

1. STIMA RAGGIO TERRESTRE
2. VETTORI
3. SOMMA / PRODOTTO SCALARE / APPLICAZIONI P.S.
5. COORDINATE SFERICHE
6. PRODOTTO VETTORIALE
7. RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA P.V.
8. DERIVATA VERSORE / FORMULA DI POISSON
9. MOTO RETTILINEO UNIFORME
11. MOTO CIRCOLARE UNIFORME
13. MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO
14. APPLICAZIONI MOTO CIRCOLARE
17. MOTO P.TO NEL PIANO / MOTO PARABOLICO
19. CERCHIO OSCILLATORE
  
21. GITTATA / DINAMICA P.TO MATERIALE
22. 2° PRINCIPIO DINAMICA / PRINCIPIO SOVRAPPOSIZIONE / FORZA RELATIVAZIONALE
24. MOTO ESPONENZIALE
27. PIANO INCLINATO
28. 3° PRINCIPIO DINAMICA
29. TENSIONE / TRACCHINA DI ATWOOD
30. MOTO DEL PENDOLO SEMPLICE

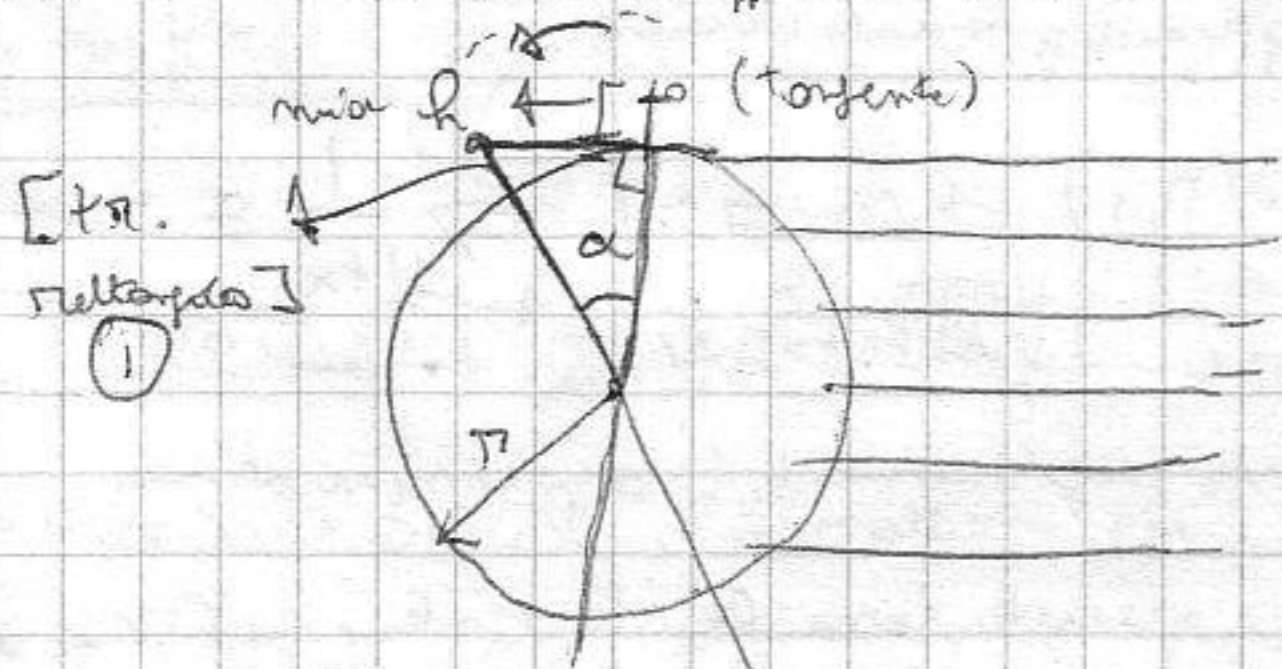
Prof: Riccardo Borghi - Stanza 95 - Dip. elettronica applicata - Via della Vigna Nuova 84; email: borghi@uniroma3.it.

Esaurire fine 1° periodo. ESAME: scritto e orale; test a rimp. multiple ed esercizi classici [problemi]

Richiamo: (Variabile - già conosciute); LIBRO:

15-12-2004

Ex: det. r. Terra empiricamente - t di scomparsa Corona rossa



Da notare che altri e aspetta di -  
-stante la Terra - non vede il  
sullo [rob. d fino a quando  
si ricompare sulle orizzonte]  
Abbiamo così un MODELLO

Sopprimiamo il [t] per rimporre di d, la nostra altezza h

possiamo determinare  $\lambda$ :  $\omega T [24h] = 24 \cdot 60 \cdot 60 \approx 9 \cdot 10^4$

Applichiamo una proporzione. [Unità di misura angoli: RADIANI; misura

circ. cerchio:  $2\pi R$ ; in d costante e il rapporto tra  $\frac{l}{R}$  e  $R$ ,

$$\alpha_{RAD} = \frac{l}{R}$$

(angolo giro =  $2\pi$ ) - x i colui molti la collaborazione  
in RAD e non in DEG.]

$t : \alpha = T : 2\pi \Rightarrow \alpha = 2\pi \frac{t}{T}$ . Ora devo determinare

R. Sprutto la trigonometria +  $\odot$ :  $\Rightarrow \cos d = \frac{R + h}{R + h + l}$

Qui solo R è facile da determinare.

[in meccanica approssimiamo i numeri alla fine - una simbolo]

$$(R+h) \cos d = R \rightarrow R \cos d + h \cos d = R \rightarrow h \cos d = R(1 - \cos d)$$

$$R = h \frac{\cos d}{1 - \cos d}$$

formula finale. Il problema è la frontiera dei valori.

Ex:  $\cos d \approx 1 \Rightarrow 1 - \approx 0$ , det. molto

la ultimo di R e approssimazione.

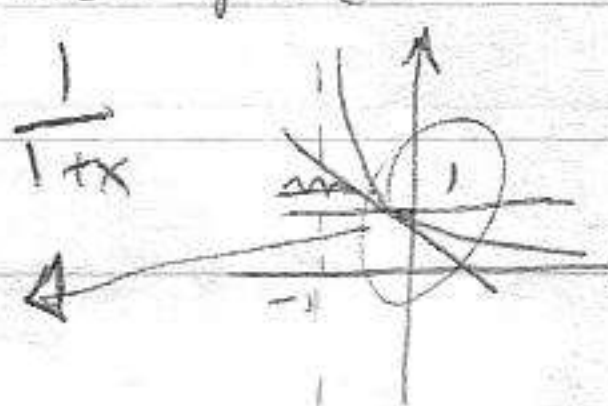
Rivoluzione in maniera di Kern:

(alta corda =  $\frac{R}{R+h}$ )  $\frac{1}{1 + \frac{h}{R}} = \cos d$  (coliviso per R)

grandesse di det. il problema. Sono numeri molto piccoli.

L'ordine di grandezza è di  $10^{-6}$ . Per risolvere l'eq. si può anche fare:

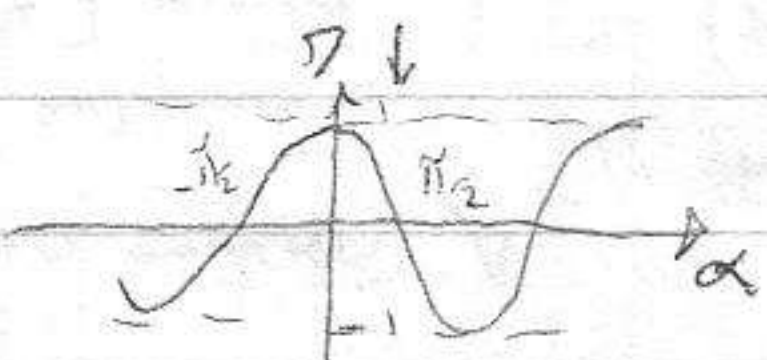
Posso moltiplicare  $\left(\frac{1}{1+h/R}\right)$  quando è vicino a 0] + Ex: Studia  $\frac{1}{1+x}$



ma non è così  $\frac{1}{1+x} \approx 1$  quando  $x$  molto vicino a 0. Posso approssimare la curva in  $I(0)$

Miglior approssimabile con la retta tangente in  $(0, 1)$   $\rightarrow m = -1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} \approx -x + 1$   
 UTILE x APPROSSIMAZIONE in  $I(0)$

Vediamo il coseno:



