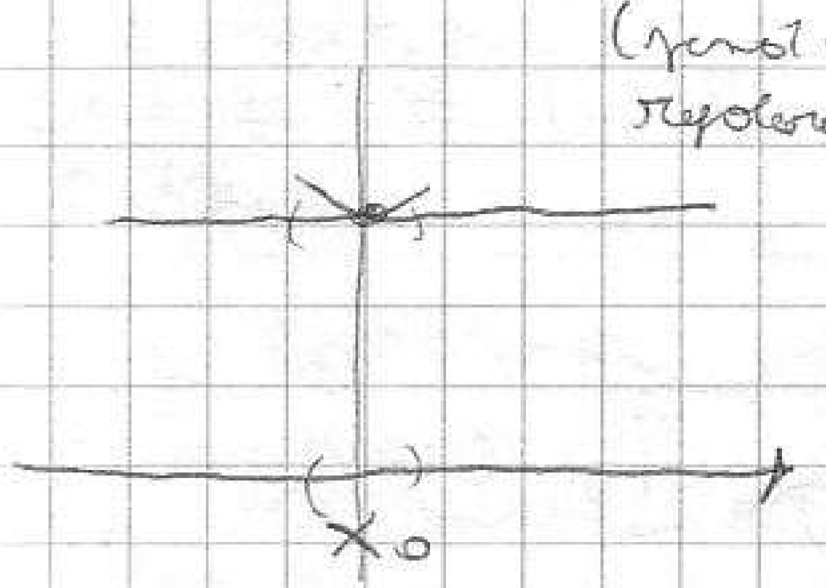
↓

$$\lim_{h\to 0}\left[\text{funzione rapp. incr.}\right] \rightarrow \quad y = f(x_0) + \underbrace{\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]}_{\text{derivata della } f \text{ in } x_0\ (m \text{ retta})}(x-x_0)$$

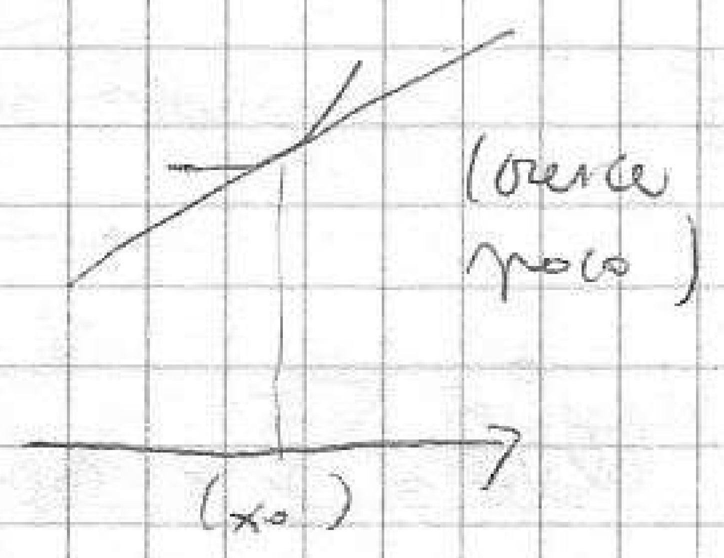
coefficiente angolare

$$\text{Se } \exists f'(x_0), \text{ sarà } = \boxed{m} \text{ di } t \text{ in } x_0 \Rightarrow \text{sapere la pendenza della } f\ (x_0)$$

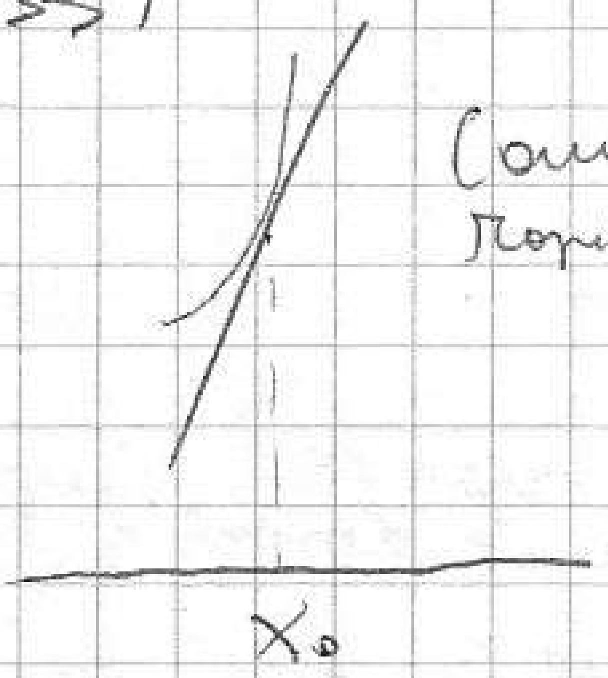
Ex: $m = 0$



$m = 1$



$m >> 1$



Criterio analogo per $m < 0$ — $m \neq$ "∞", poiché la tangente non può essere rappresentata

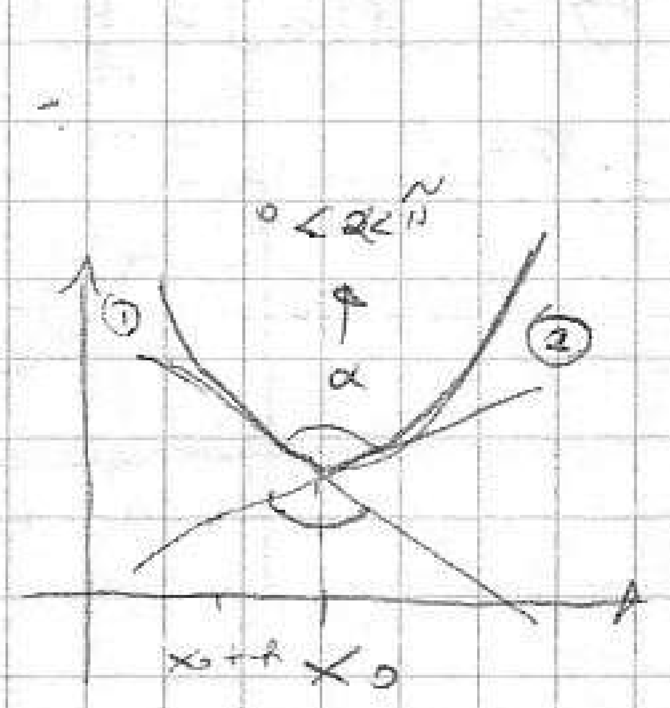
Ex: $f(x) = 5x^2 - 3x + e^x$. Calcola la tangente a f in $x_0 = 0$!

$f(x_0) = 1 \rightarrow P(0,1)$. Calcolo $f'(x) = 10x - 3 + e^x$; poi in $x_0 \rightarrow$

$f'(x_0) = -2 \rightarrow m \Rightarrow y = mx + m \rightarrow \boxed{y = 1 - 2x}$

$\nexists$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \begin{cases} 1 & \nexists \\ 2 & +\infty \\ 3 & -\infty \end{cases}, \text{ situazioni dove } \nexists f'(x_0)$$

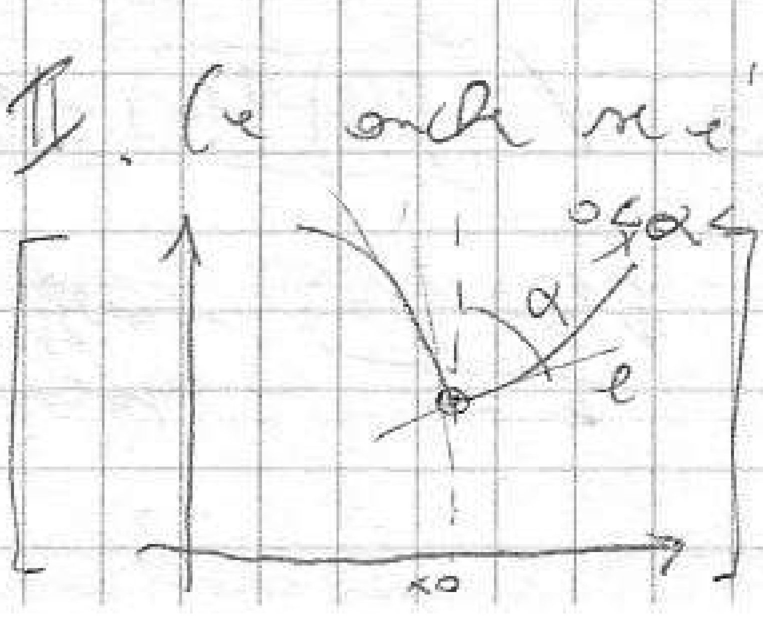


1) : $\nexists$ I $\begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \text{rapp. incr.} \overset{②}{=} l \neq \lim_{h\to 0^-} \text{rapp. incr.} \overset{①}{=} m \rightarrow \\ \\ \text{II } \lim_{h\to 0^+} \text{"} \overset{②}{=} l \neq \lim_{h\to 0^-} \text{rapp. incr.} \overset{①}{=} +\infty \end{cases}$

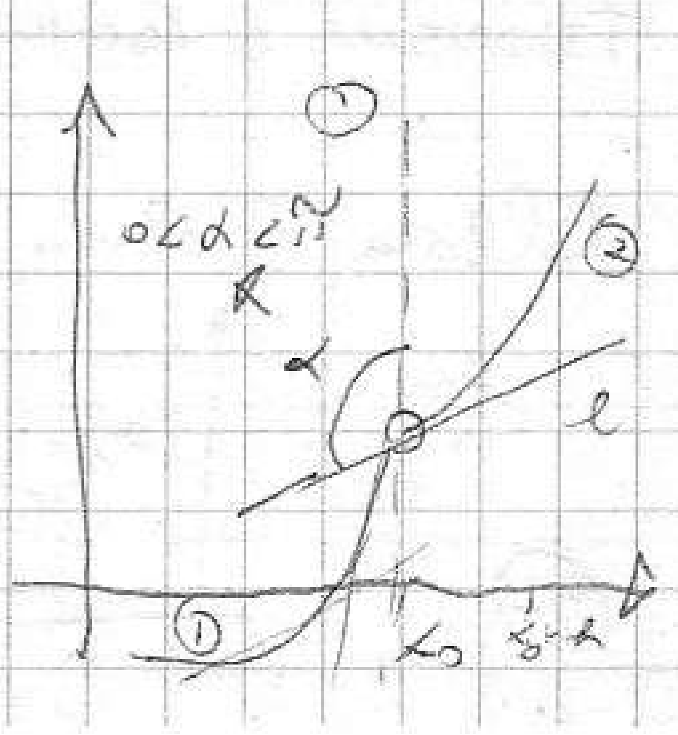
x_0 è:

I: PUNTO ANGOLOSO, anche in II. (e anche se è $-\infty$

il $\lim_{h\to 0^-}$ rapp. incr. $\rightarrow$



, e si hanno int. ① e ②



Sempre in 11 si può verificare che: 2°T

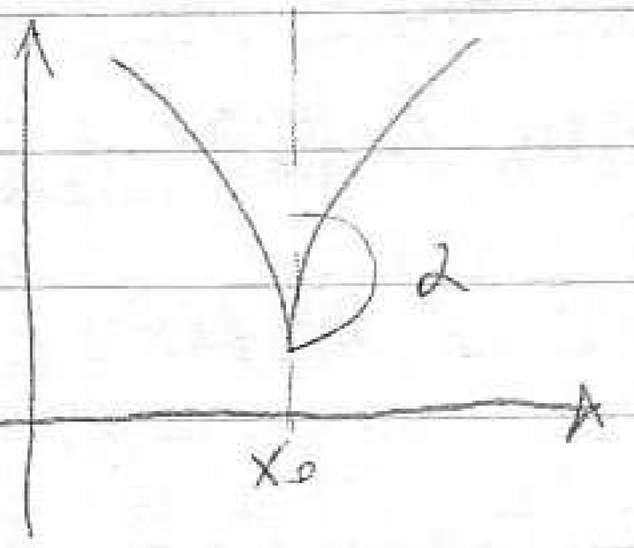
$\lim_{h\to 0^+}$ rapp. inc. $= +\infty$ $\neq$ $\lim_{h\to 0^-}$ rapp. inc. $= -\infty$

$\neq$

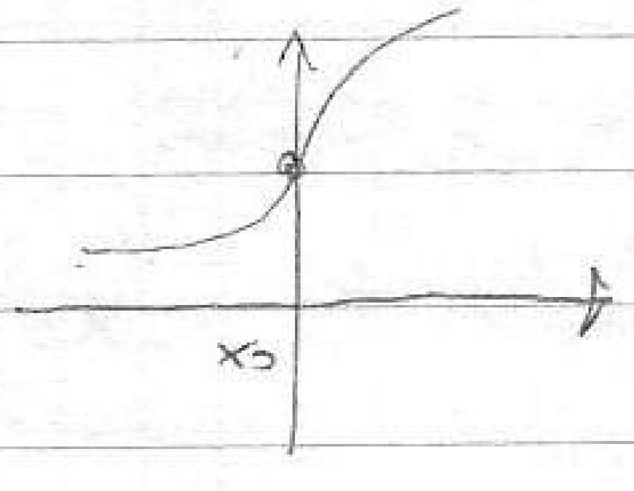
(anche con i limiti invertiti)

PUNTO DI CUSPIDE $\nexists$

$f(x_0) = \exists$ CUSPIDE

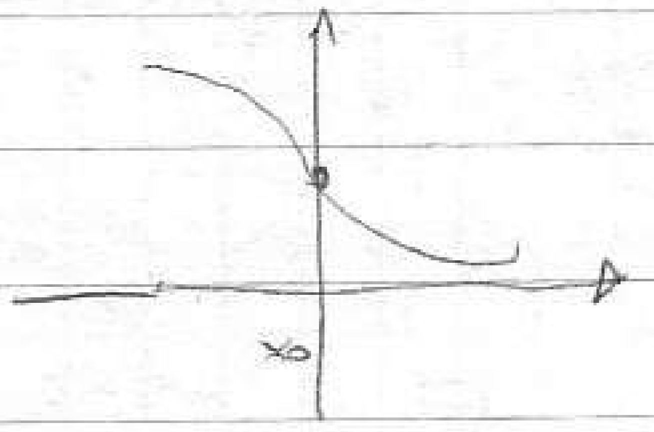


12: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$



FLESSO A TG. VERTICALE ASCENDENTE

13: " " $= -\infty$



FLESSO A TG. VERTICALE DISCENDENTE

[TH: Sia f derivabile in x_0, allora f è continua in x_0] + le contraria non è vera

Dim: (th): $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ovvero $\lim_{x\to x_0} [f(x)-f(x_0)] = 0$ $\boxed{1}$

(ip): $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $[x = x_0+h]$

$\neq$

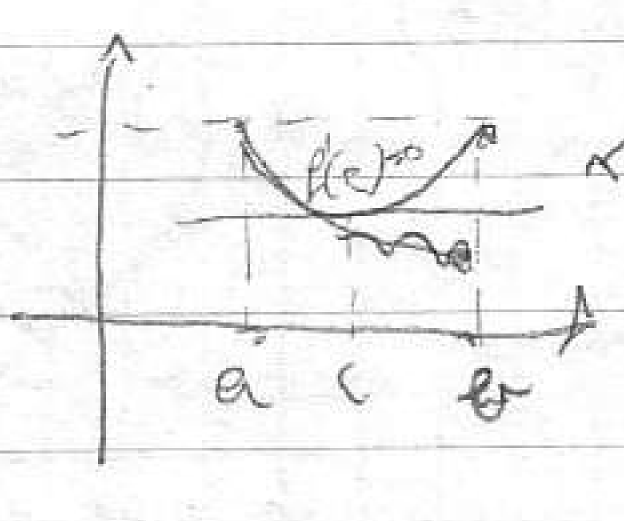
$$\lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0) \text{ per ipotesi}} \cdot \underbrace{\frac{(x-x_0)}{\cancel{(x-x_0)}}}_{\to 0} \xrightarrow{\text{TH}} \boxed{1} = 0$$

//

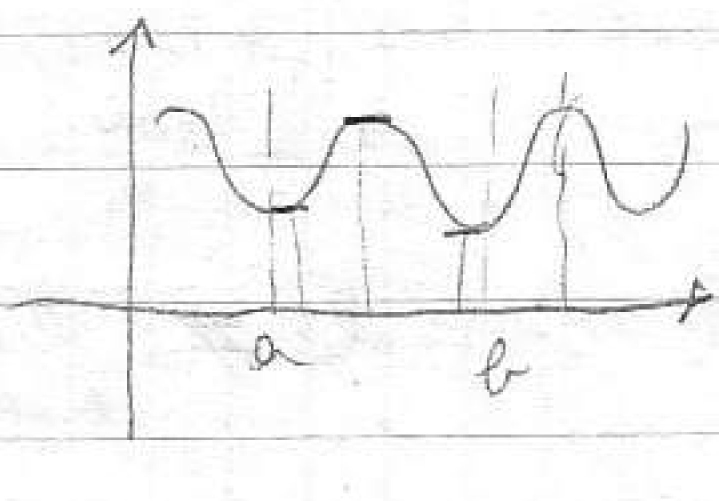
TEOREMA DI ROLLE: [Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile almeno in (a,b).] IP. INI

Sia $f(a) = f(b)$. Allora $\exists\, c \in (a,b) \,/\, f'(c) = 0$

EX:



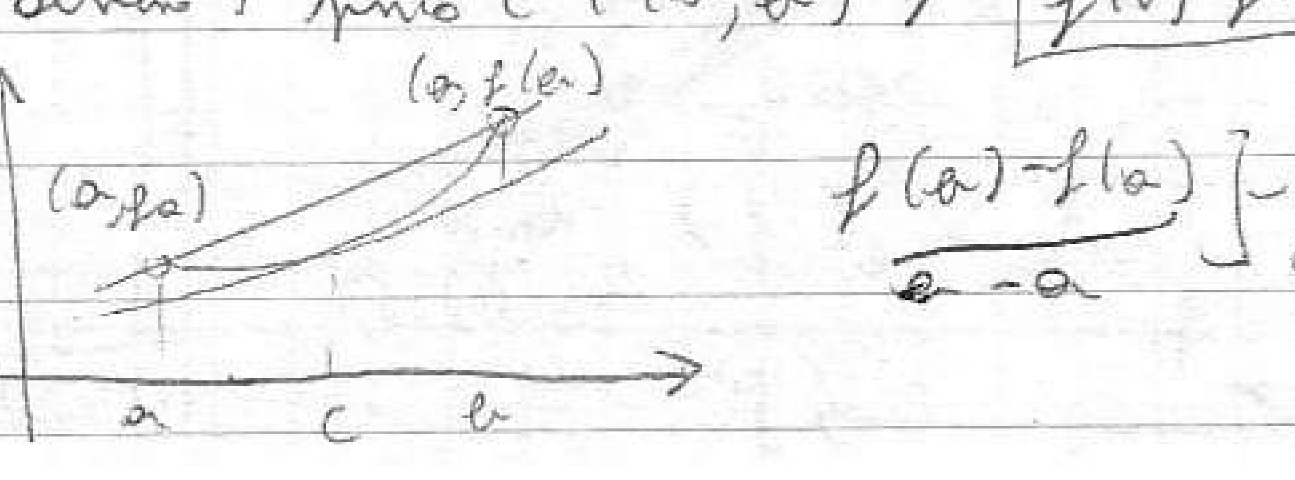
$(\exists! c)$;



TEOREMA DI LAGRANGE (DEI VALORI INTERMEDI). Date le stesse ipotesi iniziali del TH. ROLLE,

Allora $\exists$ almeno 1 punto $c \in (a,b)$ / $\boxed{f(b)-f(a) = f'(c) \cdot b-a}$

Ex:



$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$] – coeff. angolare

Ex:

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. È applicabile Rolle in $[-8, 8]$!

- $f(a) = f(b) \rightarrow f(-8) = f(-8)$ ✓
- f è continua in $[-8, 8]$ ✓
- f è DERIVABILE in $(-8, 8)$ ✗ + in $x=0$ non è derivabile + non si USA ROLLE

$\lim_{h \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = -\infty$; $\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = +\infty \Rightarrow x_0$ è PUNTO DI CUSPIDE

$f(x) = |x^3|$. È applicabile Lagrange $[-1, 2]$

- f è continua $[-1, 2]$ ✓
- f è DERIVABILE in $(-1, 2)$ ✓

$\Rightarrow$ LAGRANGE si può APPLICARE

H

TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

$\lim_{x \to \lambda} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}}$. Se entrambe sono DERIVABILI nell'intorno di λ, il limite è uguale a $\lim_{x \to \lambda} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Se si ottiene un'altra indeterminazione, e se $f'(\lambda)$ e $g(\lambda)$ ammettono le derivate II nell'intorno di λ, si prosegue.