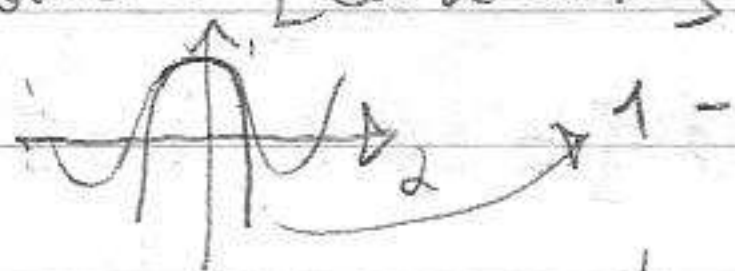
Stesso ragionamento: approssimazione

coseno x valore  $\rightarrow 1$

In questo caso la tangente è proprio

$\cos d \approx 1$ , quindi non cambia  $[\cos d \approx 1]$  Ma non va bene. Posso provare con una

PROVA:



$1 - \frac{d^2}{2} \Rightarrow |d| \ll 1$  allora  $\cos d \approx 1 - \frac{d^2}{2}$   
 UTILE

PROVA:

Gia i valori di  $d$  e  $\frac{h}{R}$  sono abbastanza piccoli da far usare le approssimazioni  $\Rightarrow$

$\frac{1}{1 + \frac{h}{R}} = \frac{1}{1 + \frac{d^2}{2}} =$  (approssimo ordine di grandezza)  $= \frac{1}{2} \left( 2\pi \cdot \frac{t}{T} \right)^2 =$

$\frac{1}{2} (2\pi)^2 \left( \frac{t}{T} \right)^2$  (non molti numeri)  $\rightarrow = 2\pi^2 \left( \frac{t}{T} \right)^2$  (c'è da mettere insieme  $\alpha$ : importante) le frontiere angolari  $= t/T$

$R = \frac{h}{2\pi^2 \left( \frac{t}{T} \right)^2}$  + (coliviso da primo x che approssimato)

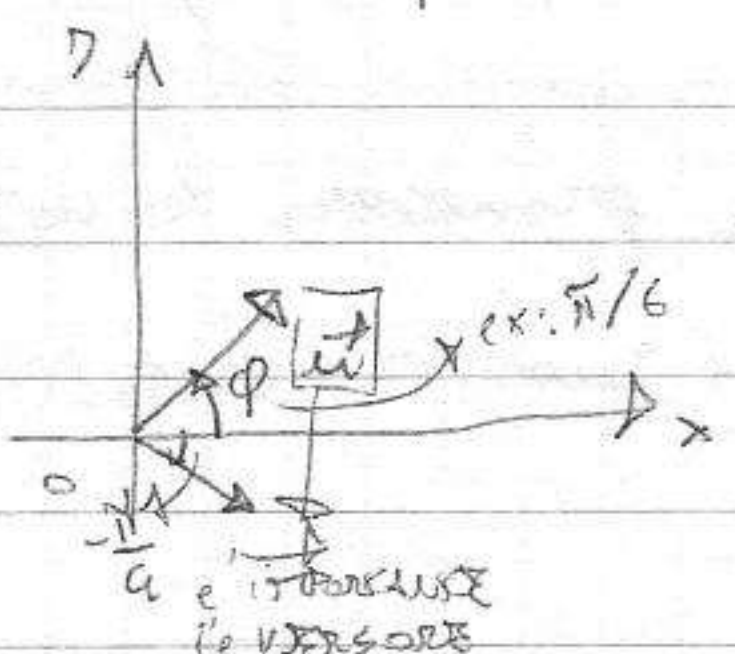
Ora molti i numeri. (ora focus relativa)  
 $t \approx 10 \mu$ ,  $h \approx 1,80 \text{ mt}$

$\frac{t}{T} = \frac{10}{3 \cdot 10^4} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3}$   $\rightarrow \frac{t}{T^2} = \frac{1}{81} \cdot 10^{-6} \Rightarrow R = \frac{1,8 \cdot 10^{-1}}{\frac{1}{81} \cdot 10^{-6}} \cdot 10^6 \text{ mt} \approx$

$\frac{729}{100} \cdot 10^6 \text{ m} \approx 7000 \text{ km}$  (ordine di grandezza giusto) (stima senza calcolatrice)

H

VETORI (nel piano) - Ex: mint. sup. cartesiano.



Problema è DIREZIONALE. Si fissa uno scil. di riferimento, lo dir. del vettore è in relazione a  $\varphi$  [verso orient. angoli

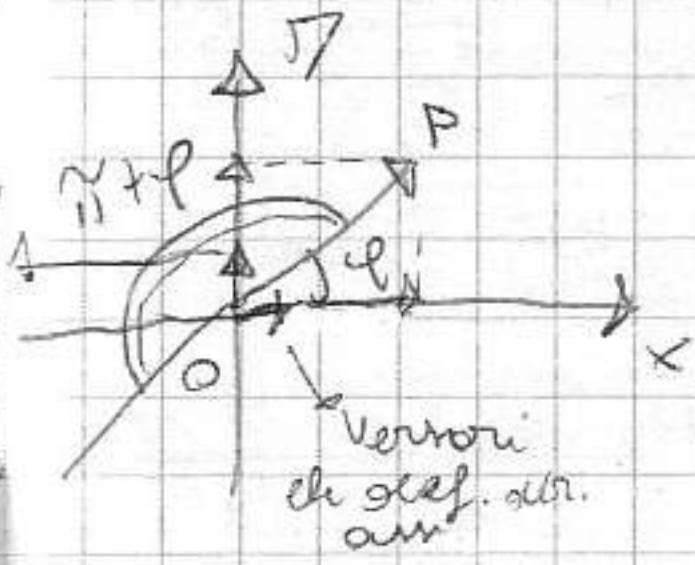
reputabile vicin.]  $-\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

$|\vec{u}| (o u)$

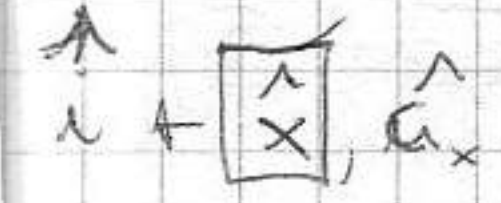
(importante è la TRIANGOLARE)

②

Per i vettori servono 2 numeri: **MODULO** e **VALORE ANGOLARE ORIENTATO** (o s. kromike)



Componenti cartesiane. Mai vogliamo OPERARE con vettori, use!



somma, sottrazione, prodotto con scalare, prodotto scalare e vettoriale

$$\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}$$

(nello spazio)

$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{x}$	$\hat{y}$	$\hat{z}$
$C_x$	$C_y$	$C_z$

Simboli UTILIZZATI

Matrice x colonne - DIFFERENZA rispetto natura vettoriale e scalare

Somma:

Se  $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$ ;  $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}$

$$(\vec{a} + \vec{b}) = (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

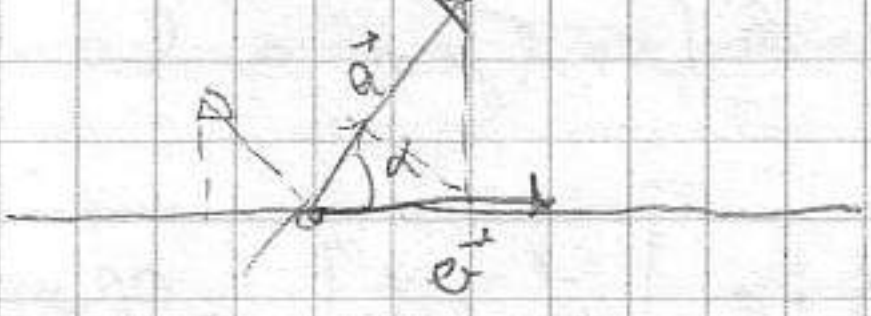
Prodotto delle norme NON E' la somma dei moduli

Prodotto scalare: operazione fra 2 vettori. Risultato e'  $\mathbb{R}$  (scalare)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cos \alpha$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

(Per  $\alpha > 90^\circ$  o  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ; viceversa,  $\alpha$  e' l'angolo opposto)

Geometricamente il P.S. e' il prodotto di b per la proiezione di a sull'asse



$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

(molto comodo la notazione vettoriale)

16/12/2004  
[APPLICAZIONI DEL PRODOTTO SCALARE]

Il P.S. ha un "valore" a seconda del tipo di vettore. Si fissa un sistema

si assegnano le componenti:  $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ ;  $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$

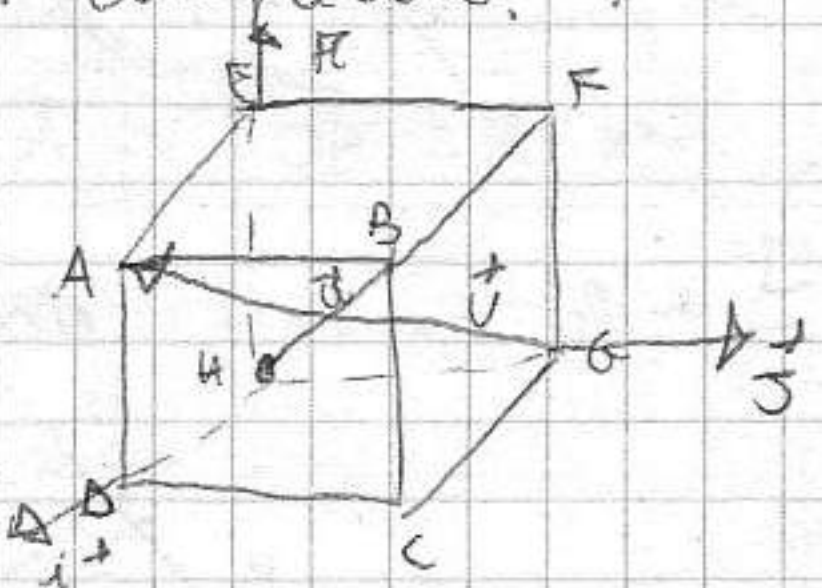
Equazioni in fisica non dip. dal sist. ref., ma, vettori si. [accortezza con i vettori]

Quindi imponiamo le condizioni:  $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$ ;  $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$ ;  $\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$ ;  $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$

ed esprimiamo il P.S. in termini delle componenti cartesiane  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ . (=  $a |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$ ).

Come determinare  $\alpha$  tra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Nello spazio e' albr. complicato. Ma

possiamo fare:  $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ . Ex: in cubo:



Vogliamo  $\alpha$  tra le diagonali opposte [AG e BH]

Per prima cosa imponiamo un sistema di ref.

Cartesiano [origine in H e vettori degli assi].

Coordinata di  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . (ammesso il lato  $\Rightarrow 1$ )

$$\vec{u} = B\vec{H} ; B \equiv (0,0,0); P \equiv (1,1,1) \Rightarrow \vec{u} = 1 \cdot \hat{i} + 1 \cdot \hat{j} + 1 \cdot \hat{k}$$

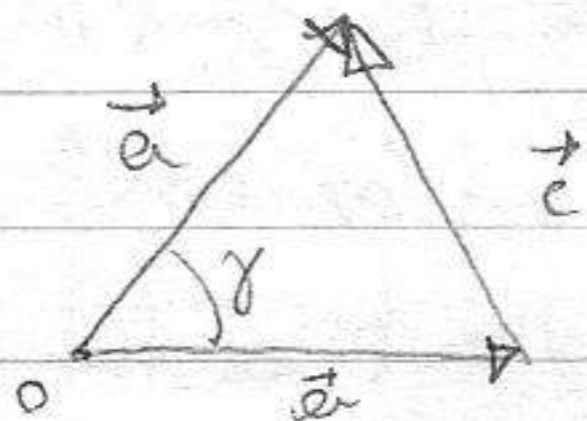
$$\vec{v} = A\vec{G} ; A \equiv (0,1,0); P \equiv (1,0,1) \Rightarrow \vec{v} = 1 \cdot \hat{i} - 1 \cdot \hat{j} + 1 \cdot \hat{k}$$

(diagonali q.)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 - 1 + 1 = 1 ; |\vec{u}| = |\vec{v}| = \sqrt{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

Usando la def. del P.S. facilmente si è risolto il problema.

Ex: Banoli. Le TH. DI LAGRANGE afferma che  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  in un triangolo:



Dimostrazione usando il linguaggio vett.

Prendiamo due vettori ( $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ ) portandoli da

$$O, \text{ ottengo } \vec{c} = \vec{b} + \vec{c} \quad [\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}]$$

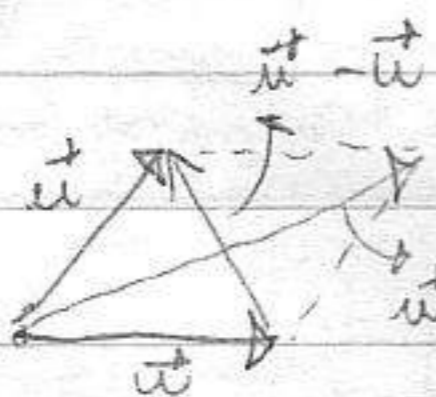
(con th  $a = |\vec{a}| ; b = |\vec{b}| ; c = |\vec{c}|$ )

La relazione  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$  è il TH. Infatti  $c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) =$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Linguaggio vettoriale è utile in molte applicazioni geometriche [da geom a mat.]

Ex: Dati:



Se vale  $|\vec{u} - \vec{w}| = |\vec{u} + \vec{w}|$  allora

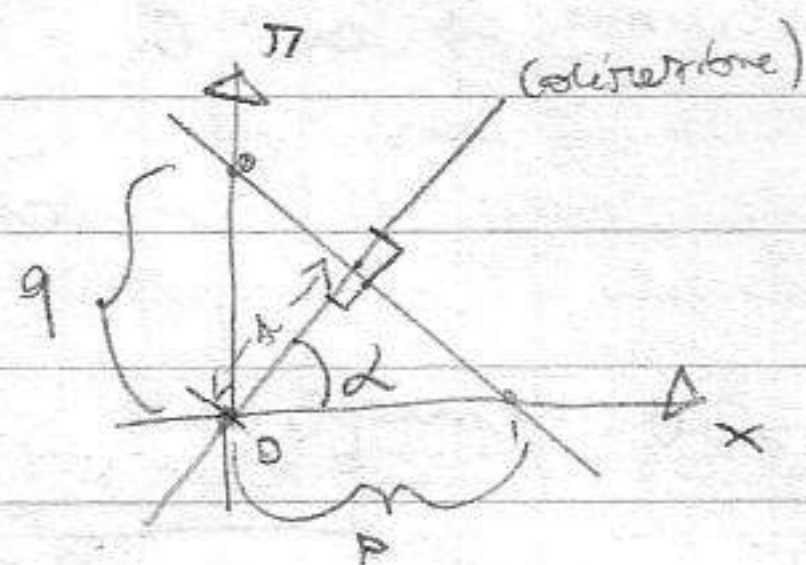
due vettori sono ortogonali  $\vec{u} \perp \vec{w}$

Le diagonali sono = se il poligono è un quadrato  $\Rightarrow$  i lati sono a  $90^\circ$ .

Quindi  $(\vec{u} - \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{w})$  [da  $|\vec{u} - \vec{w}|^2 = |\vec{u} + \vec{w}|^2$ ]. Con

le propr. distributive:  $u^2 + w^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{w} = u^2 + w^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{w} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

Ex: Voglio l'eq. di una retta  $\perp$  ad una direzione fissata e passi a ol' sua O.



Possiamo fissare un sistema  $O(x, y)$ ; individuare le int. con gli assi, minimo incremento:  $\left[ \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \right]$

$$P = ol / \cos \alpha ; Q = ol / \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\frac{x \cos \alpha}{ol} + \frac{y \sin \alpha}{ol} = 1 \Rightarrow \boxed{x \cos \alpha + y \sin \alpha = ol}$$