CALCOLO 1 - INDICE APPUNTI [PERIODO II]

Prof. P. Natalini

6/12/2004.

Th. Sia f continua in $I_\delta(x_0)$ [$-\delta_0 \quad x_0 \quad \delta_0 +$] — DEFIZIONE SOSPESA

7/12/2004

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\left(C+\sin x\right) = \begin{cases} -\boxed{1}\ +\infty & \text{se } C>1 \\ -\boxed{2}\ -\infty & \text{se } C<-1 \\ -\boxed{3}\ \nexists & \text{se } C=1 \\ -\boxed{4}\ \nexists & \text{se } -1<C<1 \end{cases}$$

$\boxed{1}$ Uso th. confronto: $\underbrace{f(x)(C-1)}_{+\infty} \le \underbrace{f(x)(C+\sin x)}_{+\infty}$

$\boxed{2}$ " " doppio ": $\underset{\underset{-\infty}{\downarrow}}{f(x)(C+\sin x)} \le \underset{\underset{-\infty}{\downarrow}}{f(x)(C+1)}$

$\boxed{3}$ $\underset{\underset{0}{\downarrow}}{0} \le f(x)(C+\sin x) \le \underset{\underset{+\infty}{\downarrow}}{2f(x)}$ → NON POSSO USARE DOPPIO CONFRONTO

$f(x)(1+\sin x)$ si annulla periodicamente per $x\to+\infty$ ⇒ la $f(x)$ né diverge e né converge. $\left[f(x)(1+\sin x) \not\to \begin{matrix}\pm\infty \\ l\neq 0\end{matrix} \right]$

La $f(x)$ non è neanche infinitesima. $f(x)(1+\sin x) \not\to$ ~~Periodicamente~~ per ~~$x\to+\infty$~~ si ha

Ip: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. 1) $\forall x \geq \delta_M \to f(x) > M$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)(1+\sin x) \neq 0$! 2) Periodicamente, per $x\to+\infty$, $1+\sin(x) = 2$

ad ex: periodicamente, per $x\to+\infty$ e $x > \delta_M$, si ha che $f(x)(1+\sin x) \geq 2M > 0$

13/12/2004

Come studiare la deriv. della f(x) in un punto SENZA la definizione:

Si sfrutta un teorema CA. uno lim destro e sin.

TH: Sia $f(x)$ continua in $I_\delta(x_0)$ e derivabile almeno in $I_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ [[illegible]] Se $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = l$ (finito) ALLORA f è derivabile ANCHE in x_0 e si ha che $f'(x_0)=l$

• Se $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) = l \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = m \rightarrow x_0$ è un PUNTO ANGOLOSO per f

Se $\lim\limits_{x\to x_0^-} \underset{\text{(TG. OBLIQUA)}}{\underset{\downarrow}{f'(x)}} = l \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} \underset{\text{(TG. VERTICALE)}}{\underset{\downarrow}{f'(x)}} = \pm\infty$ → " " " " " " "

Se $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) = \pm\infty \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = m$ → " " " " " " "

• Se $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) = \pm\infty \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = \mp\infty$ → " " " PUNTO DI CUSPIDE " "

• Se $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \pm\infty$ →

→ " " " FLESSO A TG. VERTICALE

[se 1 dei due limiti ∄ non si può classificare il punto di non derivabilità]

Ex:

$$f(x) = \boxed{1}\begin{cases} \dfrac{\overset{f(x)^1}{|x^2-x-2|} + \overset{f(x)^2}{|\log(-x)|}}{|x+1|\; f(x)^3} & A \quad \overbrace{x \in (-2,0)\setminus\{-1\}}^{I'} \\ \alpha & x=-1 \end{cases}$$

→ Studia la cont. ① di f in I e la derivabilità ②

① $f(x)^1$ è continua in $\mathbb{R}$; $f(x)^2$ è continua in I [TH. CONT. $f(x)$ COMPOSTE]; → il num. è continuo in I • il den è continuo; $f(x)$ è continua in I' ($=\boxed{1}$, continua in I'). Cosa accade in $x=-1$? Studio $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ e attribuisco valore $\mathbb{R}$ ad α.

↓

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \frac{0}{0}$, Uso D.H., calcolo le derivate togliendo i | |.

$$|x^2-x-2| = \begin{cases} x^2-x-2 & \text{se } x^2-x-2 \geq 0 \\ -x^2+x+2 & \text{se } x^2-x-2 < 0 \end{cases}$$ → la studio: $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm 3}{2}$ ↙

Verificato con $x \leq -1 \wedge x \geq 2$

↓

$$|x^2-x-2| = \begin{cases} x^2-x-2 & \text{se } x \leq -1 \wedge x \geq 2 \\ -x^2+x+2 & \text{se } -1 < x < 2 \end{cases}$$

Studio anche gli altri due.

(→)

$$|\log(-x)| = \begin{cases} \log(-x) & \text{se } \log(-x) \geq 0 \\ -\log(-x) & \text{se } \log(-x) < 0 \end{cases}$$

→ la studio.

↓

$\log(-x) \geq 0$ se

$-x \geq 1 \to x \leq -1$

↓

$$|\log(-x) = \begin{cases} \log(-x) & \text{se } x \leq -1 \\ -\log(-x) & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Unione dei risultati:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2+\log(-x)}{-x-1} & x \in (-2,-1) \\ \alpha & x = -1 \\ \dfrac{-x^2+x+2-\log(-x)}{x+1} & x \in (-1,0) \end{cases}$$

sono EQUIVALENTI, posso moltiplicare il num. e il den. della 1' per -1

↓

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2+x+2-\log(-x)}{x+1} & x \in (-2,1) \cup (-1,0) \\ \alpha & x = -1 \end{cases}$$

[dobbiamo studiare $\lim_{x\to-1} f(x)$] – Ora calcoliamo le derivate: (TH. DE L'HOSPITAL)

$$\lim_{x\to-1} \frac{\overset{2}{-2x}+1\overset{=1}{-\frac{1}{x}}}{1} = 4 \Rightarrow f(x) \text{ è continua in } I \text{ se } \alpha = 4.$$

Ora la DERIVABILITA'. (usiamo th. der. f(x) composte)

$f^1(x), f^2(x), f^3(x)$ sono derivabili in $I' \Rightarrow f(x)$ è derivabile in I'.

↓

$\forall x \in (-2,-1) \cup (-1,0)$, f è DERIVABILE e si ha

$$f'(x) = \frac{(-2x+1-\frac{1}{x})(x+1)+(x^2-x-2+\log(-x))}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2-2x\cancel{+x}\cancel{+1}\cancel{-1}-\frac{1}{x}+x^2\cancel{-x}-2+\log(-x)}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{-x^2-2x-2-\frac{1}{x}+\log(-x)}{(x+1)^2}.$$

Poiché $f(x)$ è continua e deriv. nell' $I_\delta(-1)\setminus\{-\}$,

studio:

$$\lim_{x\to-1} \frac{-x^2-2x-2-\frac{1}{x}+\log(-x)}{(x+1)^2} = \frac{0}{0}$$

Applico De L'H.

$$\lim_{x\to -1} \frac{-2x-2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}{2(x+1)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to -1} \frac{-2-2/x^3-\frac{1}{x^2}}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$\Downarrow$

La $f(x)$ è anche derivabile $\forall x \in I$ con $\alpha = 4$.

H

IMPORTANZA dell'IP. della Continuità in x_0 del TH.!

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

→ non CONT. in $x=0$ (e non può essere derivabile)

Applicando erroneamente il th, ho che:

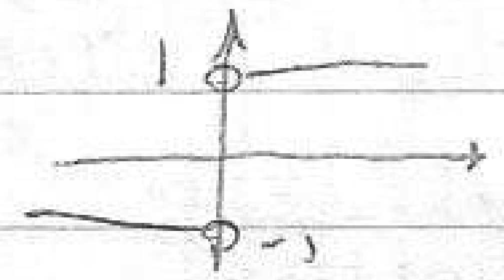
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$ ed erroneamente $\lim_{x\to 0} f'(x) = 1$ → È FALSA L'IPOTESI

H

TH: [Se ho $f(x) = k$ $\forall x \in A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$] →

$\cancel{\Leftarrow}$ → Se f è derivabile in $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f'(x) = 0$ $\forall x \in A$ (c'è nulla), non è detto che la $f(x)$ è costante nell'insieme.

Ex:



; $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

È derivabile in A e $f'(x) = 0$ $\forall x \in A$, ma non è costante in A (ha valore -1 e 1)

$\Downarrow$

TH: Se f è deriv. in A e <u>A è un intervallo</u> allora, se $f(x) = k$, $\forall x \in A \subseteq \mathbb{R}$ $\boxed{\Leftarrow}$ $f'(x) = 0$

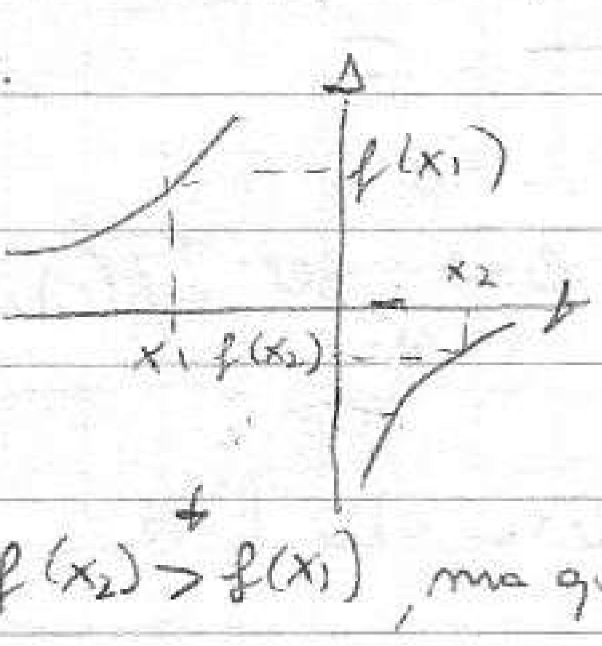
Ex: → Se f e g sono t.c. $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in I$ intervallo, allora $f(x) - g(x) = k$. [$F(x) = f(x) - g(x)$; $F'(x) = 0$ → $\forall x \in I$ → $F(x) = k$, $\forall x \in I$]

$\Downarrow$ CONSEGUENZA

TH: Sia f derivabile in $A \subseteq \mathbb{R}$ (intervallo). Se $f'(x) > 0$ $\forall x \in A$ allora f è strettamente CRESCENTE / Se $f'(x) < 0$ $\forall x \in A$ allora f è STRETTAMENTE DECRESCENTE

↓

Ex:



$A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ → Il TH è FALSO (anche se $f'(x) = \frac{1}{x^2}$) perché A non è INTERVALLO.

↓

$f(x_2) > f(x_1)$, ma qui non ACCADE

Ex:

$f(x) = x^3$ (cont. e der. in $\mathbb{R}$, intervallo). ; $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ ($=0$ se $x=0$)

Si dimm. che TH (strett. crescente) vale anche cond. in +! (estensione x la monotonia)

Se $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, e $f'(x)$ NON SIA IDENTICAMENTE NULLA in $J \subset I$ (l'imp. che la derivata NON SI ANNULLI in TUTTO l'intervallo, 1, 2, ... 1000 sì, ma TUTTO no, altrimenti $f(x)$ è K). - stesso disc. per le $f(x)$ decrescenti.

Ex:

(∞ tg)

Ex D'ESAME.

Studiare il segno: $f(x) = x\,\boxed{\arcsin x} + \sqrt{1-x^2}$ ed eventualmente det. dove si annulla.

[si faccia lo stud. staccato, dis. irr. e trovar!]

Primo caso: DOMINIO.

$$D = [-1, 1]$$

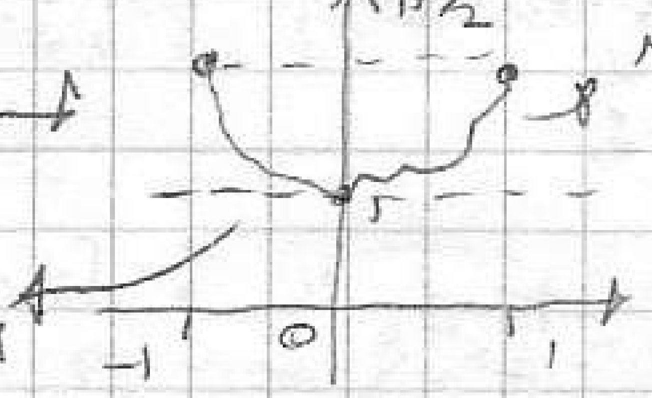
Calcoliamo la $f'(x) = \arcsin x + \cancel{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} - \cancel{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$; ① $f'(x) < 0$ se $-1<x<0$; ② $f'(x) > 0$ se $0<x<1$

① $\Rightarrow f$ è DECR. ($f \downarrow$) in $(-1, 0)$

② $\Rightarrow f \uparrow$ in $(0, 1)$

$f(-1) = \frac{\pi}{2} = f(1)$ →

$f(0) = 1$



$\Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in D$

12/11/2004

STUDIO DI F(X) $\mathbb{R}$ A VARIABILE $\mathbb{R}$ - Passaggi:

① DOMINIO (nota i casi: $\frac{1}{0}$, $\sqrt[n]{P(x)}$ → n pari → $P(x) \geq 0$, $\log(a) \to a > 0$) | Verifica se PARI o DISPARI

PARI ↓ $f(x) = f(-x)$; DISPARI ↓ $f(x) = -f(x)$

② INTERSEZIONI CON GLI ASSI

asse x: $y = 0 \to f(x) = 0$; asse y: $x = 0 \to f(0)$

③ STUDIO DEL SEGNO → $f(x) \geq 0$

④ CONTINUITÀ, DISCONTINUITÀ

⑤

⑤ LIMITI ALL'∞ - COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI DI D.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

⑥ EVENTUALI ASINTOTI OBLIQUI (se ∄ as. orizz.)

$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; $n = \lim_{x\to+\infty} f(x) - m(x)$

⑦ CALCOLO E STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA

$f'(x) \geq 0$; eventuali MIN, MAX relativi, P.TI DI FLESSO, CUSPIDI, FL. A TG. VERTICALE

⑧ CALCOLO E STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA

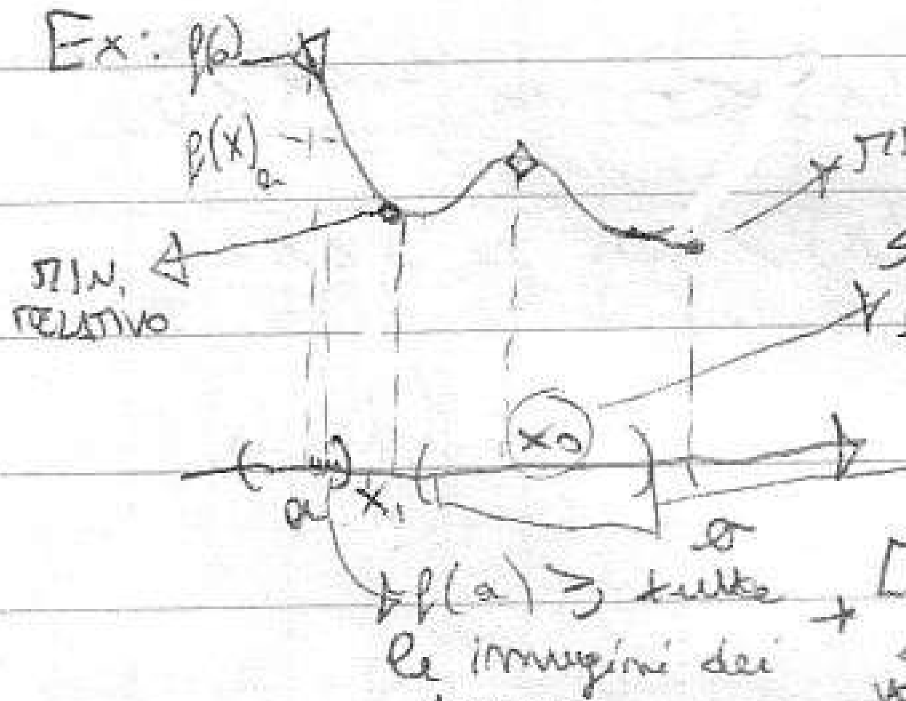
$f''(x) \geq 0$; eventuali p.ti di flesso; CONVESSITA', CONCAVITA'

15/12/2004

Def: X_0 si dice PUNTO di MAX RELATIVO per f se $\exists\ \delta > 0$ (intorno di x_0) / $\forall x \in I_\delta(x_0) \cap D$ si ha $f(x_0) \geq f(x)$ [$f(x_0)$ = MASSIMO RELATIVO]

Ex:

Sono in [a, b]



Se scelgo intorno grande → trovo valori $f(x) > f(x_0)$ → MA basta che lo scelgo rel. al punto → in quell'intorno $f(x_0)$ è MAX. RELATIVO

→ $f(a) \geq$ tutte le immagini dei punti + [$f(a)$ è anche MAX ASSOLUTO + MAX valore consentito] (Un max → assoluto è MAX RELATIVO)

$\updownarrow$

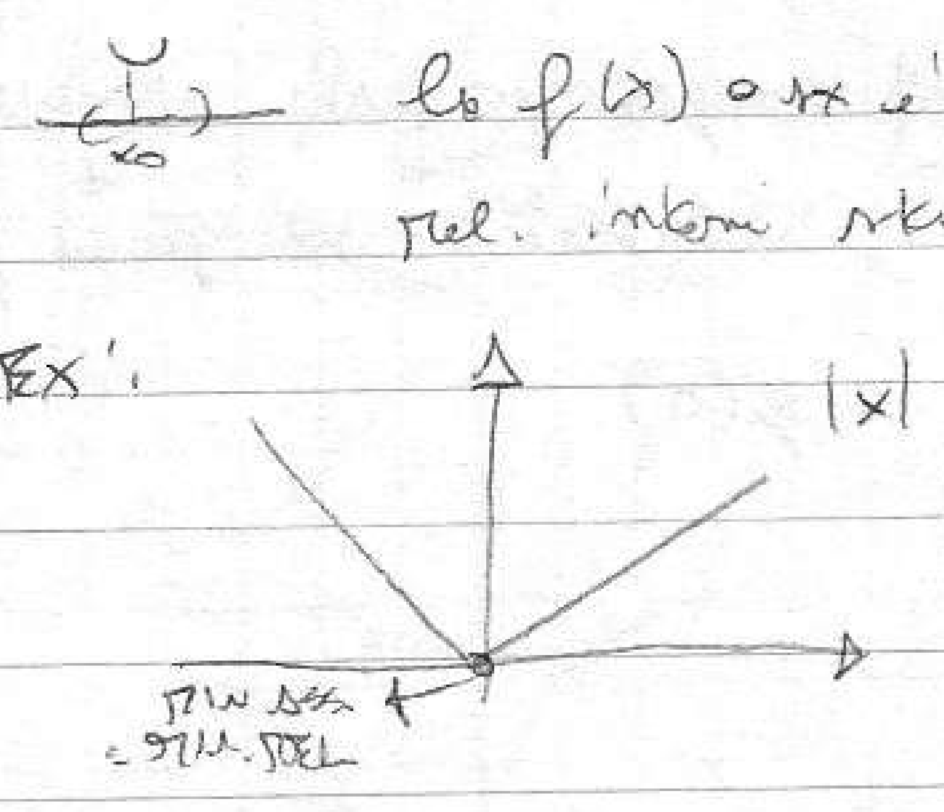
- ∃! MAX ASSOLUTO / MIN ASSOLUTO
- possono ∃ <> MAX RELATIVI / MIN REL.