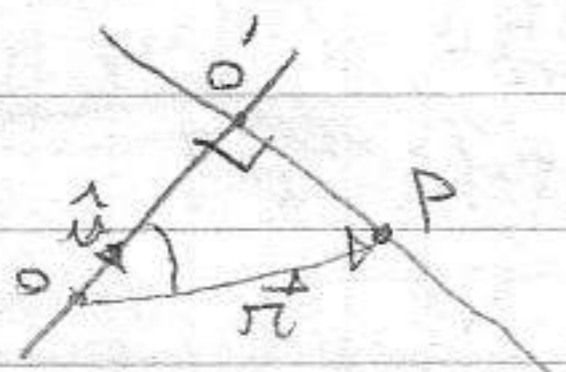
ol è come è orientata la retta

È anche modo + "compatto" che una i vettori. Rappresentiamo la direzione con

un vettore. Posizione del punto P nella retta

è il vettore  $(\vec{r})$  riferito solo ai  $x, y$ .  $O'$  è

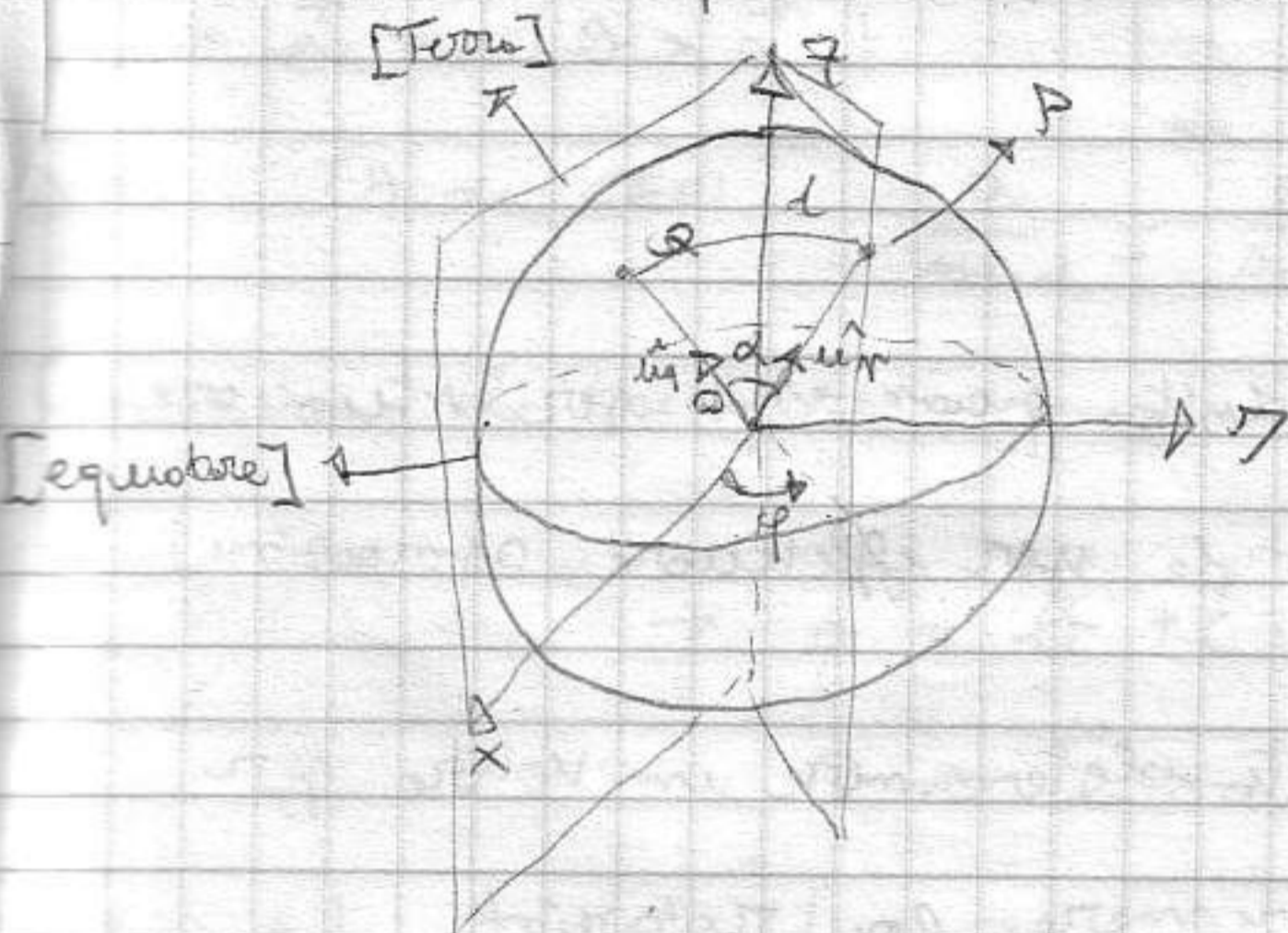
proiezione di P nella direzione.



$\vec{r} \cdot \hat{n} = d$  → EQUAZIONE DELLA RETTA (ci sono tutte le info - direzione e distanza) [Fissate poi un  $O(x, y)$ , →  $\vec{r} = (x\hat{i} + y\hat{j})$  e  $\hat{n} = \cos\alpha\hat{i} + \sin\alpha\hat{j}$  e fai il prodotto scalare].

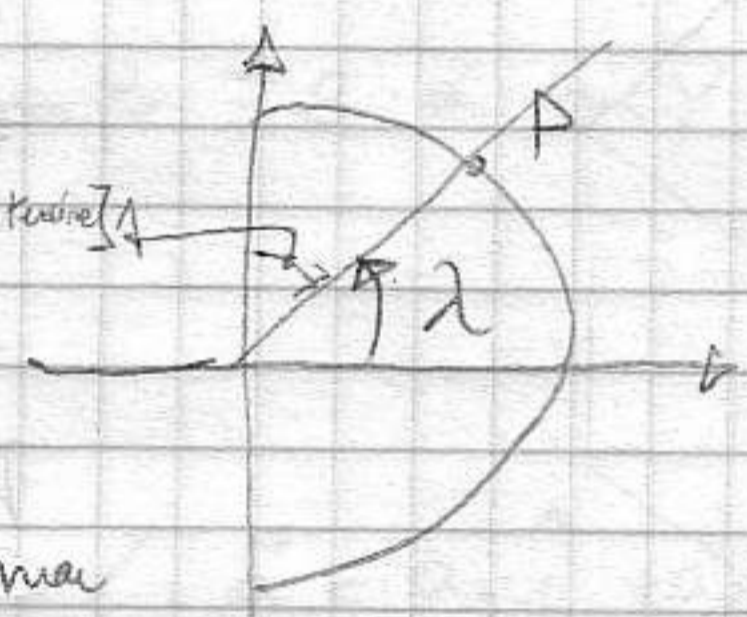
In fisica si devono esprimere leggi in formule matematiche → misura del linguaggio vettoriale che non dipende dal sistema di riferimento

Es: si tra 2 punti qualsiasi su una superficie sferica [es: si tra città]  
 Coordinate di 1 punto sulla map. sono 2 [es: LONG e LAT]



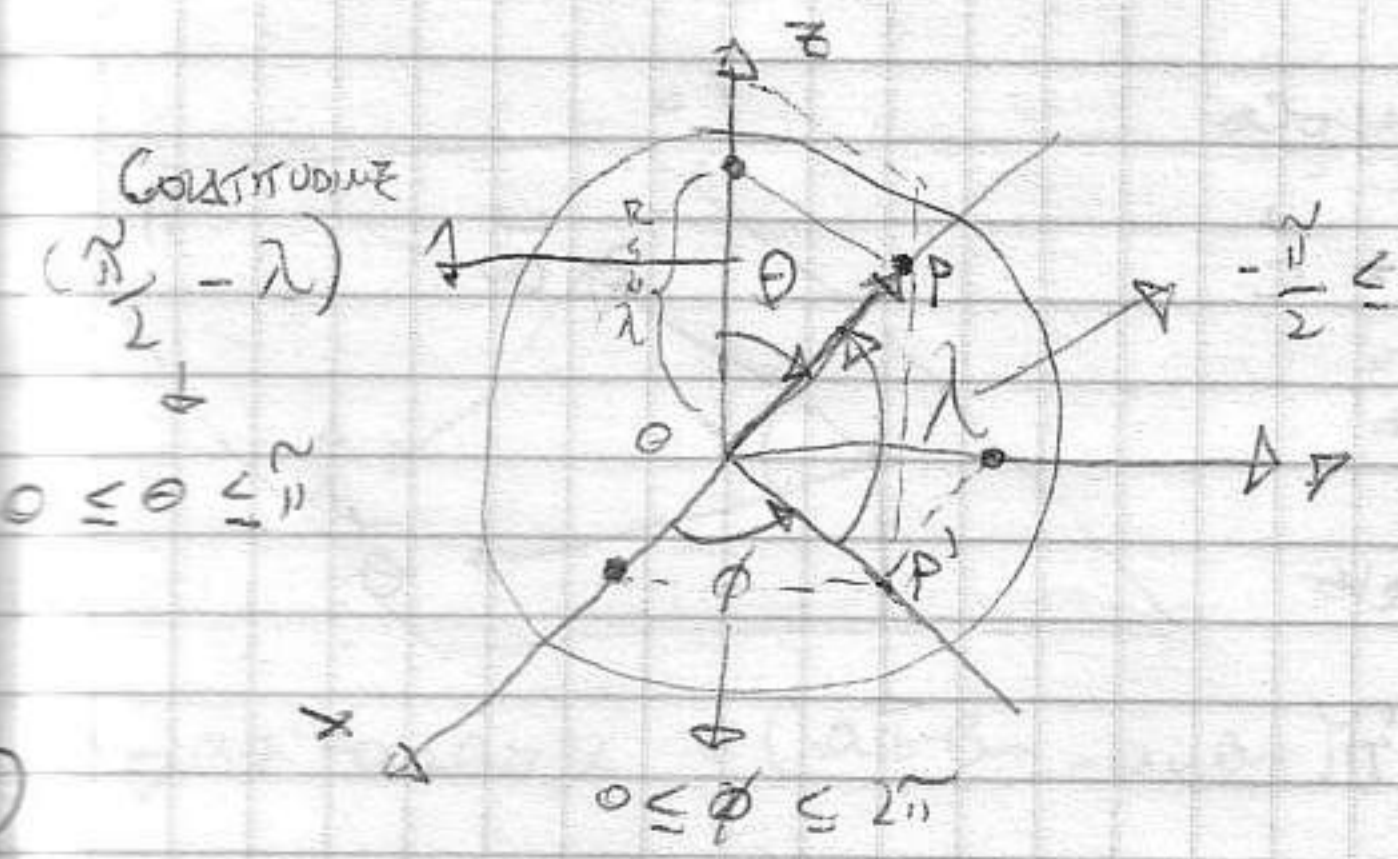
$P(x, y)$  → si fissa meridiano ref. (es. Greenwich). Supponi che sia  $xz$  (piano) mer. di Greenwich e ruotolo fino a contenere P, poi vedi angolo  $\phi$  cioè la LONGITUDINE (est o ovest-vera)  
 Ho individuato il piano per Z e per P