Def: x_0 si dice PUNTO DI MIN RELATIVO per f se $\exists\ \delta>0$ / $\forall x \in I_\delta(x_0) \cap D$ si ha $f(x_0) \leq f(x)$ [$f(x_0)$ = MINIMO RELATIVO]

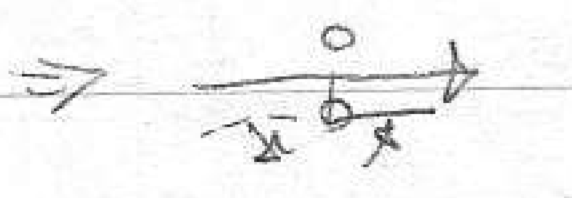
Preso un P.TO INTERNO, cioè considerato [a, b] prendo (a, b). Vale I (estremo relativo)

x_0 la $f(x)$ a sx è STR. CRESCENTE, a dx STR. DECR. Se voglio det tutti gli est. rel. interni studio $f'(x) \geq 0$.

Ex:



Vale anche quando non è derivabile (importante è l'intorno dx e sx).



TH: Sia f continua in $I_\delta(x_0)$ e derivabile in $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. Se $f'(x) < 0$ in $\overset{[\text{INTERNO SX}]}{(x_0-\delta, x_0)}$ e $f'(x) > 0$ in $\overset{[\text{INT. DX}]}{(x_0, x_0+\delta)}$ allora x_0 è P.TO DI MINIMO RELATIVO

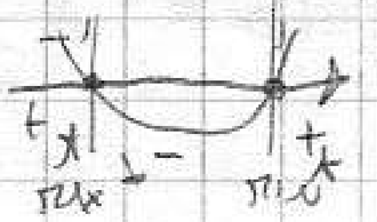
→ $f(x_0)$ è MIN. REL.] / [se $f'(x) > 0$ in I_{sx} e $f'(x) < 0$ in I_{dx} → x_0 è P.TO DI MAX.]

(x_0 è un punto INTERNO $\Rightarrow I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \subset D$)

T. di FERMAT: Sia f derivabile in $I_\delta(\overset{\text{P.TO INT.}}{x_0}) \subset D$ e x_0 è P.TO DI ESTREMO RELATIVO per f, allora si ha che $f'(x_0) = 0$ [vedi (XXIII) ex.]

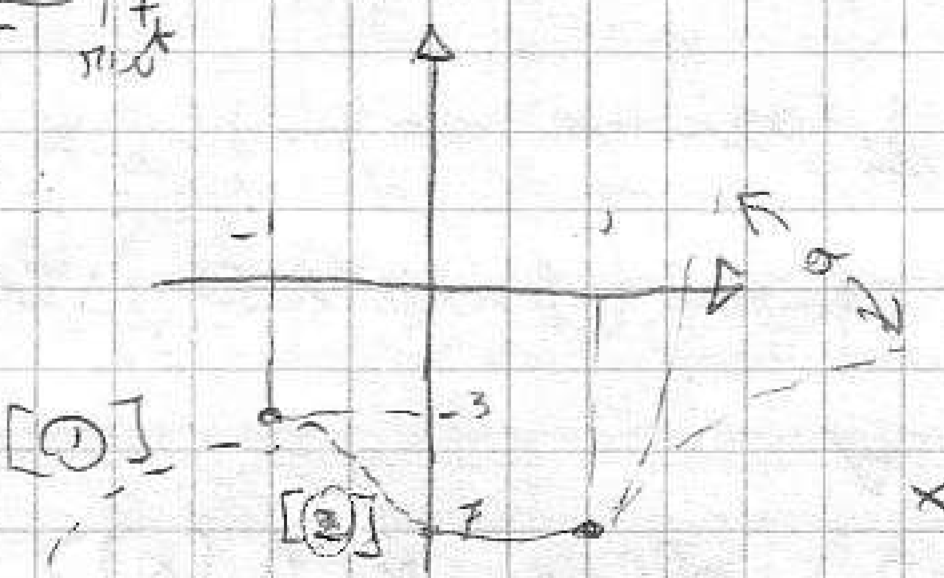
Ex: Stabilire n. di zeri di x^3-3x-5. (non si può calcolare $=0$).

Si studia la derivata prima: $P'(x) = 3x^2-3$; determino MAX e MIN el. → $3(x^2-1)=0$ → $x_1=-1$, $x_2=1$. Ora studio il segno, ma è vvio perché



(parabola). $f(-1) = -3$; $f(1) = -7$

bbozzo il grafico



$\forall x \in (-\infty, -1) \Rightarrow f \uparrow \Rightarrow$ il grafico non può intersecare x [①]; $\forall x \in (-1, 1) \Rightarrow f \downarrow \Rightarrow$ neanche qui [②]; $\forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow$ qui può intersecare. Può intersecarlo al max 1 volta (non può ridecrescere).

pplico BO-CAUCHY. Faccio $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists$ un valore positivo, uno negativo, [illegible] interseco x. N(zeri) = 1

0/12/2006

CONCAVITÀ e CONVESSITÀ di una f(x) - Concetto di flesso

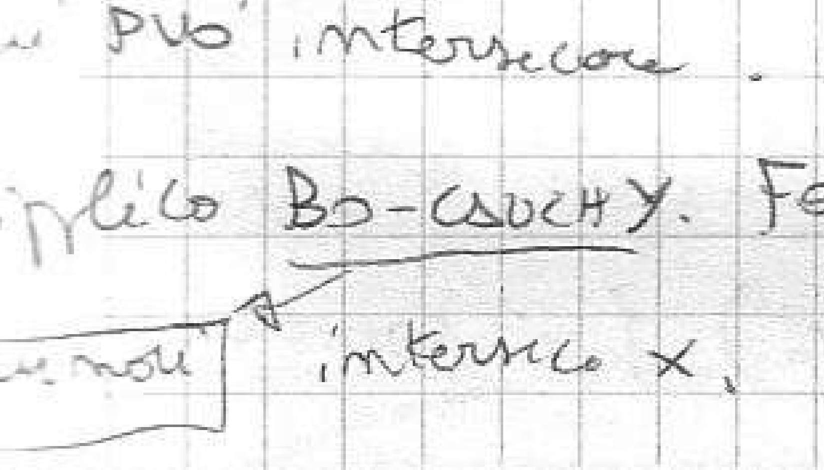
ef.: f si dice CONVESSA in (a, b) se $\forall \alpha, \beta \in (a, b)$ (con $\alpha < \beta$) si ha

$$f(x) \leq f(\alpha) + \underbrace{\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)}, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

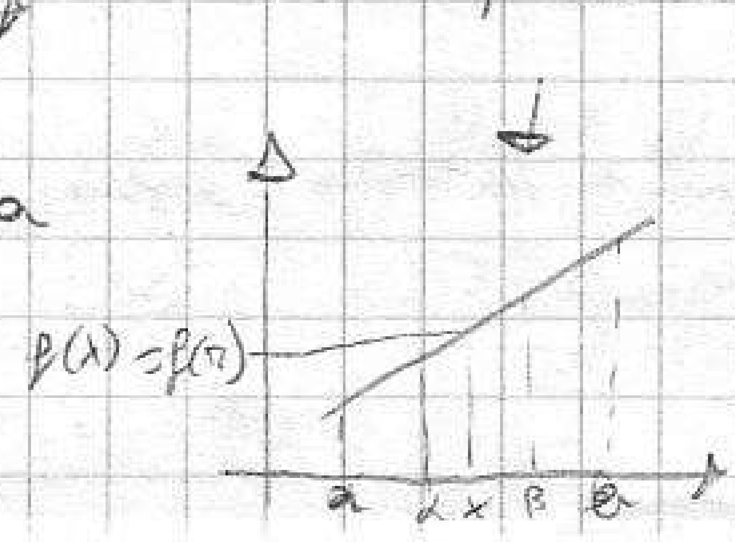
→ retta passante per $f(\alpha)$ e $f(\beta)$

(il grafico deve essere sempre al di sotto di questa retta, ∀ intervallo)

Ex:



Caso particolare: retta



la retta è convessa (vale l'uguaglianza → =x)

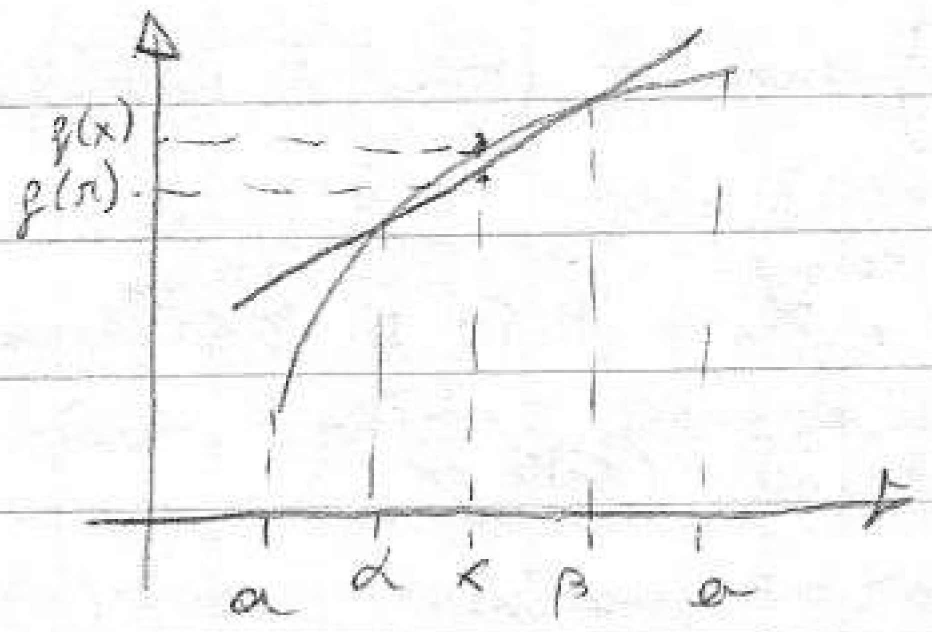
↓

È anche CONCAVA! →

- Dim: f si dice CONCAVA in (a,b) se $\forall\, \alpha, \beta \in (a,b)$ con $\alpha < \beta$ si ha

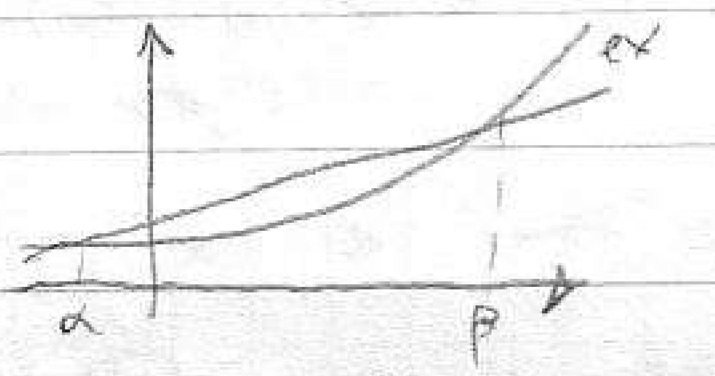
$$f(x) \geq f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) \qquad \forall\, x \in [\alpha, \beta]$$

Ex:



(retta è unico caso di $f(x)$ contemporaneamente CONCAVA e CONVESSA)

Ex: $y = e^x$ → CONVESSA in tutto $\mathbb{R}$ →



$(a = -\infty,\ b = +\infty)$

TH: Sia f derivabile 2 volte in (a,b), allora se $f''(x) > 0$ $(\forall\, x \in (a,b))$ si ha che f è CONVESSA; se $f''(x) < 0$ $(\forall\, x \in (a,b))$ si ha che $f(x)$ è CONCAVA.

↓ (generalizzazione)

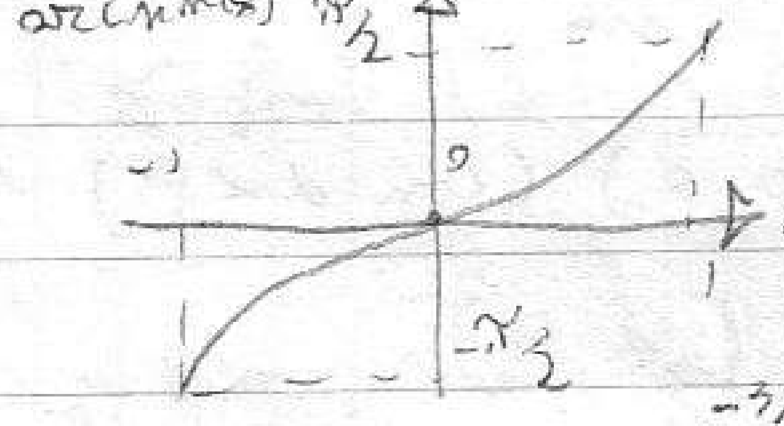
La $f''(x)$ si può annullare in un punto $(f''(x) > 0)$, basta che NON SI ANNULLA in tutto (a,b)

⇓

TH: Sia f derivabile 2 volte in (a,b), allora: se $f''(x) > 0$ $(\forall\, x \in (a,b))$ e $f''(x)$ non si annulla in tutto l'intervallo (a,b) ⇒ f è CONVESSA (stesso per concavità)

Def: x_0 è un PUNTO DI FLESSO per f se in $(x_0 - \delta, x_0)$ f è CONVESSA (CONCAVA) e in $(x_0, x_0 + \delta)$ f è CONCAVA (CONVESSA)

Ex:



- È derivabile in $(-1,1)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ → strettamente positiva $\forall\, x \in (-1,1)$

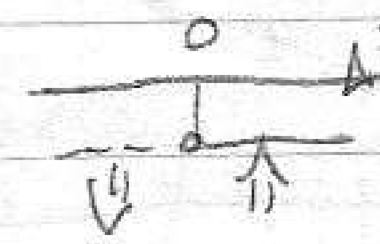
→ $(1 - x^2)^{-1/2}$

$$f''(x) = -\frac{1}{\cancel{2}}(1 - x^2)^{-3/2}\cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt[3]{(1\ x)^3}} \quad \forall\, x \in (-1,1) \qquad f''(x) = 0 \text{ per } x = 0.$$

→ sempre +

↓ P.to di FLESSO

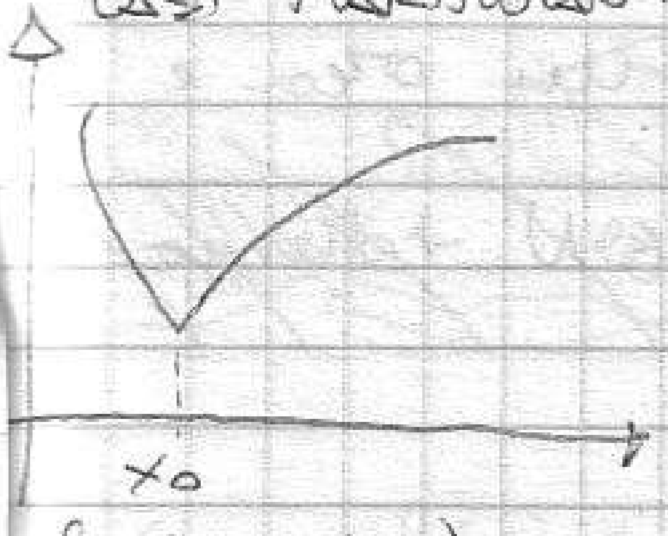
$f''(x) < 0$ se $x \in (-1,0)$; $f''(x) > 0$ se $x \in (0,1)$



↓

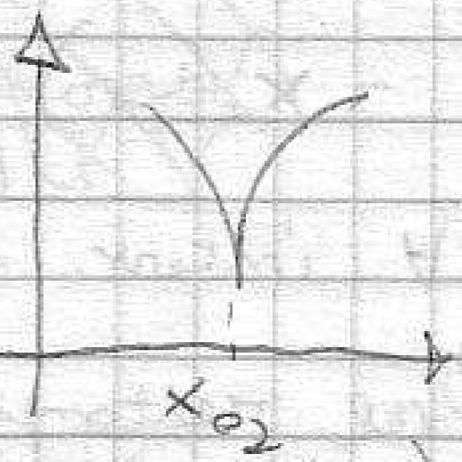
Come per il TH. di Fermat, se x_0 è un punto interno ed è punto di flesso, allora $f''(x_0)$ è $= 0$. (se ∃)

CASI PARTICOLARI:



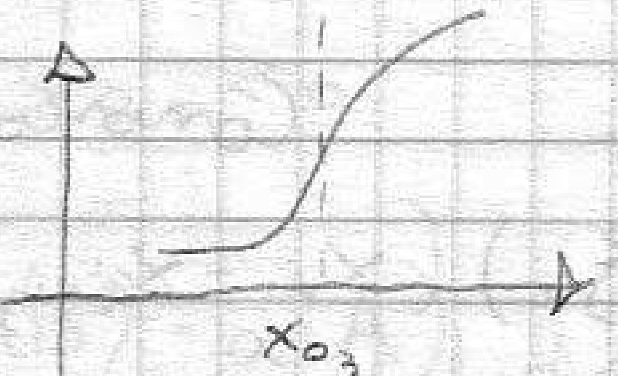
(p.t angoloso)

→ X_0 è un PUNTO di FLESSO nonostante $f''(x)$ ∄.



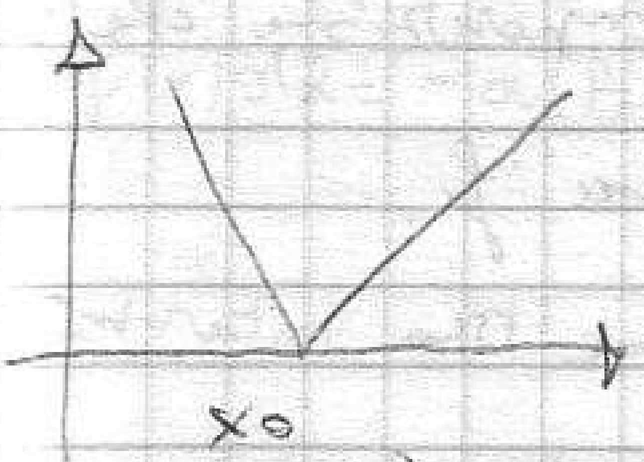
(cuspide)

→ x_{0_2} NON ∃ P.to di FLESSO



FLESSO

(p.to FL. a tg. verticale)



(modulo)

→ È p.to di FLESSO perch' a sx è concava (convessa) a dx è convessa (concava)

↓

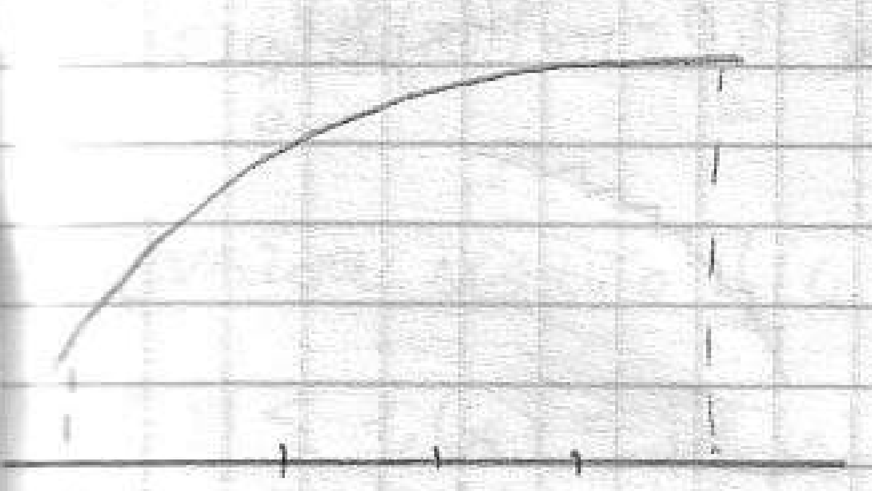
Th: Sia f derivabile 2 volte in $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$, allora se $f''(x) \underset{(<)}{\geq} 0$ in $(x_0 - \delta, x_0)$ e $f''(x) \underset{(>)}{\leq} 0$ in $(x_0, x_0 + \delta)$ ⇒ x_0 è p.to di FLESSO di f.

Th: (equiv. Th Fermat) Sia f derivabile 2 volte in $I_\delta(x_0)$, se x_0 è P.TO di FLESSO per f, allora $f''(x_0) = 0$ [Vedi (XXIV) ex.]

10/12 2005

INTEGRALE DEFINITO: $I = \int_a^b \overset{*\text{INTEGRANDA}}{f(x)}\,dx$ → $f(x)$ è CONTINUA in $[a, b]$

Cons. una f definita in $[a, b]$. Decomposizione intervallo $[a, b]$:

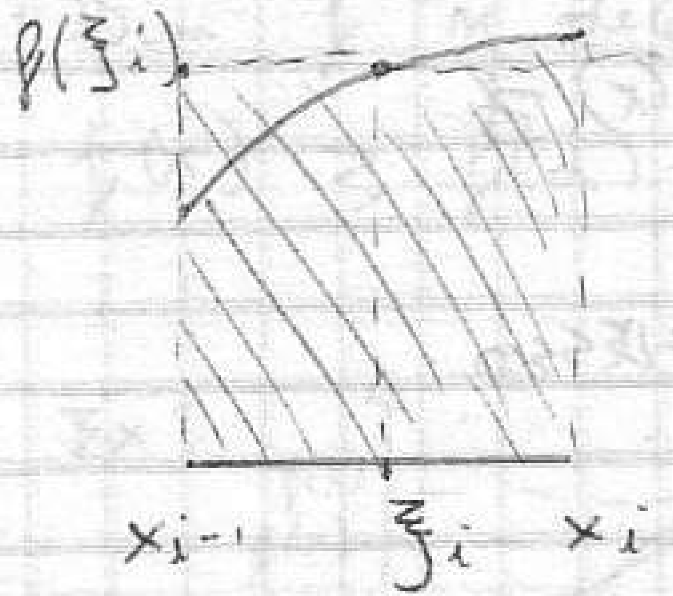


$[\delta]$ se si fissano un numero arbitrario finito di numeri / estremi $= a, b$ (ex 5 punti). Vengono individuati altri "intervallini" $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ $[x_3, b]$.

Unione intervallini $= [a, b]$ (non confondere con PARTIZIONE, perch' int. hanno 1 elemento in comune)

$\delta = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_{\overset{\text{numero FINITO}}{\boxed{m}}} = b\}$. Un generico intervallino è $[x_{i-1}, x_i]$ ($\forall i \in N$).

Consideriamo un $[x_i-1, x_i]$ qualsiasi. All'interno scelgo un punto arbitrario ξ_i:



È considerato un rettangolo la cui area è

$\Delta = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ [Con $i \in N$ ottengo N aree] (Vale ∀ interv. scelto)

↓

Conosco l'area del rettangoloide:

$A(d) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, dipende sia dalla decomposizione che dalla scelta di i, $A(d)$ è la SOMMA INTEGRALE di f.

NORMA DELLA DECOMPOSIZIONE (δ_d) = ampiezza + grande tra intervallini

$\delta_d = \max_{i=1\ldots n} (x_i - x_{i-1})$ (avendo n intervallini, ho n ampiezze divers. Norma è il valore + grande di n ampiezze)

•

TH: Sia f continua in $[a,b]$; $\exists$ un numero $l \in \mathbb{R}$ tale che:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \,/\, \forall d(\delta)$ [decomposizione d di norma δ]

per cui $\delta < \delta_\varepsilon$ si ha che $|A(d(\delta)) - l| < \varepsilon$

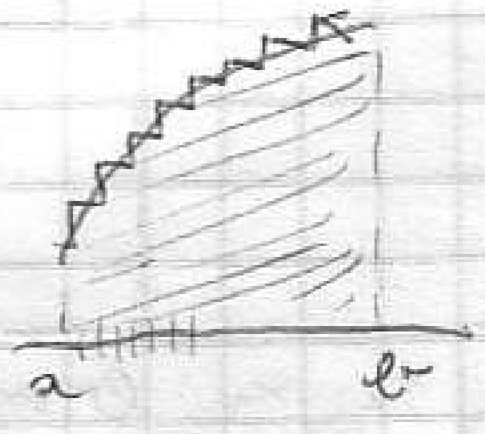
↓

$\lim_{\delta \to 0} A(d(\delta)) = l$ [lim. del valore simbolico, non è una classica funzione]

(Una stessa d può avere $A(d)$ <> [~~definiz. di~~ $f(x)$]

↓

Comunque preso ε molto piccolo, δ_ε è piccolo si hanno decomposizione molto fitta [norma molto piccola] + graficamente il rettangoloide è molto vicino al grafico della funzione.



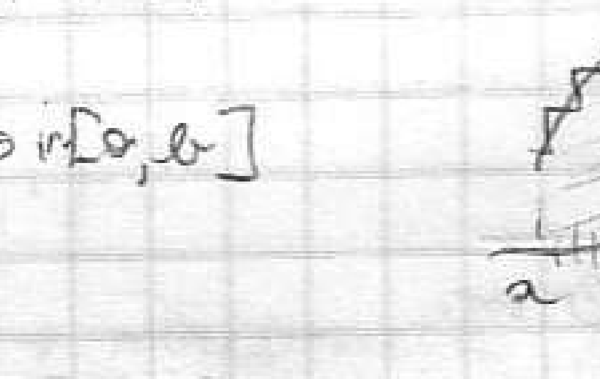
l tende all'AREA sottesa dal grafico in $[a,b]$

(Con $\delta_d \to 0$ quindi)

↓↓

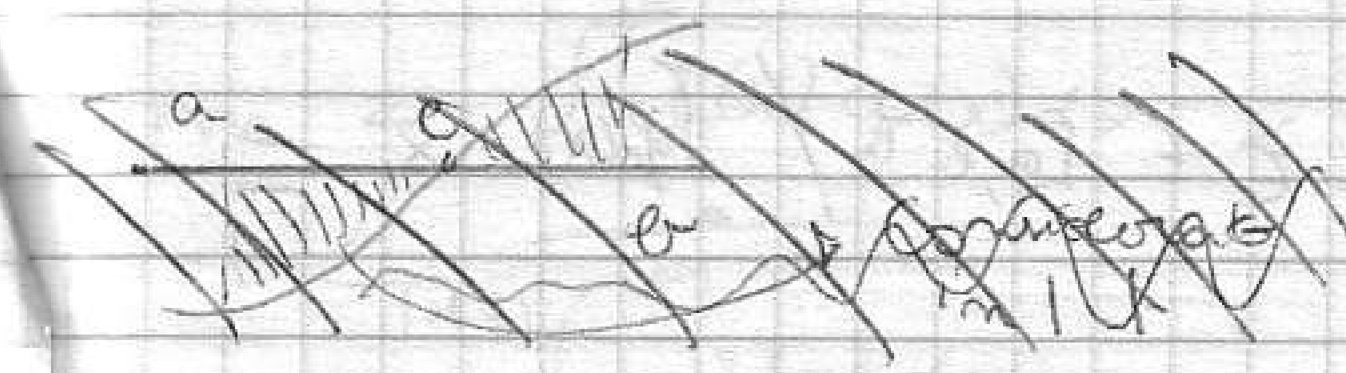
$$\boxed{l = \int_a^b f(x)\,dx}$$

•(stesso discorso per $f(x)$ negative, di /// (oppure considero simmetrica)



$\int_a^b f(x)dx$ = area

• Se è sia + che −:



- Caso $f(x) > 0$

$$\int_a^b f(x)\,dx = a(A)$$

- Caso $f(x) < 0$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -a(B)$$

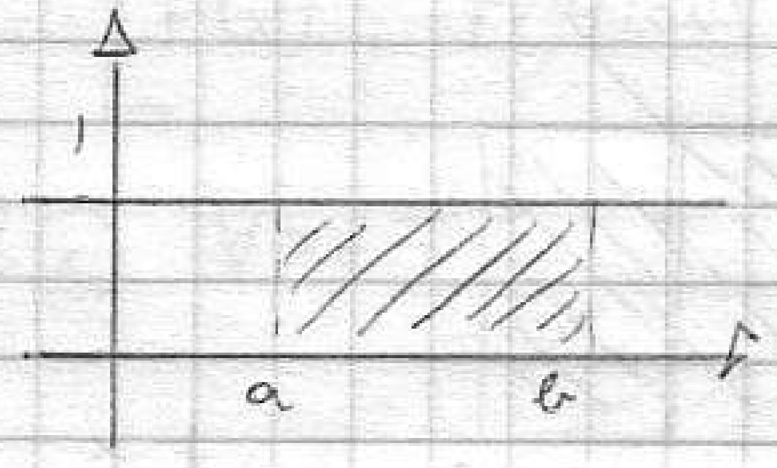
- Caso $f(x) > 0$ e < 0

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{a(B) - a(A)}_{} \to + \text{ piccolo della somma di aree}$$

//

Ex: $f(x) = 1$ (costante, $\forall x \in \mathbb{R}$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b 1\,dx = b - a$$



U rettangoloide e' ESATTAMENTE il rettangolo $r(d) = b - a$

//

TH: [LINEARITÀ degli INTEGRALI] (1) Siano f e g continue in $[a,b]$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

TH: [ADDITIVITÀ] (2) Sia f continua in $[a,b]$ e sia $c \in (a,b)$. Allora $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

T. [CONFRONTO] (3). Siano f e g continue in $[a,b]$ e / $f(x) \leq g(x)$ in $[a,b]$ llora $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

- ["VALORE ASSOLUTO"] (4) - [COROLLARIO di (3)]. Siano f e g continue in $[a,b]$ / $|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ allora $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

SS. $\int_a^b f(x)\,dx$; b = estremo sup. di integrazione e a = estremo inf. di integrazione; $f(x)$ e' FUNZIONE INTEGRANDA. $[a < b]$ Per convenzione $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

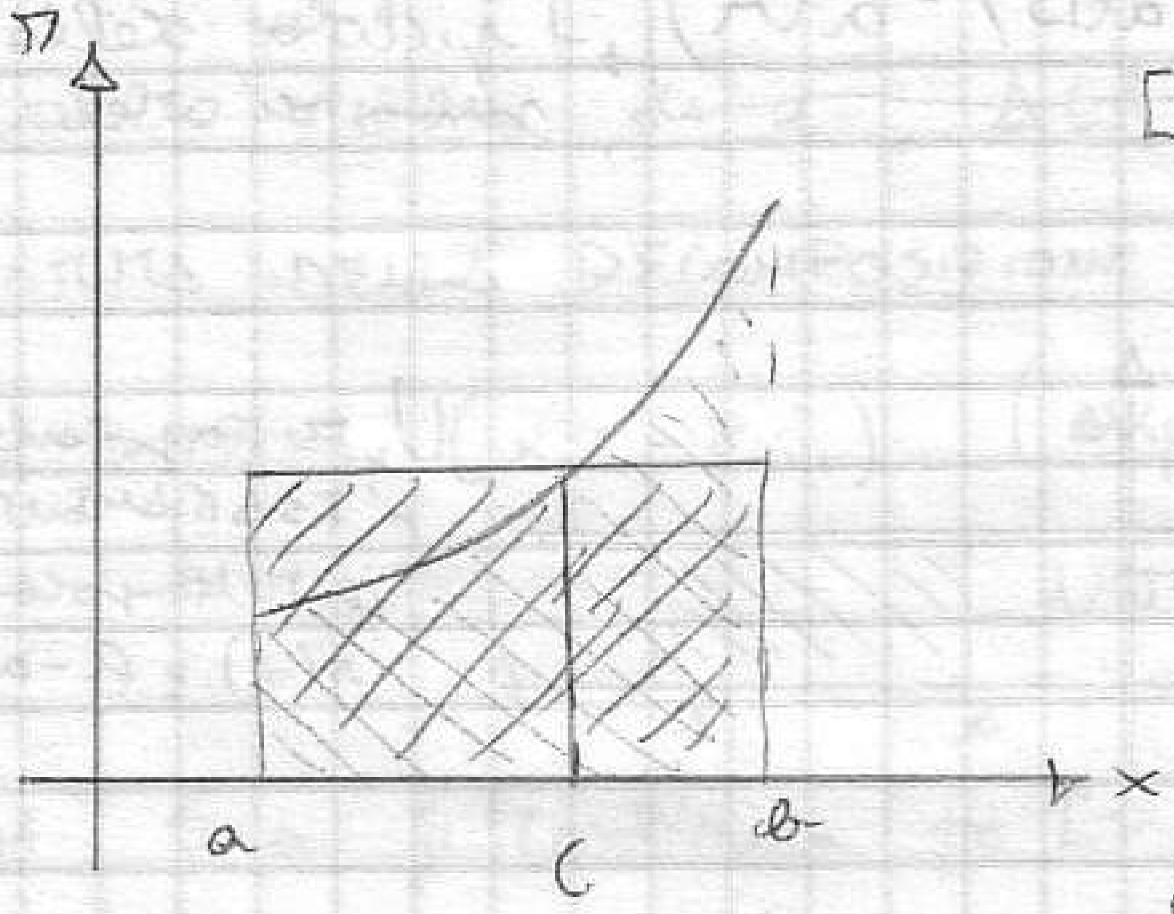
SS. $\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$ → ha senso $b < a$

12/1/2005 - TEOREMA DELLA MEDIA

Sia f continua in $[a,b]$. Allora $\exists\, c \in [a,b] \,/\, \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)}_{(th)}$.

[Posso studiare max e min di $f(c)(b-a)$ e posso stimare l'integrale.

$f(x)(b-a) \leq \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)(b-a)$ e anche $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx$]



[int. geom.]

/// = \\\

$\downarrow$

Dim: $f(x)$ è compreso tra il suo min e max (x Weierst.)

$\min \leq f(x) \leq M$, dove

$m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

m e M sono $f(x)$ costanti e continue. Uso th. confronto integrali $\Rightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$, quindi

$m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\int_a^b dx$ quindi $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

Divido per $(b-a)$. $\rightarrow m \leq \boxed{\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}} \leq M$ (Le th dei val. int.)

[TH si può scrivere $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$] $\rightarrow c'$

$\rightarrow M = f(X_M)$ e $m = f(x_m)$

Poiché c' è compreso tra $f(x_M)$ e $f(x_m)$, allora $\exists\, x_{c'} \,/\, f(x_{c'}) = c'$

A

TEOREMA DELLA MEDIA PESATA

Siano f e g continue in $[a,b]$, e sia $g(x)$ di segno costante in $[a,b]$.

Allora $\exists\, c \in [a,b] \,/\, \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$

Dim. Poiché f è cont. in $[a,b]$, sfrutto Weier. $\Rightarrow \exists\, m$ e M $(m \leq f(x) \leq M)$

Prendo $g(x) \geq 0 \rightarrow m\,g(x) \leq f(x)\,g(x) \leq M\,g(x)$. Uso il th. confr. integrali e linearità: $m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$. Ora divido per

(65) l'integrale : $\rightarrow$

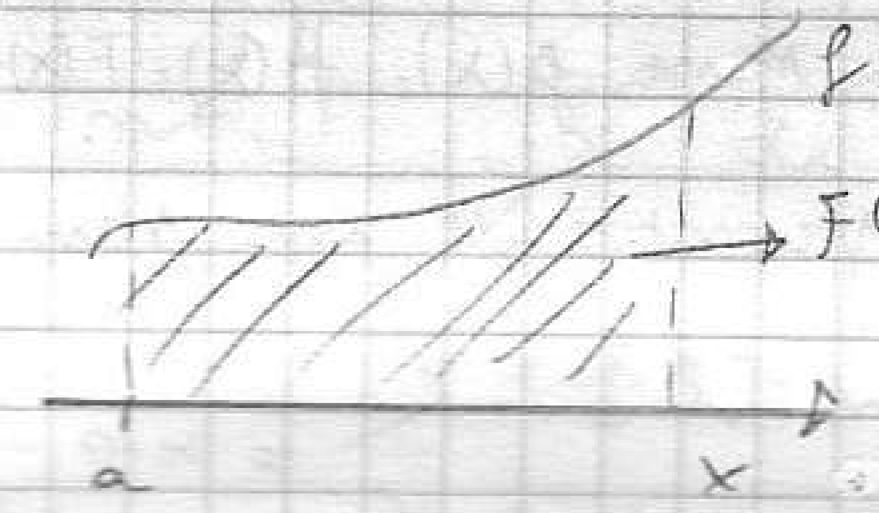
$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M \rightarrow \text{coincide } f(c)$$

4

1° TH. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE (TORRICELLI - BARROW)

Sia f continua in un intervallo I (anche illim.) e sia $a \in I$. Allora la funzione $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (t - variabile di integrazione) [$F(x)$ è FUNZIONE INTEGRALE] è derivabile in I e si ha che $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

Oss.



$F(x)$ è definita in I
$\Downarrow$
$F: I \rightarrow C \subseteq \mathbb{R}$

$f(x)$ però può essere continua anche in un insieme che non è intervallo

ex: $f(x) = \frac{1}{x}$ $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Se faccio $\int^x f(t)\,dt = F(x)$.

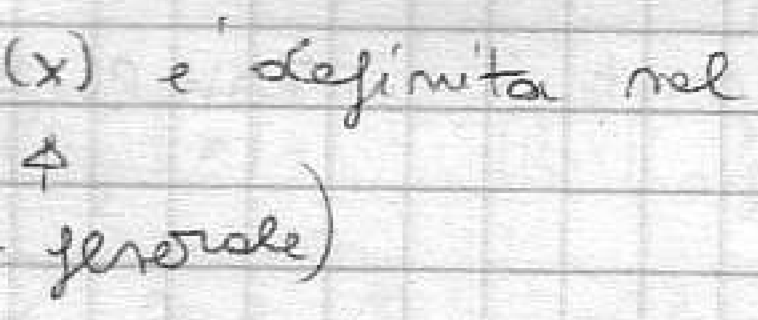
-[$F(x)$ è definita nel + ampio intervallo di continuità di $f(x)$ contenente l'estremo inf. di integrazione]-
(In generale)

Ex: $f(x) = \frac{1}{x}$. Gli int. di continuità sono 2 [$(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$]. Il + ampio che contiene 1 è il 2° (anche $(0,2)$, ma il + ampio è $(0, +\infty)$)
$\Downarrow$
$F(x)$ è definita in $(0, +\infty)$

Dim TH.

$\forall x \in I$ $$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} =$$

Supponiamo



(La situazione vale anche per $x < a$)

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$ Applico th. MEDIA $(\rightarrow)$

66

∃ c compreso tra x e x+h / $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot f(c)(\cancel{x}+h-\cancel{x}) = \lim_{h \to 0} f(c)$

Se $h \to 0$, $c \to x$, quindi posso scrivere $\lim_{c \to x} f(c) = \boxed{f(x)}$ → è derivabile e questa è la sua derivata.

17-1-2003

2° TEOR. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE.

[FUNZIONE PRIMITIVA: F(x) è una PRIMITIVA della funzione f(x) in I (intervallo) se $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$; insieme di def. è solo un INTERVALLO

Oss: se F(x) è primitiva di f(x) in I, anche F(x) + c è primitiva di f(x); $F'(x) - G'(x) = 0$, dove F(x) e G(x) sono primitive della stessa f(x). $-H(x) = F(x) - G(x)$ $\Rightarrow H'(x) = 0$ $\forall x \in I$ $\Rightarrow$ H(x) è costante ⇒ Due primitive di una stessa f(x) in I NECESSARIAMENTE differiscono per una costante [c].

Oss: Ex. $f(x) = \frac{1}{x}$: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ [non è intervallo]. Con $x > 0$, $F(x) = \ln(x)$ $\boxed{+c}$ → tutte le possibili primitive; Con $x < 0$, $F(x) = \ln(-x) + c$. Le primitive di f(x) si dividono in 2 classi [1: $\ln(x) + c$, 2: $\ln(-x) + c$] definite in intervalli ≠.

∄ def. in un insieme.

TH: Sia f continua in [a, b] e G(x) una primitiva di f in [a, b]

Allora $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$

Dim: [dal I th: F(x) è f(x) integrale $= \int_a^x f(t)\,dt$. è primitiva di f(x)]

∃ 2 f(x) primitive della stessa f(x) [tra le 1° e 2° th] $\Rightarrow F(x) - G(x) = h$ $\forall x \in [a, b]$, dove appunto $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - G(x) = h$. Calcolandola in $x = a$, l'integrale è nullo ⇒ $G(x) \Rightarrow -G(A) = h$ → $\int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(A)$

Questa relazione vale anche per $x = b$, quindi ottengo th.

Ex: $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \log 2$ ma $\int_{-1}^{-2} \frac{1}{x}\,dx = \cancel{\log(1)} - \log(2)$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \nexists$$ (nì cont. e nì def.)