Ora faccio una rotazione per calcolare la LATITUDINE ( $\lambda$ ). Ho trovato  $\phi$  e  $\lambda$  che univocamente la pos. di P. Fissate in P e Q, trovare una



di: Come fare) → se mi muovo su un'arcata di raggio  $R$ ,  $d$  è correlato all'angolo tra 2 vettori  $\hat{u}_p$  e  $\hat{u}_q$  ⇒  $d = R \cdot \alpha$  dove  $\cos \alpha = \hat{u}_p \cdot \hat{u}_q$  + Come calcolarlo) Non ho le coordinate cartesiane.

17/12/2004 - [COORDINATE SFERICHE]



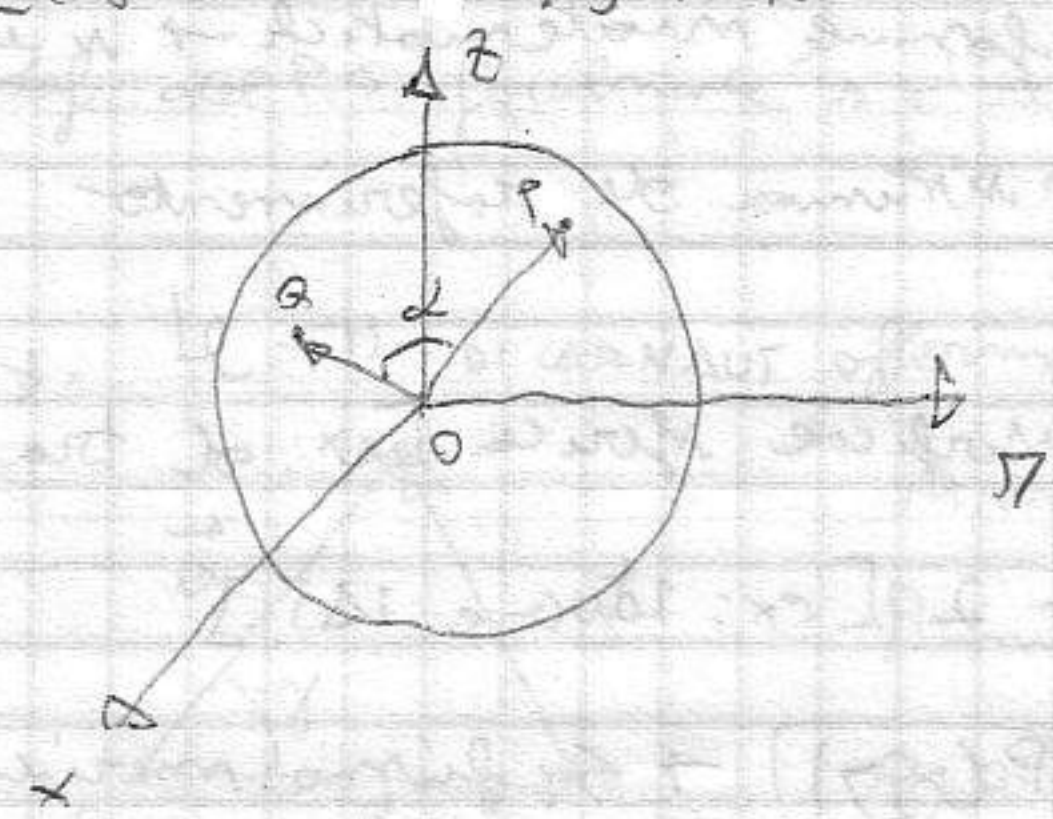
Coordinate in  $f(\phi, \lambda)$ :  

$$\begin{cases} z = R \cos \lambda \\ x = OP' \cos \phi \\ y = OP' \sin \phi \end{cases} ; [OP' = R \cos \lambda \Rightarrow]$$

Usando la  $\Theta \rightarrow$

$$\begin{cases} x = R \sin \Theta \cos \phi \\ y = R \sin \Theta \sin \phi \\ z = R \cos \Theta \end{cases}$$

Note le componenti cartesiane, queste sono le componenti di  $\vec{OP}$  lungo i tre assi.  $[\vec{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}]$



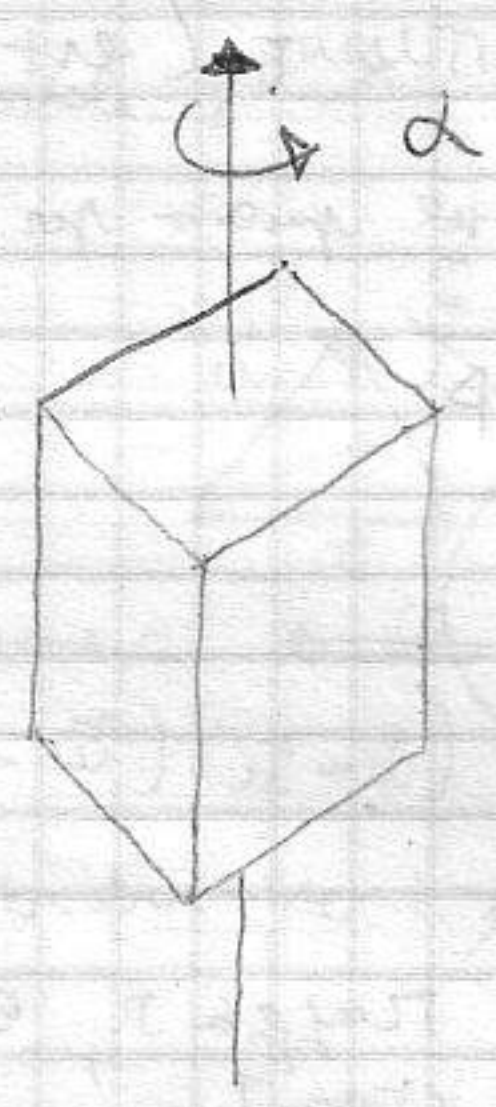
D(Pa):  $\cos \alpha = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{Oa}}{R^2}$

Nello spazio 3D non è immediato l'angolo tra 2 vettori.

### H

PRODOTTO VETTORIALE: strumento introdotto quasi escl. per risolvere i problemi connessi alle rotazioni. (utile per effettuare operazioni)

Rotazione ex  
 o  $(\frac{\pi}{6} = \alpha)$ .  
 Come  
 supponibile



Devo determinare un vettore per esprimere la rotazione.

Problema: angolo di rotazione; direzione; verso; stabilità.  
 la rotazione non è COMMUTATIVA  $\rightarrow$  non va bene algebra di vettori, ma si usa un'algebra di LIE.