T4: Sia f continua in $A \subseteq \mathbb{R}$. [INTEGRALE INDEFINITO]

$$\int f(x)\,dx = \{\text{funzioni primitive negli intervalli più ampi di continuità di } f\}$$

Ex:

$$\underset{[\text{definite}]}{\int 1 \cdot dx = \{x + c \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } c \in \mathbb{R}\}}$$ si scrive $$\underset{[\text{INTEGRALE IMMEDIATO}]}{\int dx = \overset{\infty \text{ funzioni}}{\boxed{x + c}} \quad \forall c \in \mathbb{R}}$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \; : \mathbb{R}$$

$\downarrow$

- Con $n \in \mathbb{N}$, $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \; : \mathbb{R}$. (è 1 classe di ∞ $f(x)$)

- $$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \nearrow \log x + c & \text{per } x \in (0, +\infty) \\ \searrow \log(-x) + c & \text{per } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$ ci sono 2 classi di ∞ $f(x)$.

Si scrive anche $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$; ma tutte le primitive di $\log|x| + c$: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, però è falso. $\log|x| + c$ è definita a SECONDA di x; se è + è definita in $(0, +\infty)$ (al contrario se $x < 0$). Ci si deve ricordare che ci sono 2 classi di $f(x)$.

- $$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-1}\,dx = -x^{-1} + c$$ [stessa regola delle x^n; $\forall n < 0$]

$\downarrow$

$$\int \frac{1}{x^n}\,dx = \int x^{-n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$$ (2 classi di $f(x)$)

$\Downarrow$

- $$\int x^{\overset{r \in \mathbb{Q}^+}{r}}\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \; : \mathbb{R}$$ (se però è $\frac{1}{2}$ sono def in $\mathbb{R}^+$)

Ex: $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c \to \frac{2}{3} x \sqrt{x} : [0, +\infty) \right]$

- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$: $\mathbb{R}$; $\int \cos x \, dx = \sin x + c$: $\mathbb{R}$

- $\int e^x \, dx = e^x + c$: $\mathbb{R}$

- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \text{arc tg } x + c$: $\mathbb{R}$; $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \text{arc} \sin x + c$: $[-1, 1]$

Però $\int \log x \, dx = ?$; Se $\int \frac{1}{1 \textcircled{-} x^2} \, dx$ se fosse + sarebbe + facile

Vengono introdotte nuove $f(x)$: FUNZIONI IPERBOLICHE

$\sinh(x)$; $\cosh(x)$; $\text{tgh}(x)$; $\text{cotgh}(x)$

- $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f'(x) = \cosh > 0 \Rightarrow$ sinh è strett. crescente $\Rightarrow$ INVERTIBILE in $\mathbb{R}$
- $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\text{tgh}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
- $\text{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, mentre nelle circolari trigon. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

- $\sqrt{1 - \sinh^2 x} = \cosh x$ (Omesso il $\pm$ perché $\cosh x : D \to \mathbb{R}^+$)
- $\pm\sqrt{\cosh^2 x - 1} = \sinh x$ (+ per $x \geq 0$, − per $x < 0$)

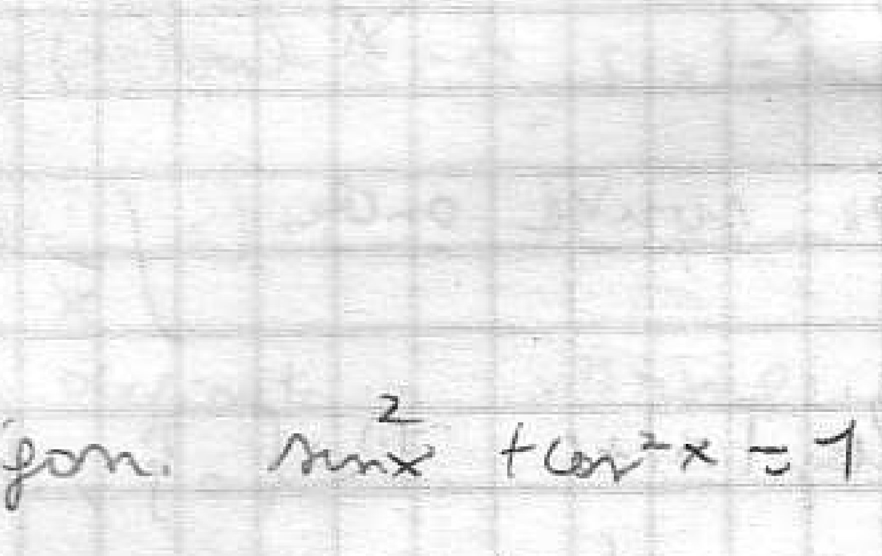
Valgono le formule di duplicazione delle trig.

- $\sinh 2x = 2 \cosh x \sinh x$; - $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$ o $1 - 2\sinh^2 x$

- $\sinh(x)$:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$

[grafico abbozzato]



La sua inversa è ' ' al posto di "arc"

SETTORE SENO IPERBOLICO di x : $\text{sett} \sinh x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Derivando sett sinh x ho $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Ho nuovi integrali immediati

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \text{sett}\sinh x + c \quad , \quad \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \text{sett}\,\text{tgh}\,x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \text{sett}\cosh x + c$$

Non si possono calcolare tutti gli integrali [ex: $\int e^{x^2}dx$ o $\int \frac{\sin x}{x}dx$]

19-1-2005

METODO DI SOSTITUZIONE - FORMULE LOGARITMICHE - INTEGRALI POLINOMIALI ((XLIX) - (L) ex.)

21-1-2005

EQUAZIONE DIFFERENZIALE (cenni): si introduce il concetto di EQUAZIONE FUNZIONALE: eq. dove l'incognita è $f(x)$ e non variabile (eq. algebrica). Ex: $\underline{x}^2 + 2x\underline{y} - 2x = 0$, la x è var. ind. mentre y dip. da x ($y = f(x)$, funzione incognita). Considero $x = k$ → $y = -x \pm \sqrt{x^2+8x}$

Origina due funzioni: $-x + \sqrt{x^2+8x}$ e $-x - \sqrt{x^2+8x}$, definite nel sottoinsieme ℝ che soddisfa $x^2+8x \geq 0$.

EQ DIFFER. = particolare EQ. FUN. in cui la $f(x)$ incognita interviene tramite derivate (successive) di ordine n. Ex: $y^2 + 2xy' - 2x = 0$.

L eq. diff. ORDINARIA: $f(x)$ incognita dipende da una sola variabile

Si può parlare di eq. diff. di 1° ordine dove l'ordine max. di derivazione di $f(x)$ inc. è 1 (derivata prima) [$y^2 + 2xy'' - 2x = 0$ è di 2° ORDINE]

Ex: $y' = \cos x$ (eq. diff. ordinaria 1 ord.) La sol. è $y = f(x)$ / $y' = \cos x$ ⇒ cioè una PRIMITIVA generica di $\cos x$. Ex: $y = \sin x$ è una particolare soluzione (non è unica) → $y = \sin x + c$ è generica sol. (definite in ℝ)

$y(x) = \int \cos x\,dx$ (stessa op. dell'int. indef.)

Le soluzioni delle eq. differenziali si chiamano anche INTEGRALI dell'eq. diff. Distinguiamo in:

- INTEGRALE PARTICOLARE (diamo valore a C)
- " GENERALE (famiglie sol.)

$\downarrow$

L'int. generale di una eq. diff è definita solo in I (come le primitive). Ex: $y' = \frac{1}{x}$; l'int. gen. dell'eq. diff. è $y(x) = \log|x| + c$ definita a seconda di x $[(0,+\infty)$ se $x>0$, $(-\infty,0)$ se $x<0]$. In realtà $y(x) : \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ma non è intervallo $\Rightarrow$ devo considerare i sottoinsiemi particolari; ⌈Spesso per le int. gen. o cmq. per somme di $| \,|$ e costanti arbitrarie ? si scrive $y(x) = \log|x| + \boxed{\log(c)}$ $\to$ è sempre arbitraria (codominio è $\mathbb{R}$ quindi è uguale), quindi $y(x) = \log c|x|$, tolgo $| \,|$ e scelgo c in modo opportuno. Se $x>0$, $c \in \mathbb{R}^+$; se $x<0$, $c \in \mathbb{R}^-$ $\Rightarrow y(x) = \log(cx)$⌋

$$y' = \frac{1}{x} \to \int \frac{1}{x}\,dx = \log(cx) \overset{\Downarrow}{<} \begin{matrix} c>0 \text{ se } x>0 \\ c<0 \text{ se } x<0 \end{matrix}$$

[si chiamano queste con eq. diff. DIRETTE]

$y' = \frac{1}{x} \to y(x)$ sono $\boxed{\infty^1}$ sol. $\log(cx)$ (se si han eq. di 2 ord si ha ∞^2)

$\to$ variano al variare di un parametro

$\downarrow$

Importante trovare sol. particolare x certo c nelle applicazioni (ex modello fenomeno fisico). Si considera quindi condizione iniziale $\to$ so quanto $f(x)$ vale x un particolare punto (ex. eq. moto, fisso x_0) Si scrive:

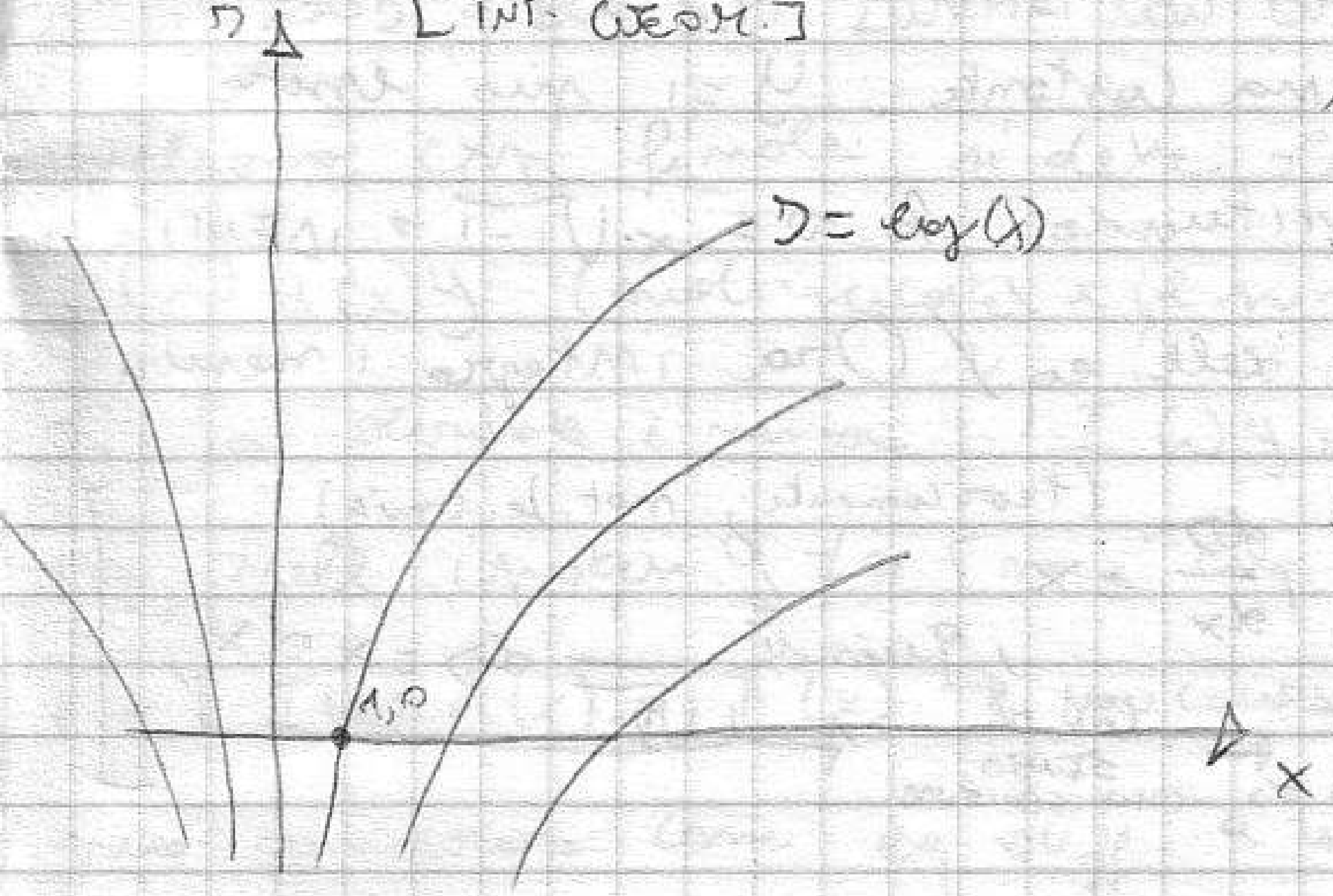
$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x} \\ \boxed{y(x_0) = y_0} \end{cases} \qquad \text{Ex: } \begin{cases} y' = \frac{1}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Le sol. di questa eq. non sono ∞, ma è 1: $y(x) = \log(cx) \to$

$$\overset{y(1)}{0} = \log(c \cdot \overset{x_0}{1}) \to \boxed{c=1}$$

Il problema ammette una UNICA soluzione (come int. def.). La SOLUZIONE PARTICOLARE in ex è $y(x) = \log(x)$: $\boxed{(0,+\infty)}$ $\to x_0$ è scelto in questo int.

(71) Rappresentando le soluzioni ∞ dell'eq. diff. si hanno ∞ curve in piano cart. $\to$



A seconda di C ho una curva. Non si intersecano mai (sol. gen.)
↓
Se ho sol. part. se scelgo uno solo → (x_0, y_0) è punto dove passa curva integrale (è unica)
↓
Eq. diff. di 1° ordine con una + 1 cond. iniziale è PROBLEMA di CAUCHY.

Cons. eq. diff. INDIRETTE (molto + complesse).

- eq. diff. a VARIABILI SEPARABILI : ex. $y' = (1+y^2)x$ [$y = f(x)$ sempre]
↓ ↓
Separo x da y con semplici passaggi. $\frac{y'}{1+y^2} = x$ (qui nessun problema perché $1+y^2 \geq 0$)

Ho identità tra due funzioni: È lo stesso scrivere $\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = x$ e quindi $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \boxed{\int x\, dx} \rightarrow \frac{x^2}{2} + C$

Il 1 membro si calcola in y. Ponendo $y = f(x)$, $dy = f'(x)dx$ (sostituzione) $\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \arctan(y) = \frac{x^2}{2} + C$ [posso esprimere secondo var. dip.] Voglio cambiare var. di integ. x trasformare $\int$ in $\int$ immediato → L'eq. diff. ammette come sol. generale

$\operatorname{atan}(y) = \frac{x^2}{2} + C$ [espressione IMPLICITA] → $y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$ [esplicita]
|
Ex: $y' = x\sqrt{y-1}$ quindi $\frac{y'}{\sqrt{y-1}} = x$ → $y-1$ può essere zero, quindi effettuo il passaggio imponendo $y \neq 1$ (può essere sol. della 1° ma non della 2°). [ex: $\overset{①}{\sin x = \cos x}$ + $\overset{②}{tg x = 1}$ con $\cos x \neq 0$; eq. sono equivalenti se hanno stesso insieme sol, in ex. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ potrebbero essere sol. di ①; se si alle sol. della seconda si aggiungono → °).

Con $y = 1$ impongo che y non sia costante. $y = 1$ può essere sol di $y' = x\sqrt{y-1}$? $y' = 0$ → sostituendo ho $0 = x\sqrt{1-1}$ → IDENTITÀ ⇒ è SOLUZIONE. Quindi $y = 1$ è SOL. dell'eq. / Ora integro i membri:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \int x\,dx$$

$\left[\frac{y'}{\sqrt{y-1}} = \frac{1}{\sqrt{y-1}} \frac{dy}{dx} = x \right.$ (teoricamente, not. Leibniz), quindi $\frac{1}{\sqrt{y-1}}\,dy = x\,dx$ $\left. \right]$

non ha senso x è '. per dx ← NON HA SENSO COME SCRITTURA ←

$$2\sqrt{y-1} = \frac{x^2}{2} + c \to \sqrt{y-1} = \frac{x^2}{4} + c$$ (forma implicita, non sempre si può esplicitare)

$y = 1 + \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2$ → sol. gen. di $y' = x\sqrt{y-1}$ (∞^1 sol) / Qui ∄ c / $y = 1$ [neanche con limite] (quindi avrei PERSO soluzione). Sol. di questo tipo sono <u>int. SINGOLARI</u> → $y = 1$ è int. sing. (∉ classe di sol. int. gen.)

(Vedi (LIII) ex.)

25-1-2005 [Vedi LIV, LV ex.]

EQ. DIFF. LINEARI DEL 1° ORDINE (generalizzabili a ordini superiori)

1° " " " OMOGENEA: $y' + \alpha(x)y = \boxed{0}$ (l'incognita e la sua y' sono comb. lineare espresse in funzioni in x → $\alpha(x)$ coefficiente comb. lineare)

(si forma di ordine + : $y'' = \alpha(x)y' + \beta(x)y = 0$)

2° " " " NON OMOGENEA: $y' + \alpha(x)y = \boxed{\beta(x)}$

1) Risoluzione: È particolare eq. a var. separabili ⇒ $y' = -\alpha(x)y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\alpha(x)$ impongo $y \neq 0$. Integro i membri: $\int \frac{dy}{y} = -\int \alpha(x)\,dx \Rightarrow \log|y| = -\int \alpha(x)\,dx + c$; Passando a exp ho $|y| = e^{-\int a(x)\,dx + c}$ ($c \in \mathbb{R}$) (posso togliere | |) Quindi → $\Rightarrow y = e^{-\int \alpha(x)\,dx} \cdot e^{c}$. Se ho $y' + \alpha(x)y = 0$, la sol generale è $\boxed{y = c \cdot e^{-\int \alpha(x)\,dx}}$ [sempre, dove $c \in \mathbb{R}$], definita negli intervalli di continuità di $\alpha(x)$ [Vedi (LVI) ex.]

→

31 - 1 - 2005 . EQ DIFF. LINEARI NON OMOGENEE → $y' + \alpha(x) y = \beta(x)$

Vogliamo exp. finale, si deve determinare $\overset{\text{1 sola è suff.}}{\text{una}}$ $I(x) \,/\, \cancel{I(x) \cdot y'} +$ $I(x)\,\alpha(x)\,y$ (moltiplicato x il primo membro) $= \frac{d}{dx}\left(I(x)\,y\right)$.
↓
Si fa derivata 2° membro: $I'(x)\,y + \cancel{I(x)\,y'}$ ⇒ al 1° e 2° mem. c'è stessa eq. Nell'ipotesi $y \neq 0$ [non è exp soluzione] (non da particolare); dividiamo membri per y e ho $I(x)\,\alpha(x) = I'(x)$ → non compare incognita y (unica incognita è $I(x)$) → si può considerare come eq. diff. a variabili separabili: $\frac{I'(x)}{I(x)} = \alpha x$ e integro membro a membro; ottengo $\log|I(x)| = \int \alpha(x)\,dx$ [dovrei mettere $+C$, ma cerchiamo 1 particolare f(x) ad ex quando $C=0$] ⇒ $|I(x)| = e^{\int \alpha(x)\,dx}$ → posso togliere | | → $\boxed{I(x) = e^{\int \alpha(x)\,dx}}$ → FATTORE INTEGRANTE dell'eq. diff.; Con questa $f(x)$ moltiplichiamo i membri ⇒ $I(x)\,y' + \alpha(x)\,I(x)\,y = \beta(x)\,I(x)$ (ris. non cambia). Abbiamo però scelto $I(x)$ per cui il 1° membro è uguale a $\frac{d}{dx}\left(I(x)\,y\right)$ + conclusione, quindi $= \beta(x)\,I(x)$. Con integrazione ai due membri si ha $I(x)\,y = \int \beta(x)\,I(x)\,dx + c$, posso dividere per $I(x)$ ($\neq$) e ottengo soluzione generale: $\boxed{y(x) = \frac{1}{I(x)}\left\{\int \beta(x)\,I(x)\,dx + c\right\}}$, (vedi (2x) ex.)