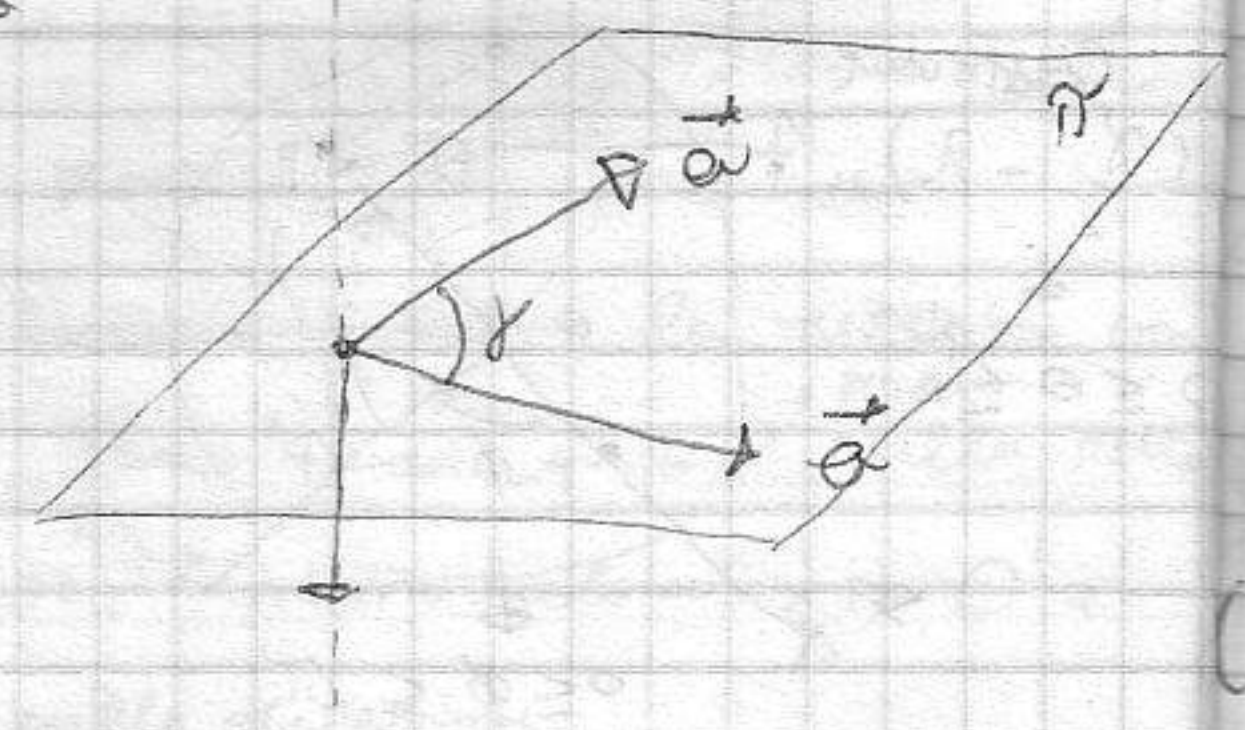
C'è un'eccezione: se le rotazioni sono INFINITESIME si può usare alg. di vettori  $\rightarrow$  ex VELOCITÀ ANGOLARI sono dei vettori (mentre rotazioni no).

Def:  $\Pi$ : piano dei vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ ;  $\gamma$ : angolo tra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Si definisce  $\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{c}$

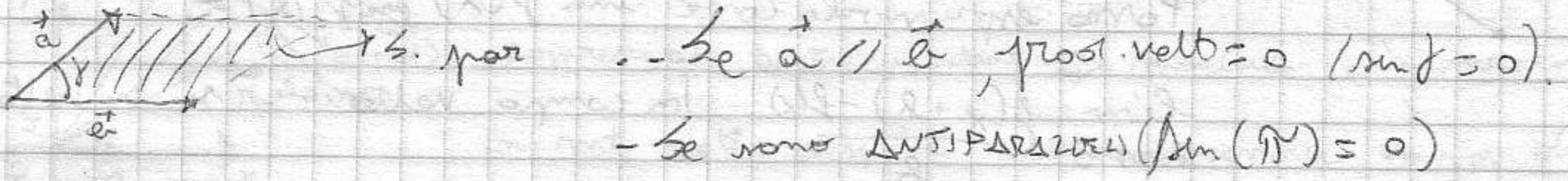
(P.S.:  $\cdot$ )  $\leftarrow$  libri moderni  $\otimes$  vecchi datati

un vettore di direzione  $\perp$  a  $\Pi$ ; Verso: dato

⊗ for rotatore  $\vec{a}$  su  $\vec{b}$  di un angolo  $\angle \Pi$ .



È quello che vede motore e  $\vec{a}$  su un angolo  $\theta$  piccolo di  $\hat{n}$  (muro anteriore)  $\rightarrow$  REVOA DELLA RUOTA DESTRA; il modulo deriva dal parallelogramma costruito dai vettori:  $|\vec{c}| = s. par = |\vec{a}| |\vec{a}'| \sin \theta$



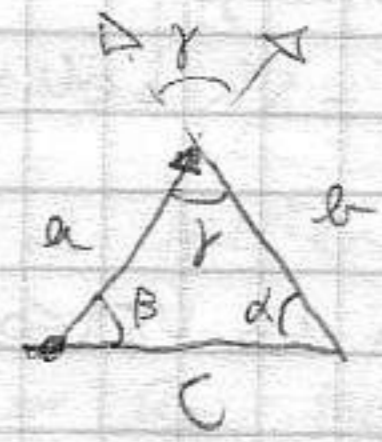
Valore  $\sin \theta$  (s. par)  $\rightarrow \theta = \hat{n} \cdot \vec{a}$

PROPRIETA' ANTI-COMMUTATIVA: importante ordine del prodotto

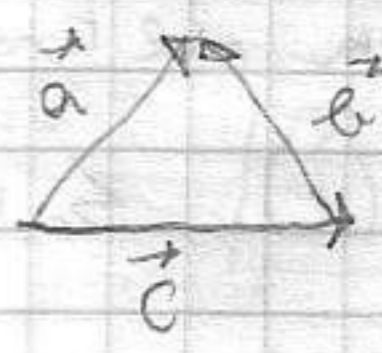
$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Dim: TH. dei SENI.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



Concepriamo il triangolo come un sist. di 3 vettori complementari:



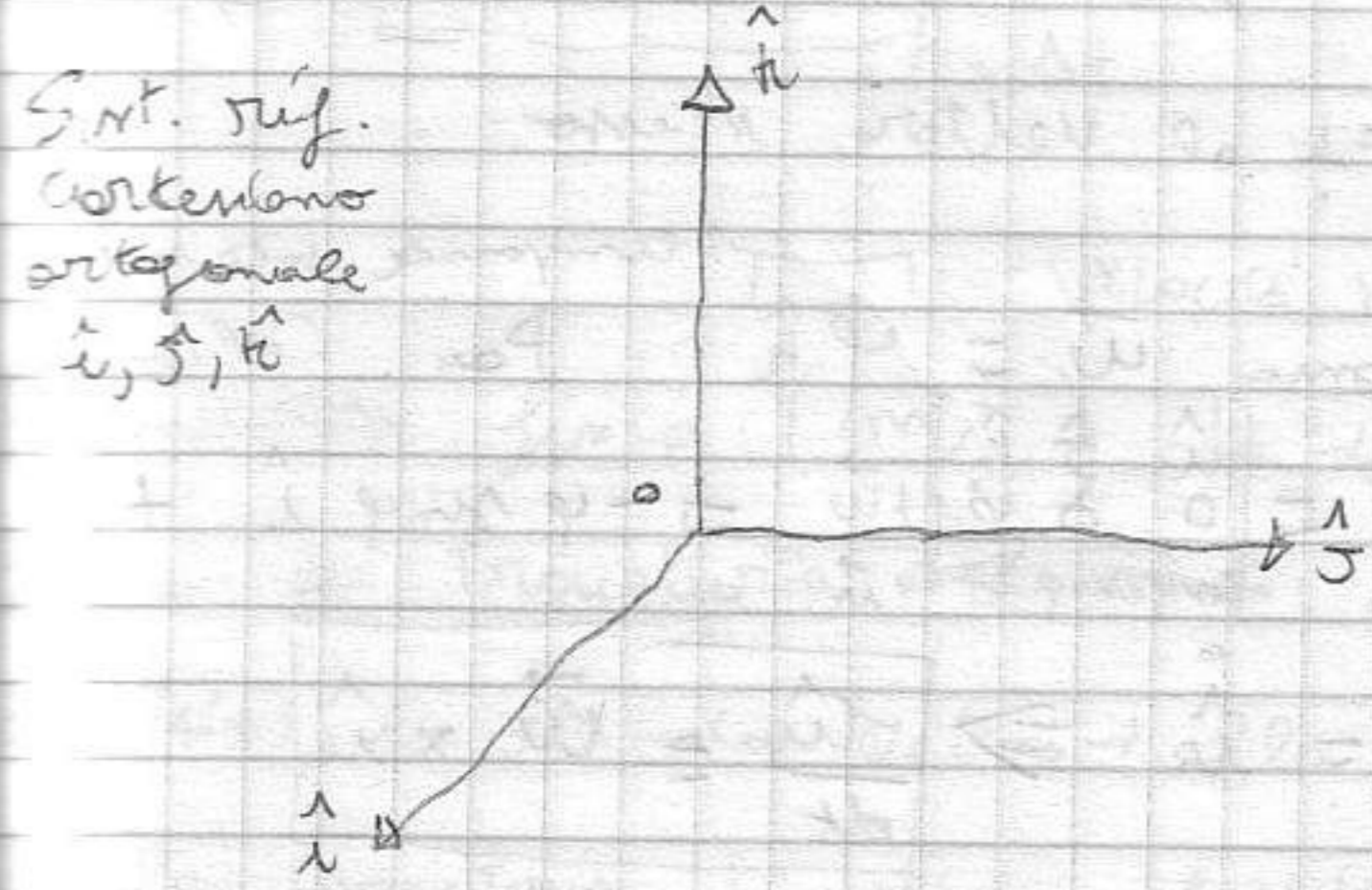
$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \quad \text{Per } \vec{a} \times \vec{a} = (\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} \rightarrow 0 = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a} \quad \text{quindi } \boxed{\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{a}} \Rightarrow$$