CALCOLO 1 - LIMITI ["=" è → in punti 2,3]

- LIMITI NOTEVOLI: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$; $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x\boxed{b}}=e^{\alpha\boxed{b}}$ con $\alpha\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$;

$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$; $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$; $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$;

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$; $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; $\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$;

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{k}}=0$ [vedi p. 307]

- DETERMINAZIONI: $\infty\pm n=\infty$; $\infty\cdot n\ (n\neq 0)=\infty$; $\frac{\infty}{n}=\infty$; $\frac{n}{\infty}=0$;

$\infty^{n}\ (n>0)=\infty$; $\infty^{n}\ (n<0)=0$; $n^{\infty}\ (n>1)=\infty$; $n^{\infty}\ (0\leq n<1)=0$;

$+\infty+\infty=+\infty$; $+\infty\cdot(+\infty)=+\infty$; $(+\infty)^{+\infty}=+\infty$;

$+\infty-(-\infty)=+\infty$; $+\infty\cdot(-\infty)=-\infty$; $(+\infty)^{-\infty}=0$

- INDETERMINAZIONI: $+\infty-\infty=?$; $\frac{\infty}{\infty}=?$; $0\cdot\infty=?$; $\infty^{0}=?$; $1^{\infty}=?$

$\frac{0}{0}=?$; $0^{0}=?$

- METODI DI RISOLUZIONE:

  - DE L'HOSPITAL: se $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ derivabili $\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$; trasformazioni indeterminate:

    - $0\cdot\infty\to\frac{0}{0}\ \left[g(x)\cdot h(x)=g(x)/[1/h(x)]\right]$; $\to\frac{\infty}{\infty}\ \left[g(x)\cdot h(x)=\frac{h(x)}{[1/g(x)]}\right]$
    - $\infty-\infty\to\frac{0}{0}\ \left[g(x)-h(x)=\left[1-\frac{h(x)}{g(x)}\right]/[1/g(x)]\right]$

$g(x)^{h(x)}=e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}\Rightarrow 1^{\infty}\to\infty\cdot 0$; $0^{0}\to 0\cdot\infty$; $\infty^{0}\to 0\cdot\infty$

  - $\lim_{x\to+\infty}f(x)(c+\sin x)=$
    - $+\infty$ se $c>1$
    - $-\infty$ se $c<-1$
    - $\nexists$ se $c=1$
    - $\nexists$ se $-1<c<1$

    ; altri metodi: p. 332, 333 ; 526 ; … 636

- SUCCESSIONI - LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{n\to+\infty}a^{n}=\begin{cases}0 & \text{per } |a|<1\\ 1 & \text{"} \ a=1\\ +\infty & \text{"} \ a>1\\ \nexists & \text{"} \ a\leq -1\end{cases}\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{a}}{a^{n}}=\begin{cases}0 & \text{per } a>0,\ a>1\\ +\infty & \text{per } a>0,\ -1<a\leq 1\end{cases}\qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}=e^{a}$$

$$\lim_{n\to+\infty}n^{a}\cdot a^{n}=\begin{cases}0 & \text{per } a>0,\ |a|<1\\ +\infty & \text{per } a>0,\ a\geq 1\end{cases}$$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{a}}{n!}=0\ (a>0)$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^{n}}{n!}=0\ (\forall a\in\mathbb{R})$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^{n}}=0$; $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{p}=1\ (p\in\mathbb{R})$; $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n^{a}}=0\ (a>0)$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln^{p}n}{n}=0\ (p>0)$; $\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{\alpha}{n}=\alpha$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0$; $\lim_{n\to+\infty}n\operatorname{tg}\frac{x}{n}=x$

$\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{x}{n}=1$

CALCOLO 1 - CONTINUITA', DISCONTINUITA' [in x_0 qualsiasi, $\in \partial D \cap D$]

punto di accumulazione e del dominio - no PUNTI ISOLATI

$f(x)$ e' continua se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

DISCONTINUITA' DI:

1' SPECIE: (SALTO) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x) = m$

2' SPECIE: Almeno uno tra i seguenti limiti e' $\pm\infty$:

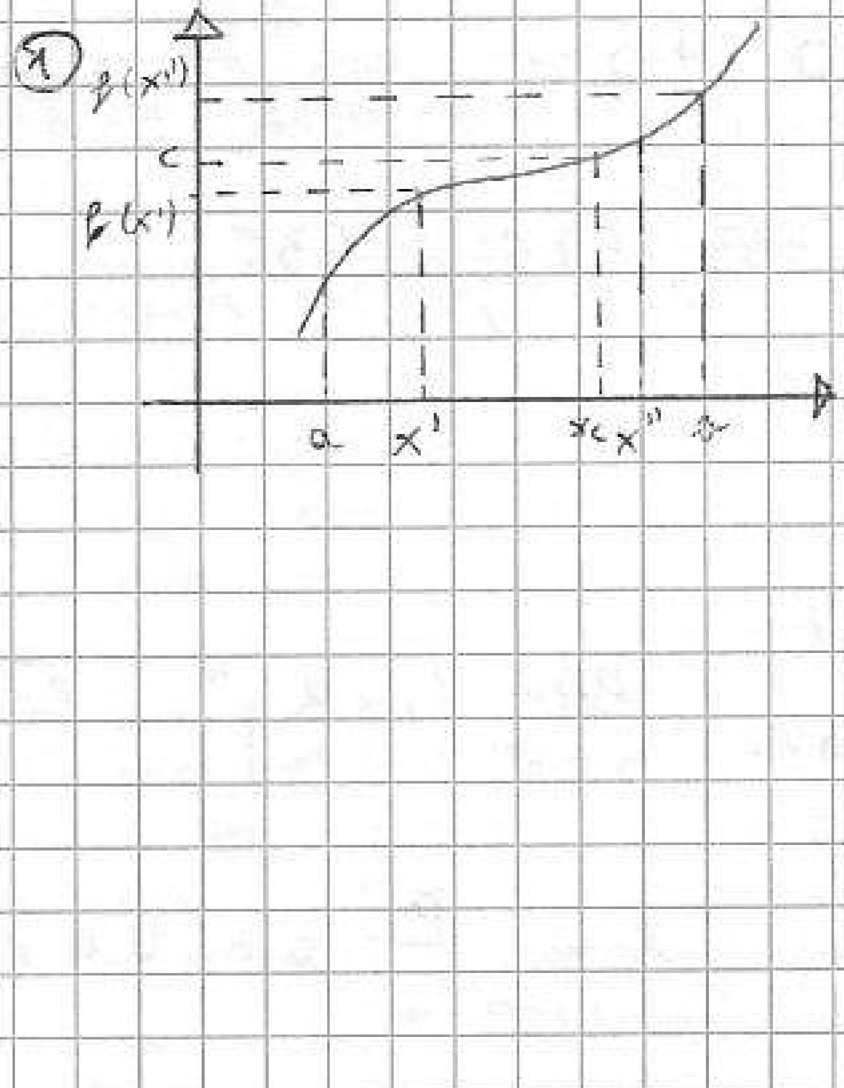
$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e/o $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

3' SPECIE: (ELIMINABILE) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$

- Se $f(x)$ e $g(x)$ continue $\Rightarrow a \cdot f(x) + b\, g(x)$ e' CONTINUA [Stesso per $f(x) \cdot g(x)$]
- Se $f(x)$ e $g(x)$ continue e $g(x) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e' CONTINUA

TEOREMI SULLE F(x) CONTINUE:

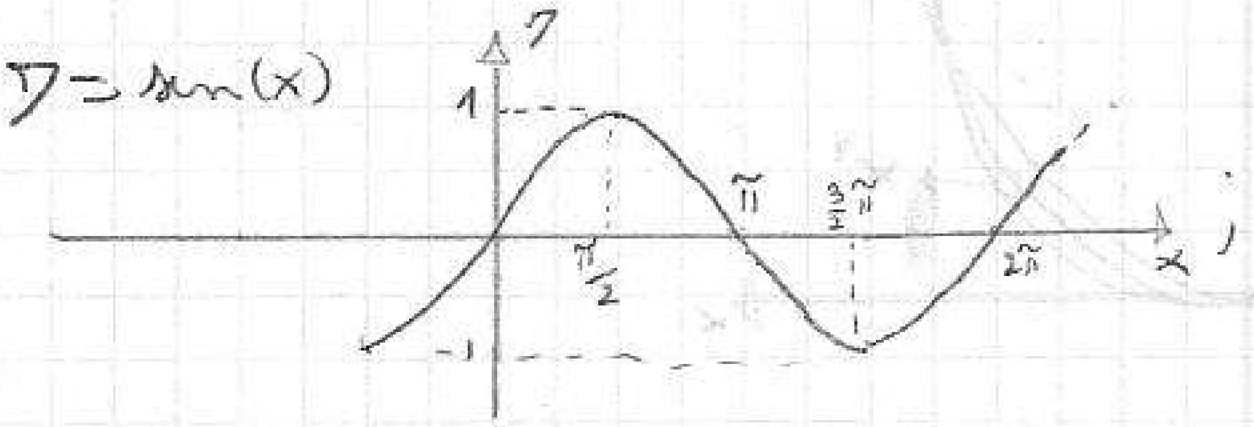
- VALORI INTERMEDI: [IP: $f(x)$ continua in I_b; $x', x'' \in I$ (ex $x' < x''$)] - ALLORA - [$\forall\, c$ compreso tra $f(x')$ e $f(x'') \to \exists\, x_c \in (x', x'') / f(x_c) = c$] ①
- BOL.-CAUCHY ($\exists$ degli ZERI): [IP: $f(x)$ continua in I_b; $x', x'' \in I$ (ex $x' < x''$); / $f(x') \cdot f(x'') < 0$ (segno contrario)] $\Rightarrow$ [$\exists\ c \in (x', x'') / f(x) = 0$] ②
- WEIERSTRASS: [IP: $f(x)$ continua in $[a, b]$] - ALLORA - [$\exists\ x_m, x_M \in [a, b]$] / $f(x_m) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \wedge f(x_M) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$



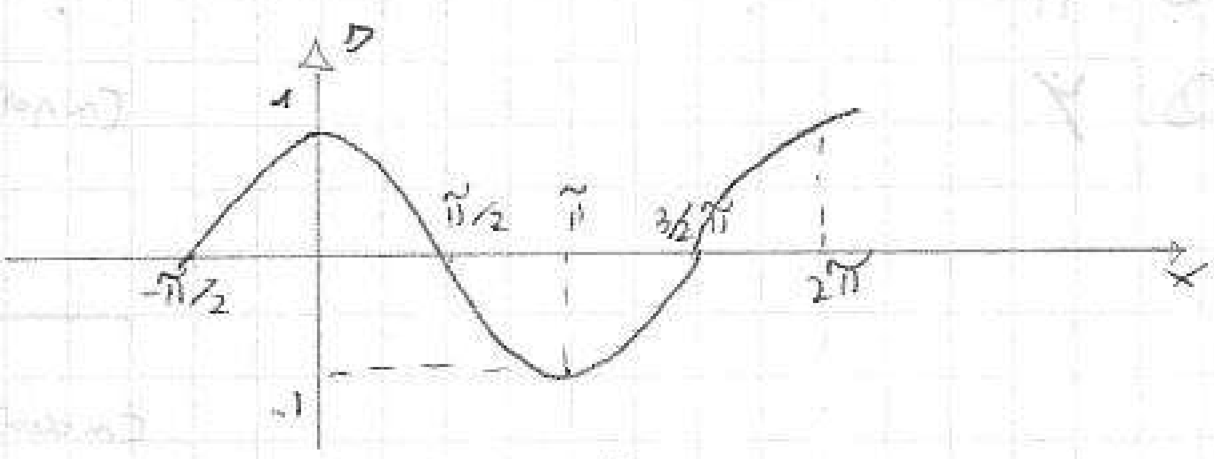
CALCOLO 1 - FUNZIONI ELEMENTARI

• TRIGONOMETRICHE DIRETTE

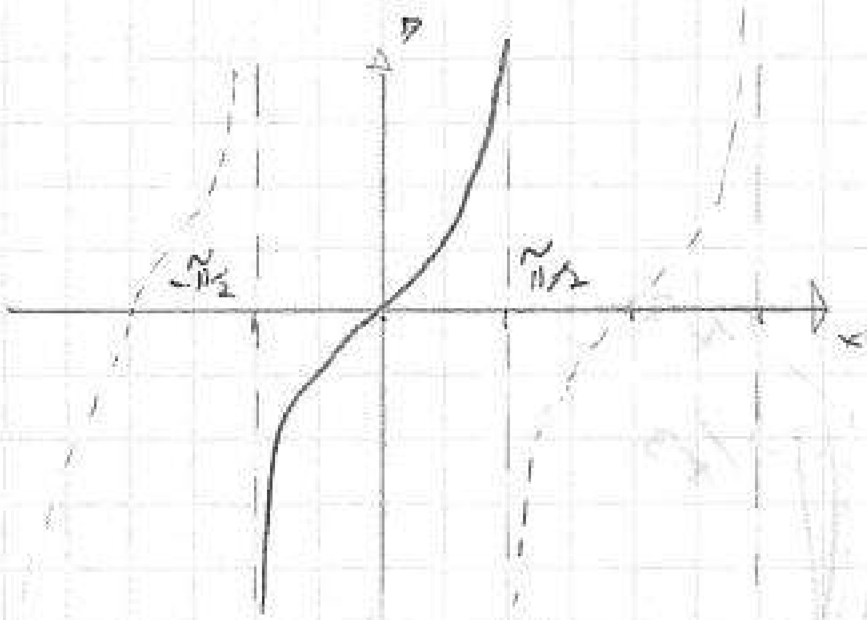
$y = \sin(x)$



$y = \cos x$



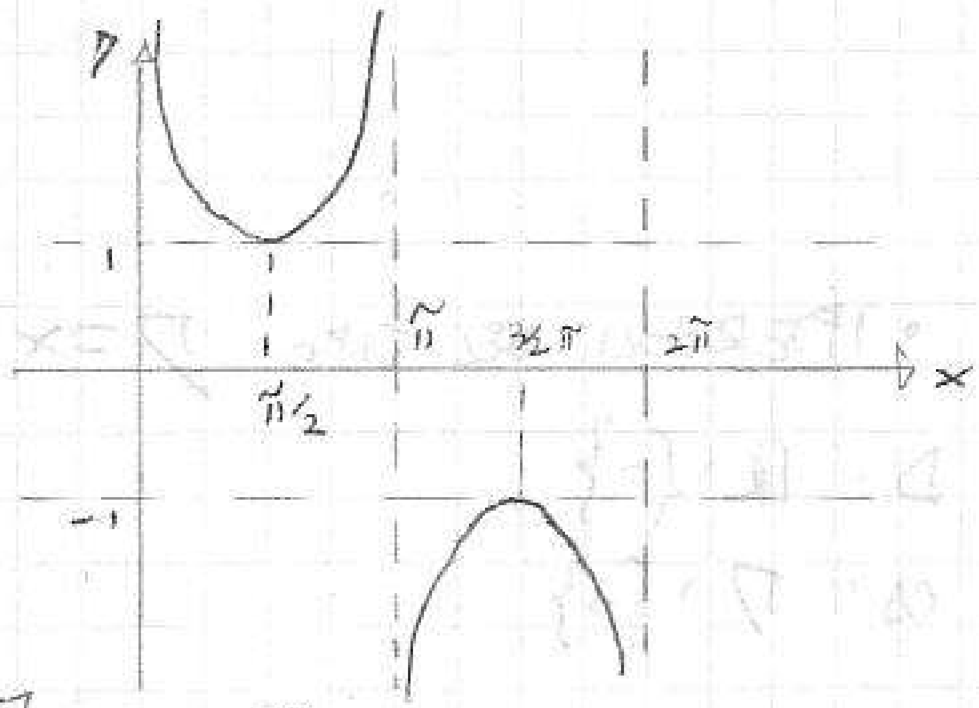
$y = tg(x)$



[COSECANTE]
$y = cosec(x)$

D: $x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi$

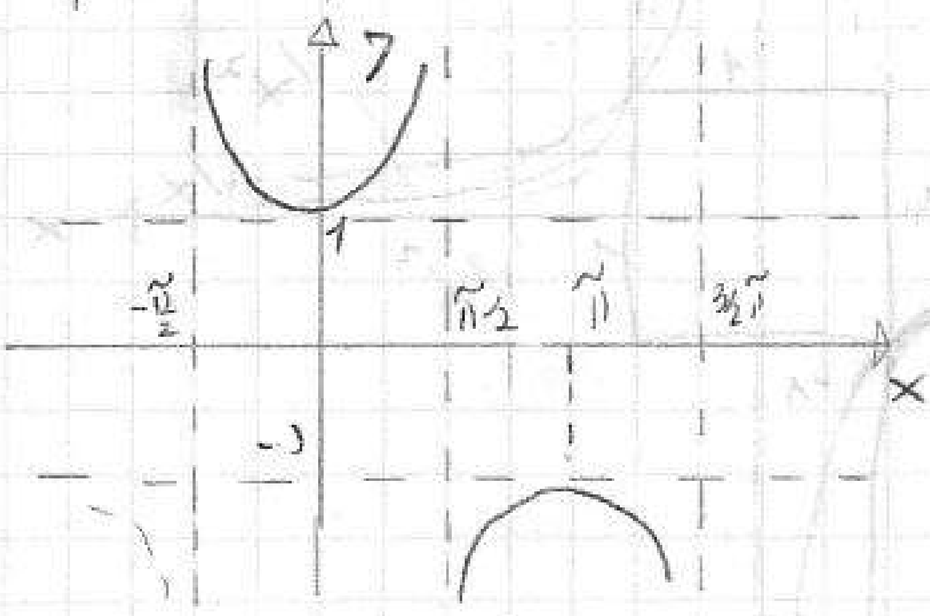
CD: $y \geq 1$; $y \leq -1$



[SECANTE]
$y = sec(x)$

D: $x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

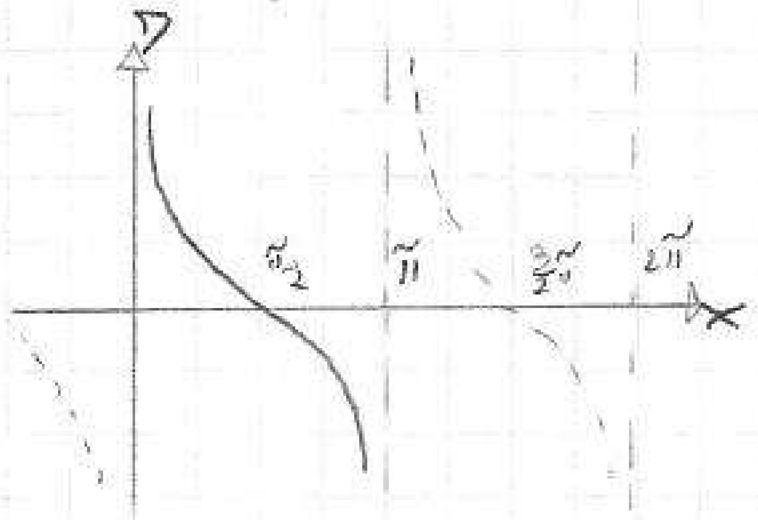
CD: $y \geq 1$; $y \leq -1$



[COTANGENTE]
$y = cotg(x)$

D: $\{ \in \mathbb{R} / x \neq k\pi$

CD: $\mathbb{R}$ y

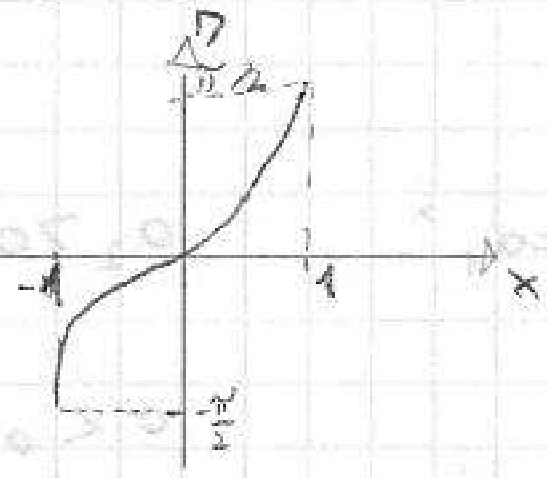


• TRIGONOMETRICHE INVERSE

[ARCOSENO]
$y = arc \sin(x)$

D: $-1 \leq x \leq 1$

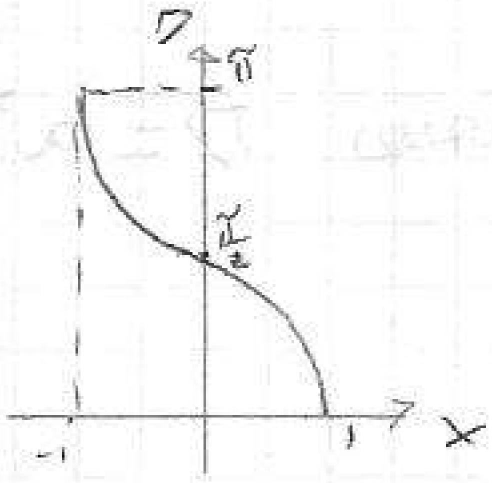
CD: $-\frac{\pi}{2} \leq y \frac{\pi}{2}$



[ARCOCOSENO]
$y = arc \cos x$

D: $-1 \leq x \leq 1$

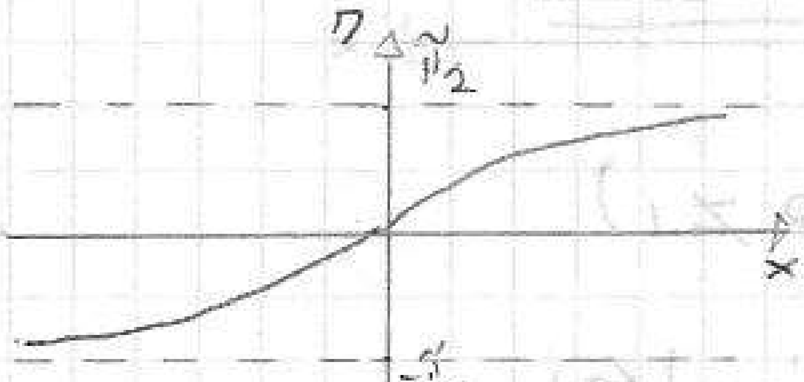
CD: $0 \leq y \leq \pi$



[ARCOTANGENTE]
$y = arctg\, x$

D: $\mathbb{R}$

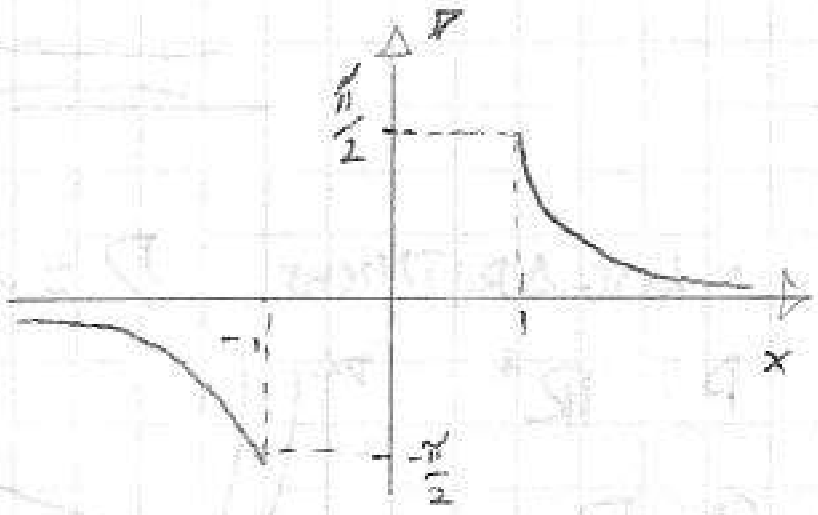
CD: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$



[ARCOCOSECANTE]
$y = arc\, cosec(x)$

D: $x \leq -1$; $x \geq 1$

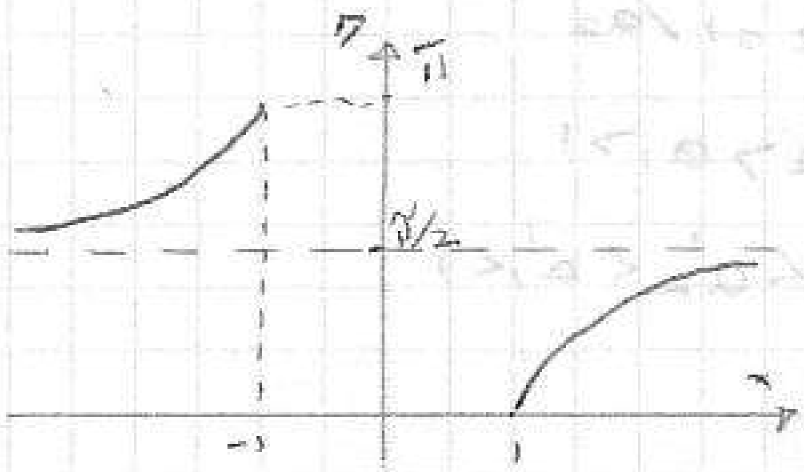
CD: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, $y \neq 0$



[ARCOSECANTE]
$y = arc\, sec\ (x)$

D: $x \leq -1$; $x \geq 1$

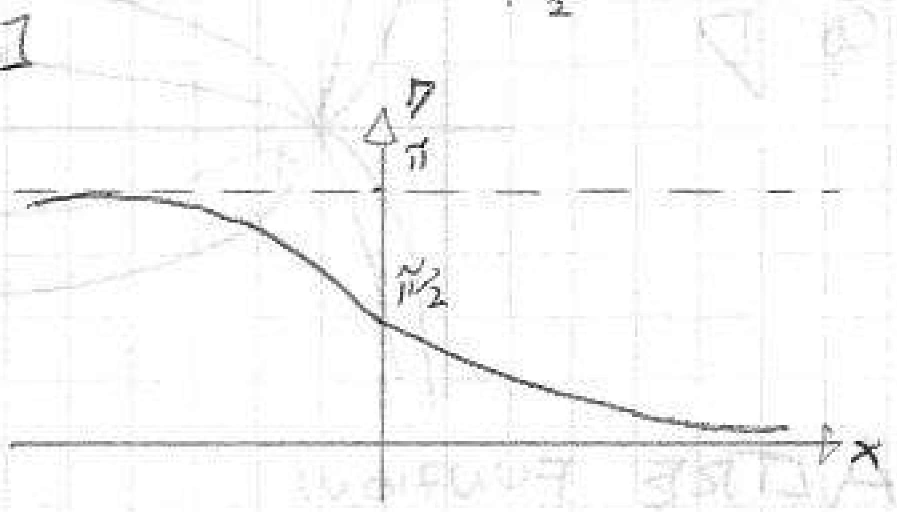
CD: $0 \leq y \leq \pi$; $y \neq \frac{\pi}{2}$



[ARCOCOTANGENTE]
$y = arc\, cotg\, x$

D: $\mathbb{R}$

CD: $0 \leq y \leq \pi$

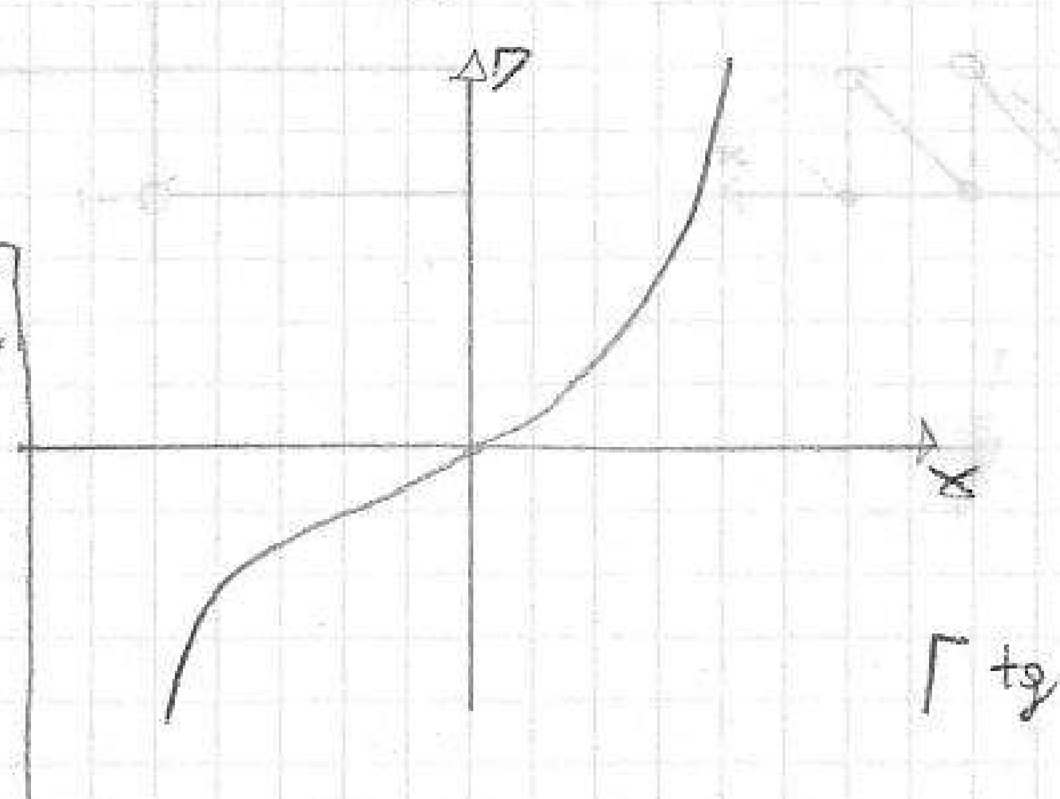


• IPERBOLICHE DIRETTE (p. 516)

[SENO IPERBOLICO]
$y = \sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

D: $\mathbb{R}$

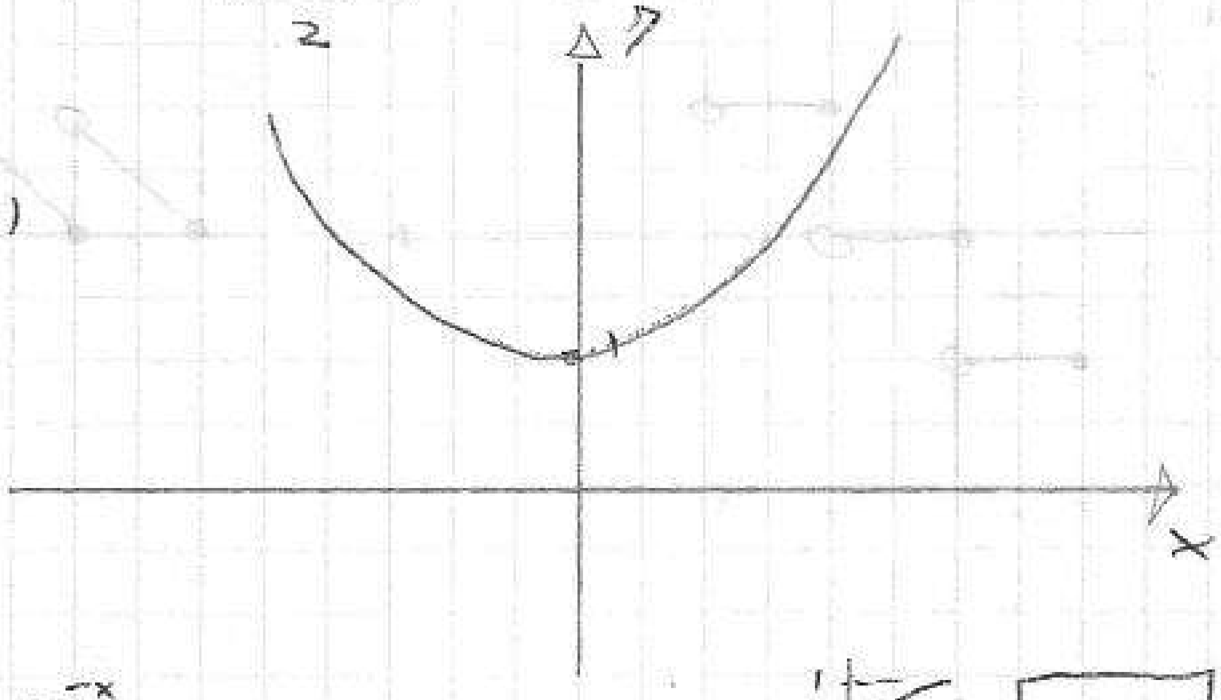
CD: $\forall y$



[COSENO IP.]
$y = \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

D: $\mathbb{R}$

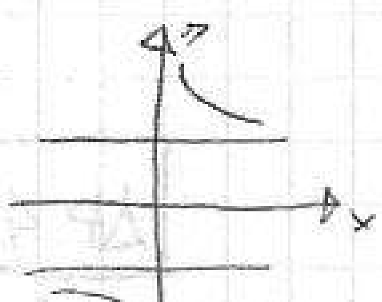
C.D: $y \geq 1$



$y = cotgh = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

D: $\mathbb{R}$

CD: $y < -1$; $y > 1$



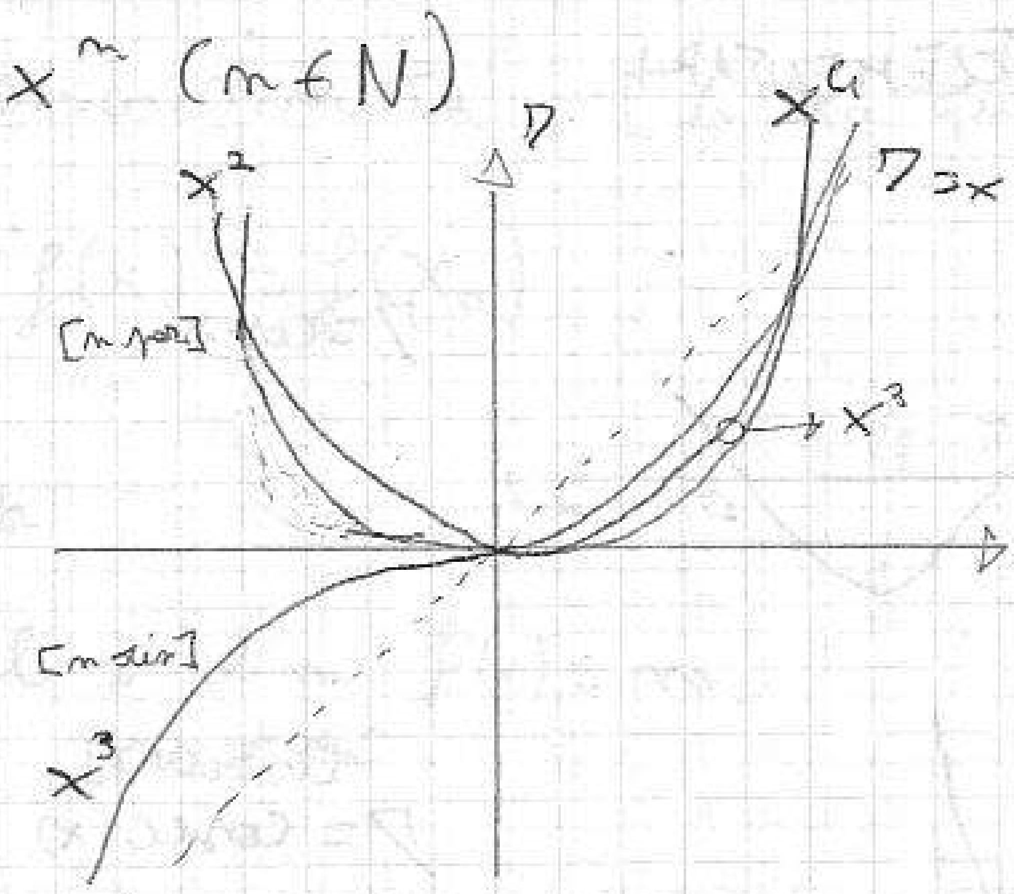
$\lceil tgh\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$; D: $\mathbb{R}$; CD: $-1 < y < 1$

$\boxed{AP. 3}$

• PARABOLICHE DEL TIPO $y = x^n$ $(n \in N)$

D: $\mathbb{R}$

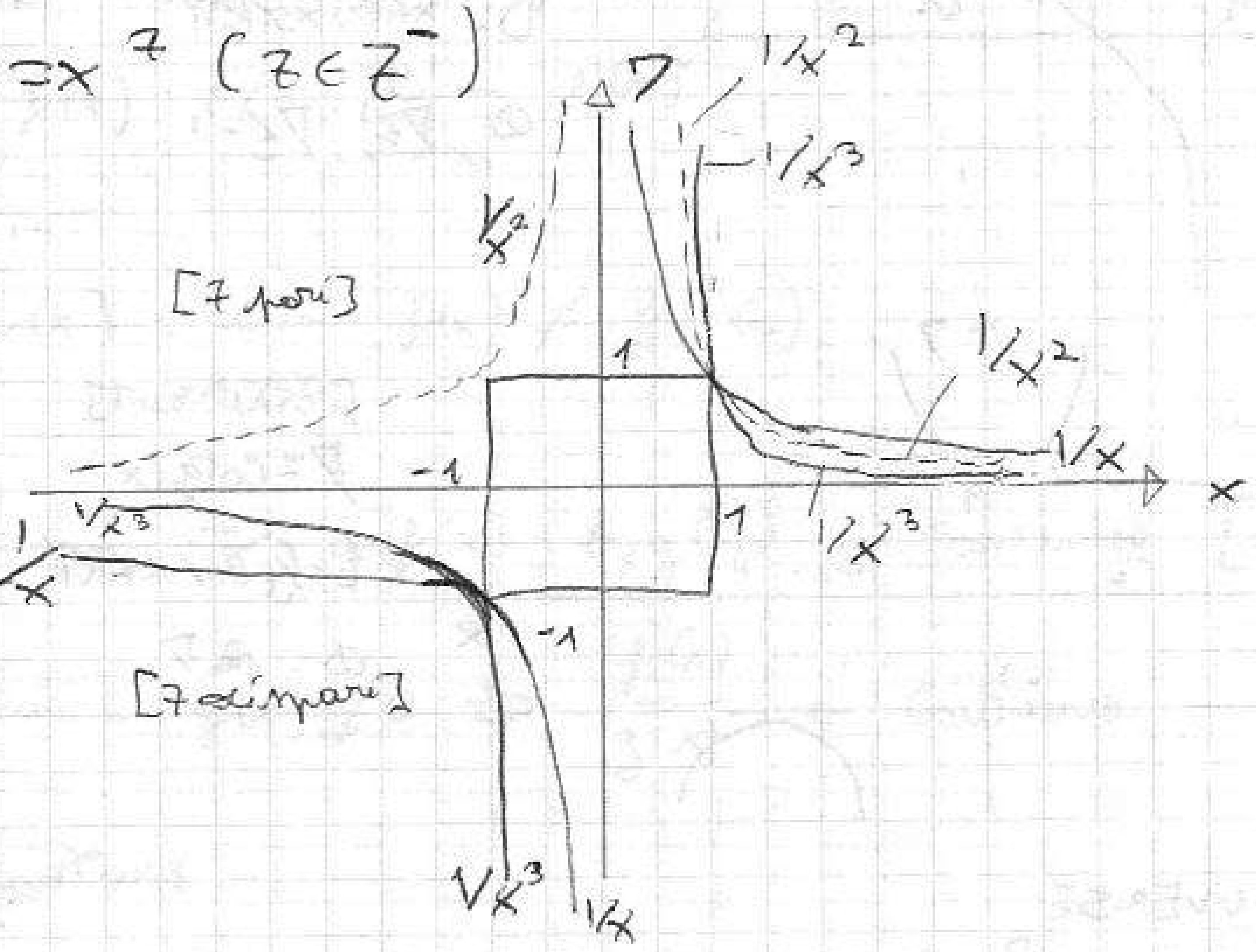
C: y



• IPERBOLI DEL TIPO $y = x^z$ $(z \in Z^-)$

D: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

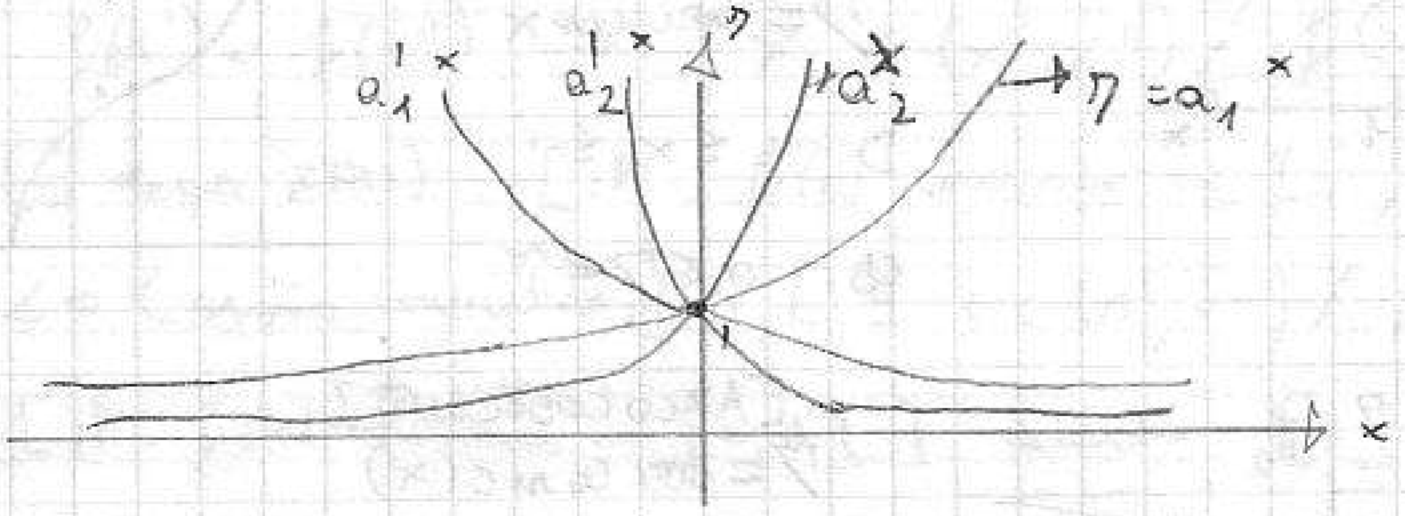
C: $y \setminus \{0\}$



• ESPONENZIALI $y = a^x$ con $a > 0$

D: $\mathbb{R}$

C: $y > 0$



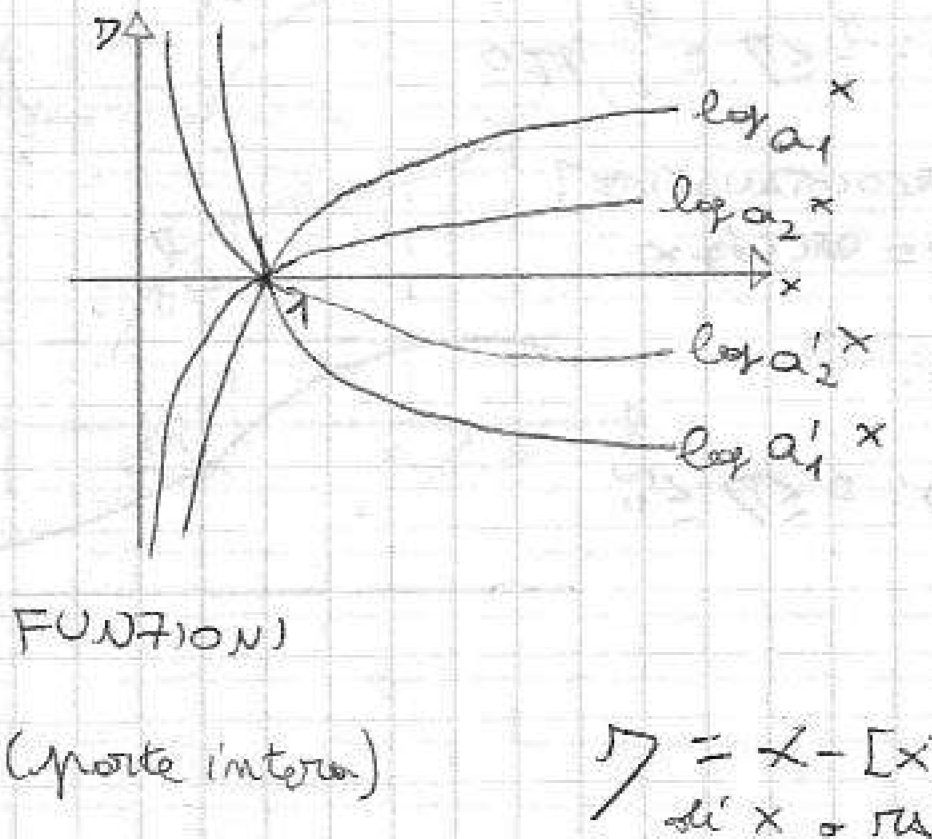
$a_2 > a_1 > 1$ $\quad a_1' = 1/a_1$

$0 < a_2' < a_1' < 1$ $\quad a_2' = 1/a_2$

• LOGARITMICHE $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

D: $\mathbb{R}^+$

C: y



$a_1' = 1/a_1$

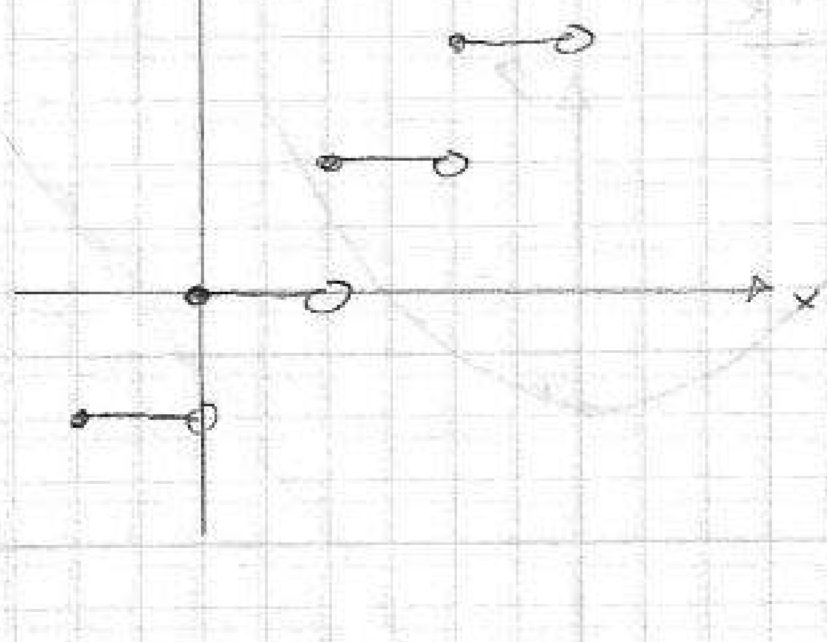
$a_2' = 1/a_2$

$a_2 > a_1 > 1$

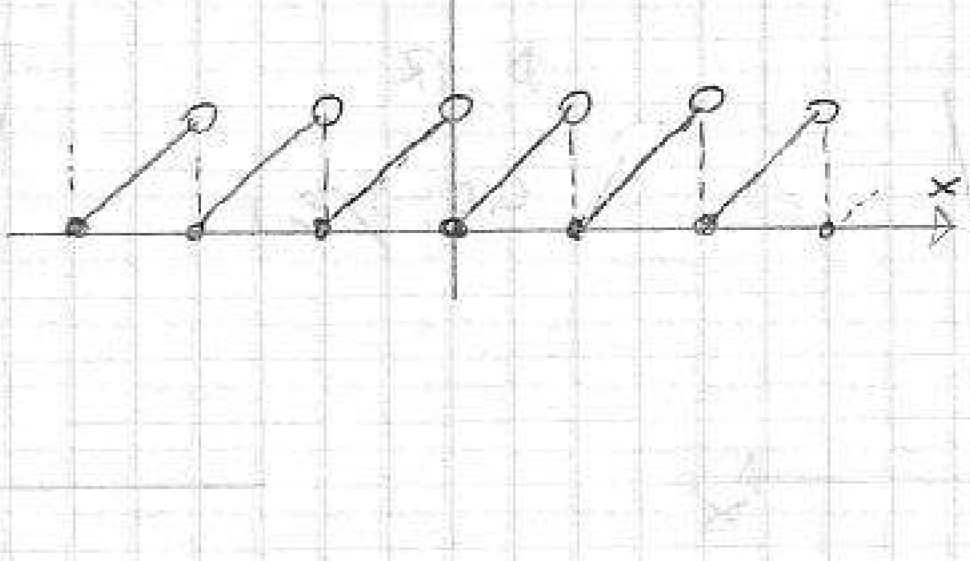
$0 < a_2' < a_1' < 1$

ALTRE FUNZIONI

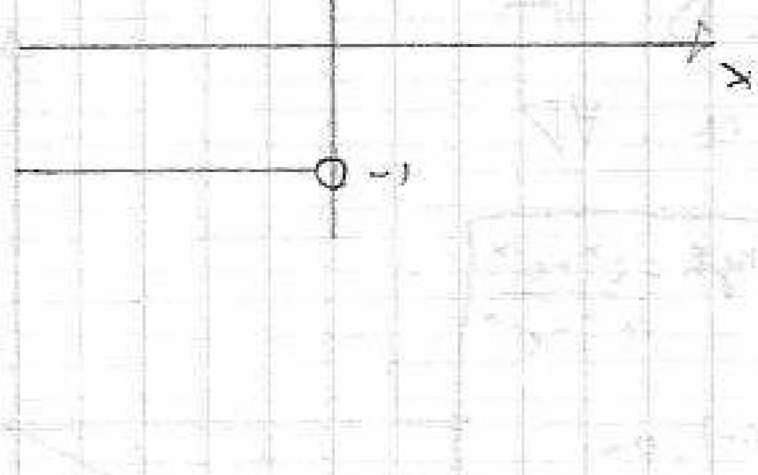
$y = [x]$ (parte intera)



$y = x - [x]$ (parte decimale di x o MANTISSA di x)



$y = \frac{x}{|x|} = \text{sgn}(x)$ (segno di x)



CALCOLO 1 - DERIVATE

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]_{\text{R. INC.}}$$

Regole di derivazione:

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(f-g)' = f' - g'$
- $(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{[g(x)]^2}$ $[g(x) \neq 0]$

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)}$$

- $f[(g(x))]' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$
- $|f(x)|' = f'(x) \cdot \frac{f(x)}{|f(x)|}$
- $\left[g(x)^{h(x)}\right]' = g(x)^{h(x)} \cdot \left(h'(x) \ln g(x) + \frac{h(x) \cdot g'(x)}{g(x)}\right)$

Retta tangente a f in $A(x, y)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Se $\lim_{h \to 0^+} \text{R. INC.} = \underset{[\infty]}{l} \neq \lim_{x \to 0^-} \text{R. INC.} = \underset{[m]}{m\,[\infty]}$

  ↓

  PUNTO ANGOLOSO

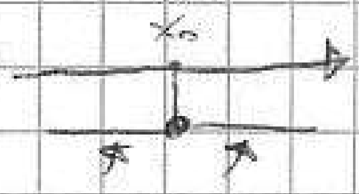
- Se $\lim_{h \to 0^+} \text{R. INC.} = \underset{[-\infty]}{+\infty} \neq \lim_{h \to 0^-} \text{R. INC.} = \underset{[+\infty]}{-\infty}$

  ↓

  x_0 = PUNTO DI CUSPIDE, $f(x_0)$ = LA CUSPIDE

- Se $\lim_{h \to 0} \text{R. INC.} = +\infty$ → FLESSO A TG. VERTICALE ASCENDENTE

- Se $\lim_{h \to 0} \text{R. INC.} = -\infty$ → FLESSO A TG. VERTICALE DISCENDENTE

- 

$\left[\lim_{x \to x_0} f'(x) = 0\right]$ → FLESSO A TG. ORIZZONTALE

TEOREMI: - ROLLE: [IP: f cont. in $[a, b]$; f der. almeno in (a, b); $f(a) = f(b)$] - ALLORA: [$\exists\, c \in (a, b) /$ $f'(c) = 0$]

- LAGRANGE (VALORI INTERMEDI) [IP = Rolle] - ALLORA - [$\exists$ almeno 1 punto $c \in (a, b) / f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$] → [vedi m retta tangente]

DERIVATE PRIME DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

[f]	[f']	[f]	[f']
k	0	x^m	$m\ x^{(m-1)}$
x	1	$kx^m + n$	$km \cdot x^{(m-1)}$
e^x	e^x	a^x	$a^x \ln a$
$\sqrt[m]{x^n}$	$\frac{n}{m}\sqrt[m]{x^{(n-m)}}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$	$\mathrm{cotg}\, x$	$\frac{-1}{\cos^2 x} = -1 - \mathrm{cotg}^2 x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\mathrm{arc\,tg}\, x$	$1/1+x^2$
$\mathrm{arc\,cotg}\, x$	$-1/1+x^2$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathrm{tgh}\, x$	$1/\cosh^2 x$
$\mathrm{cotgh}\, x$	$-1/\sinh^2 x$	$\mathrm{arc\,sinh}\, x$	$1/\sqrt{x^2+1}$
$\mathrm{arc\,cosh}\, x$	$\pm\ 1/\sqrt{x^2-1}$	$\mathrm{arc\,tgh}\, x$	$1/1-x^2$
$\mathrm{arc\,cotgh}\, x$	$1/1-x^2$		

CALCOLO 1 - INTEGRALI

- METODO DI SOSTITUZIONE

Ex: $\int \sqrt{\sin x}\,\cos x\,dx$ $\quad$ $\sin x = t$, $dt = \cos x\,dx$, $dx = \frac{dt}{\cos x}$ $\quad$ $\int \sqrt{t}\,\cancel{\cos x}\,\frac{dt}{\cancel{\cos x}} = \frac{t^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}} + c$

- FORMA LOGARITMICA

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \log|\varphi(x)| + c$$ → il numeratore è la derivata del denominatore

- INTEGRALI POLINOMIALI (ricondotti alla forma delle [GENERALIZZAZIONE] →

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx, \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$ [Vedi ㉑]

- METODO PER PARTI

$$\int f\,\underbrace{dg}_{g'\,dx} = \int f g'\,dx \; ; \text{ex: } \int \overset{f}{x}\,\overbrace{e^x\,dx}^{dg} = x\,\overbrace{e^x}^{\text{primitiva } e^x} - \int e^x\,dx = e^x(x-1)+c$$

$$\downarrow$$

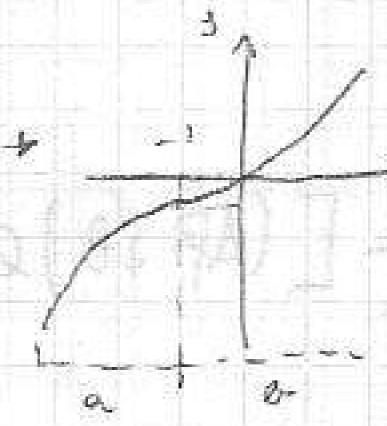
$$\int f\,dg = \underbrace{fg}_{\text{PRIMITIVA}} - \int g\,\overbrace{df}^{f'\,dx}$$

- FUNZIONI INTEGRALI (con | |)

$$F(x) = \int_\alpha^x |t+\beta|\,dt; \quad f'(x) = \begin{cases} x+\beta & \text{per } x \geq -\beta \\ -x-\beta & \text{per } x < -\beta \end{cases}$$

ex: $$F(x) = \begin{cases} -\int_x^\alpha -(t+\beta)\,dt & \text{per } x < -\beta \\ \int_\alpha^\beta (-x-\beta)\,dx + \int_\beta^x (x+\beta)\,dt & \text{p } x \geq \beta \end{cases}$$

Ex: $\int_0^1 |t+1|\,dt$ →



[F(x) la studi negli intervalli della derivata: $F(x) = \begin{cases} - \circ & \text{p } x \geq -\beta \\ - \circ & \text{p } x < -\beta \end{cases}$

però la componi così: da $-\infty$ a α e da α a $+\infty$, definiti sempre

come prima; ex: $a = -\int_x^{-1} -(x+\beta)\,dt - \int_{-1}^{0} (x+1)\,dx$ / $b = \int_0^x (t+1)\,dt$]

CALCOLO 1 - INTEGRALI IMMEDIATI

- Con $n \in \mathbb{N}$: $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \mathbb{R}$; Con $r \in \mathbb{Q}^+$ $\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$

- $\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + c$ (ci sono 2 classi di primitive $\begin{cases} \log x & x>0 \\ \log(-x) & x<0 \end{cases}$

- $\int \sin x \, dx = \cos x + c$; $\int \cos x \, dx = \sin x + c$; $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$; $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

- $\int e^x \, dx = e^x + c$ $\qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$

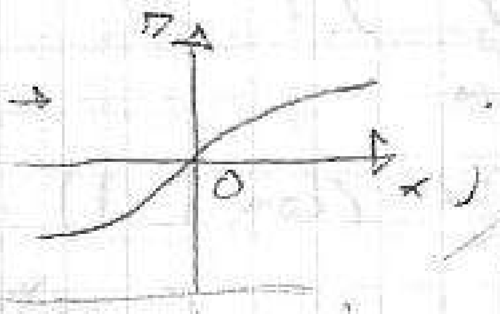
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \underline{\text{sett} \sinh x} + c$; $\int \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \underline{\text{sett} \cosh x} + c$; $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \underline{\text{sett tgh} x} + c$ 8

[GENERALIZZAZIONI]

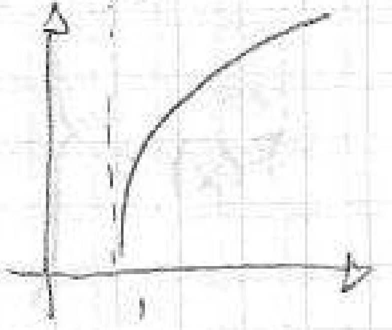
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c \; ; \; \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \; , \; \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

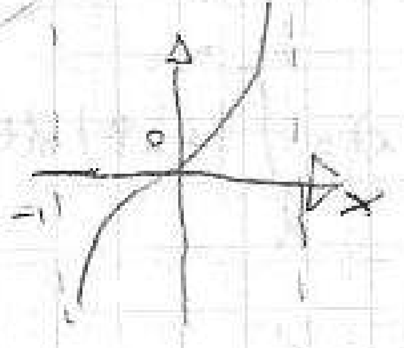
8 [inverse paraboliche: $\text{sett} \sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ →



$\text{sett} \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ ↪



; $\text{sett tg} h x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ →



]

- POLINOMI!

Se $p^2 - 4q > 0$ e α e β sono sol $\mathbb{R}$: $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \left[(A\beta + B) \log|x-\beta| - (A\alpha + B) \log|x-\alpha| \right] + c$

Se $p^2 - 4q = 0$ e α è sol. $\mathbb{R}$ $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = A \log|x-\alpha| - \frac{A\alpha + B}{x-\alpha} + c$

Se $p^2 - 4q < 0$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \log(x^2+px+q) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{atan}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + c$$

CALCOLO 1 - CENNI EQ. DIFFERENZIALI

- EQ. DIFF. DIRETTE

  ex: $y' = \frac{1}{x} \rightarrow y(x) = \log|x| + c$

- EQ. DIFF. IND. / VARIABILI SEPARABILI

  $y' = (1+y^2)x \rightarrow \frac{y}{1+y^2} = x \quad \int \frac{dy}{1+y^2} = \int x\,dx$ - $\text{atan}\, y = \frac{x^2}{2} + c \rightarrow y = tg\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$

- EQ. DIFF. LIN. 1° ORDINE

  L OMOGENEA: $y' + a(x)y = 0 \rightarrow$ SOL: $y = c \cdot e^{-\int a(x)\,dx}$

  L NON OMOGENEE: $y' + a(x)y = B(x)$. Det. $I(x) = e^{\int a(x)\,dx} \rightarrow y(x) = \frac{1}{I(x)}\left\{\int B(x)\, I(x)\, dx + c\right\}$

CALCOLO 1 - APPUNTI E NOTE

$|A+B| \leq |A| + |B|$ (disuguaglianza triangolare)

$|A \cdot B| = |A| \, |B|$

(Disequazioni irrazionali)

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \rightarrow \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \rightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases}$$

Formule trigonometriche: [VEDI P. 275 LIBRO]

- ADDIZIONE: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ $[x = y]$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$; $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$; $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

- BISEZIONE: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

- PROSTAFERESI: $\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$, $\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$, $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Proprietà logaritmo: $\log_a a^n = n = n \log_a a$, $\log_a A^n = n \log_a A$

$\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$; $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$; $\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ $[a>0]$; $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Formule funzioni iperboliche

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$; $\cosh x = \sqrt{1 - \sinh^2 x}$, $\sinh x = \pm\sqrt{\cosh^2 x - 1}$, ($+$ per $x \geq 0$, $-$ per $x < 0$)

$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$, $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$ o $1 - 2\sinh^2 x$

Successione aritmetica: $a_{n+1} = a_n + q$, Successione geometrica: $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$