$$|\vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{b} \times \vec{a}| \rightarrow a \cdot c \cdot \sin \beta = b \cdot a \cdot \sin \gamma \Rightarrow \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta}$$

(stesso procedimento per  $a/\sin \gamma$ )

RAPP. CARTESIANO P.V.

Prendiamo un  $O(x, y, z)$  e due vettori  $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ ;  $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$  e il loro P.V.  $\vec{c} = c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k}$ .



Stabiliamo le P.V. tra i vettori:

$$\begin{aligned} - \hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} &= 0 \\ - \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} ; \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} ; \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \end{aligned}$$

$\downarrow$  Sist. kurzon.

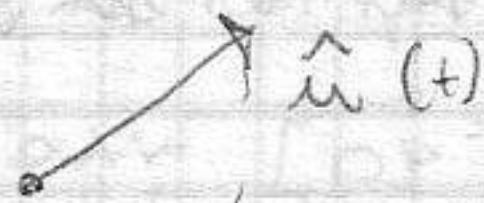
$$\begin{aligned} (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) &= a_x b_y \hat{k} - a_x b_z \hat{j} - a_y b_x \hat{k} \\ &+ a_y b_z \hat{i} + a_z b_x \hat{j} - a_z b_y \hat{i} = \end{aligned}$$

$$(a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k} \quad \text{Per } \textcircled{7}$$



ottenere la formula vale anche  $\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$  sviluppato secondo la 1. riga.

Immagina che  $\hat{u}$  ruoti nel tempo.



Posso esprimermelo come una  $f(x)$ , dove  $f'(a) =$

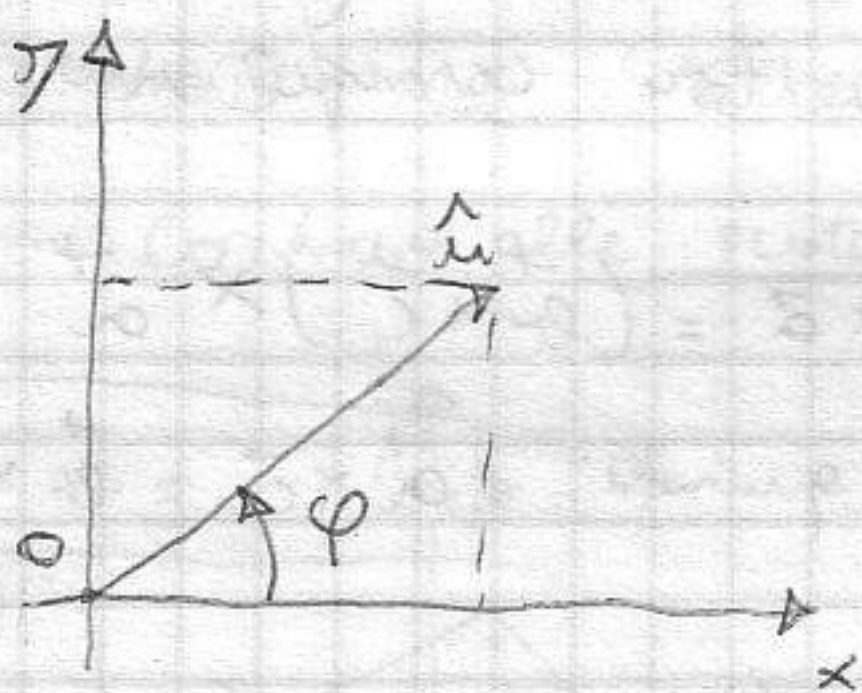
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

In campo vettoriale se un vettore

dipende da un parametro esterno, posso calcolarlo  $\hat{u}(t)$  e quindi

$$\frac{d\hat{u}}{dt} (= \dot{\hat{u}}(t)) \left[ \begin{array}{l} \text{In fisica le grandezze che dip. dal tempo si determinano} \\ \text{divertimenti: } \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = \dot{x} \end{array} \right]$$

DERIVATA di un VETTORE (importanza fond.)



$$\hat{u} = \hat{i} \cos \varphi + \hat{j} \sin \varphi \quad (\text{dipende solo da } \varphi)$$

Se  $\hat{u}$  varia nel tempo,  $\varphi$  varia nel tempo  $\Rightarrow$

$$\hat{u}(t) = \hat{i} \cos \varphi(t) + \hat{j} \sin \varphi(t) \quad \text{Se voglio}$$

$\hat{u}'(t)$  devo prendere le deriv. dei componenti

la derivata dovrà agire su  $\cos \varphi \Rightarrow$

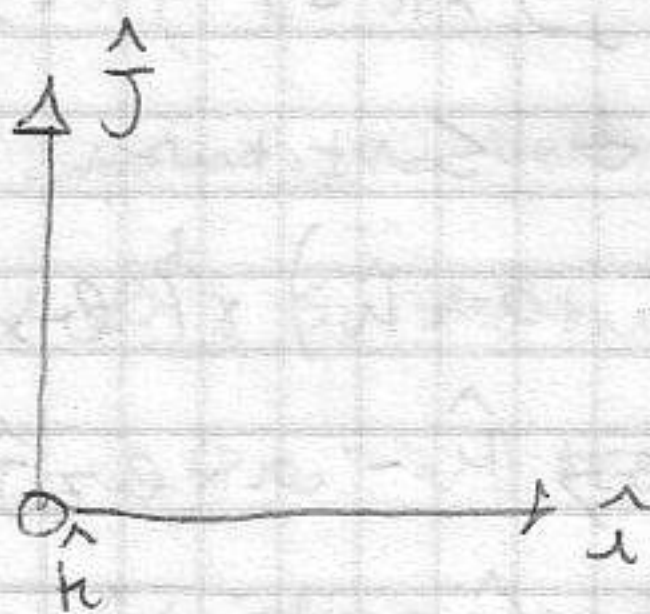
$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \underbrace{-\hat{i} \sin \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t)}_{\text{deriv. di } \varphi \text{ [f(x) composta]}} + \hat{j} \cos \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \quad \text{+ Deriv. del vettore riferito al sist. rif.}$$

In modo + compatto per trovare la derivata.

$$\dot{\hat{u}} = \dot{\varphi} (-\hat{i} \sin \varphi + \hat{j} \cos \varphi). \quad \text{ora facciamo } \boxed{\hat{i} \cdot \hat{u} = 0} \Rightarrow$$

la derivata del vettore è SEMPRE  $\perp$  al vettore stesso.

Non voglio  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ .



Definiamo  $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \hat{k}$ . Poi colloco

$$\vec{\omega} \times \hat{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} \vec{\omega} = -\dot{\varphi} \sin \varphi \hat{i} + \dot{\varphi} \cos \varphi \hat{j} = \dot{\varphi} (-\hat{i} \sin \varphi + \hat{j} \cos \varphi) = \dot{\varphi} \hat{u}'$$

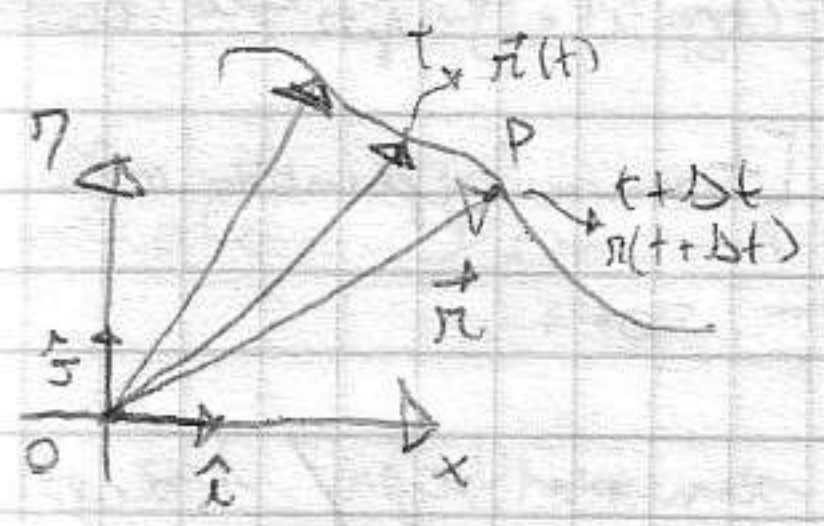
$$\hat{j} \dot{\varphi} \cos \varphi = \dot{\varphi} \hat{u}' \Rightarrow \boxed{\frac{d\hat{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{u}} \quad \text{+}$$

in campo indipendente dal sist. rif. +

⊗ È la FORMULA DI POISSON

Uniamo il punto materiale - Rapporti piccole tra grandezze (ex.  $\pi$  e  $s$  -  $x$  e  $S$ )

Per def. ora per un punto nello spazio definiamo un VETTORE:



Fino a  $\vec{r}$  è il VETTORE POSIZIONE  $\rightarrow$  dir / vers / mod.

Rappresentati dimensionalmente  $\Rightarrow$  modulo e' misurato

in mt. Vett. derivate matematicamente la per. di

un punto. Se P non si muove  $r = a$  e stesso

$t$ ; else  $r$  cambia nel tempo.  $\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(t)$  ( $f(x)$  vettoriale se una variabile scalare). Se posto di indicore  $r = f(t)$  si usa  $r = r(t)$  (o

$x = x(t)$ ) come notazione. In genere si definisce anche il sistema di

coordinate, con il generico  $\vec{r}$  lo si scrive usando la rappresentazione

ARTESIANA:  $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$ , dove  $x$  e  $y$  sono funzioni del tempo

$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$  (nel piano, nello spazio  $3 f(t)$ )

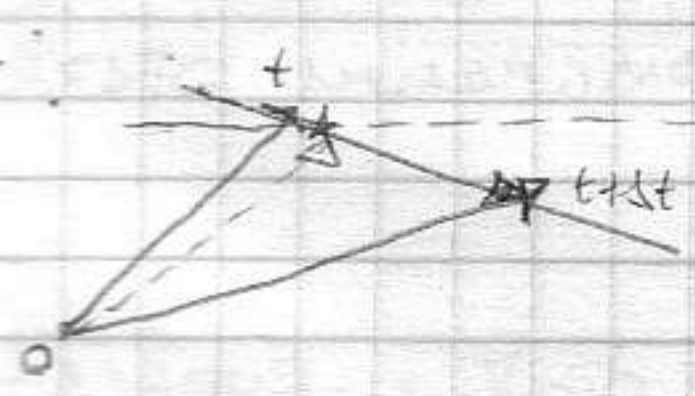
Per indicare il "cambiamento" dello  $f(x)$  si usa la DERIVATA PRIMA  $[r]' = dr/dx$

In cinematica cambia il vettore nel tempo. Si può def. la derivata

del vettore. Ripetere la pos. di un vettore in 2 istanti ( $t$  e  $t + \Delta t$ ), con

definire  $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ . Poi dividerlo per  $\Delta t$  e

ha:  $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ , facendo tendere  $\Delta t \rightarrow 0$



VELOCITA' MEDIA tra  $t$  e  $t + \Delta t$

ha un vettore di

direzione dir., vers e mod. Ilora il processo

e quindi  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

VELOCITA' ISTANTANEA

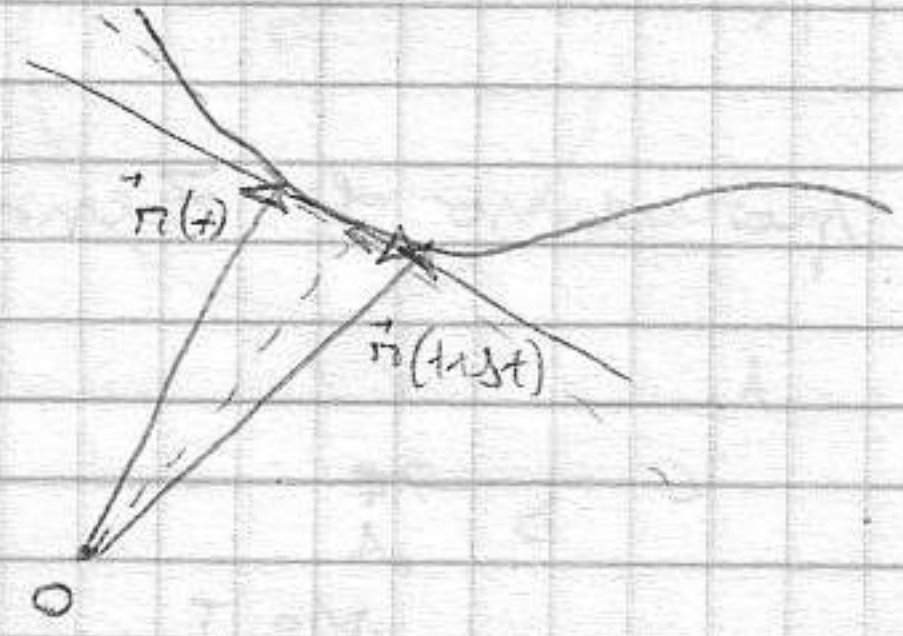
Grandezza fisica ( $m/s$ ). La dir. e verso del vettore indicano il

tipo di traiettoria nel moto: avvicinarsi

a  $\vec{r}(t)$  la dir. del vettore  $\vec{v}$  alla tangente

della traiettoria. La dir. del vettore  $\vec{v}$  e

TANGENTE punto x punto alla traiettoria.



la dir. della  $\vec{v}$  a dice e' ondamento della  $\vec{v}$ .

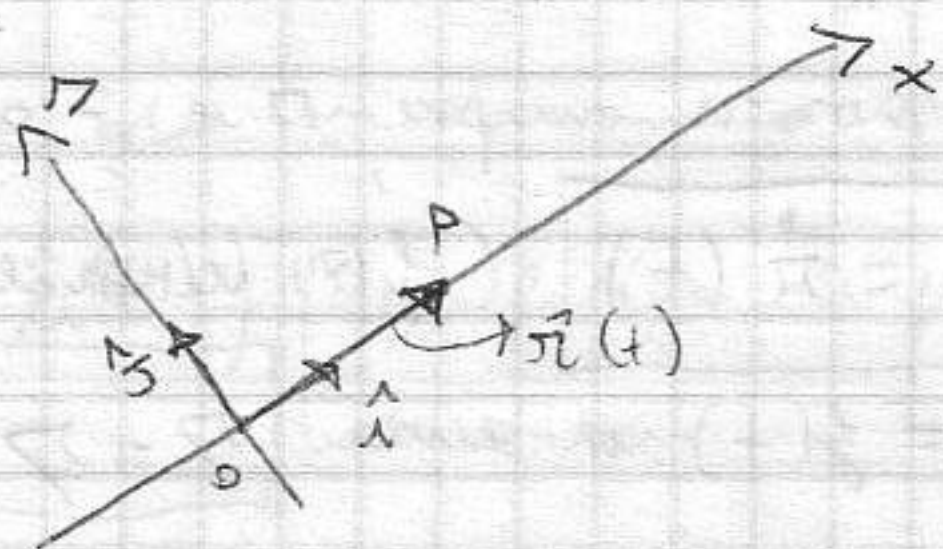
Per operare ci riferiamo sempre ad un. sist. Cartesiano. Quindi anche  $\vec{v}$  e' definito con:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[ \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} \right]$  (con  $\hat{i} = \hat{j}$  per ore costanti)

[in una onde  $\dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j}$ ]

[termini aggiuntivi nello sp.]

Classifichiamo i moti secondo la traiettoria.

- RETTA



Fissiamo un sist. rif / 1 degli assi che sterna dir. retta. la rappresentazione di  $\vec{r}(t)$  (vettore posizione), in C. Cartesiano non e'

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i}$ . Quindi anche la velocita' non e'  $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{i} = v_x\hat{i}$ .

(mantenuti gli aspetti vettoriali). Tipo + direzione di moto rettilineo:

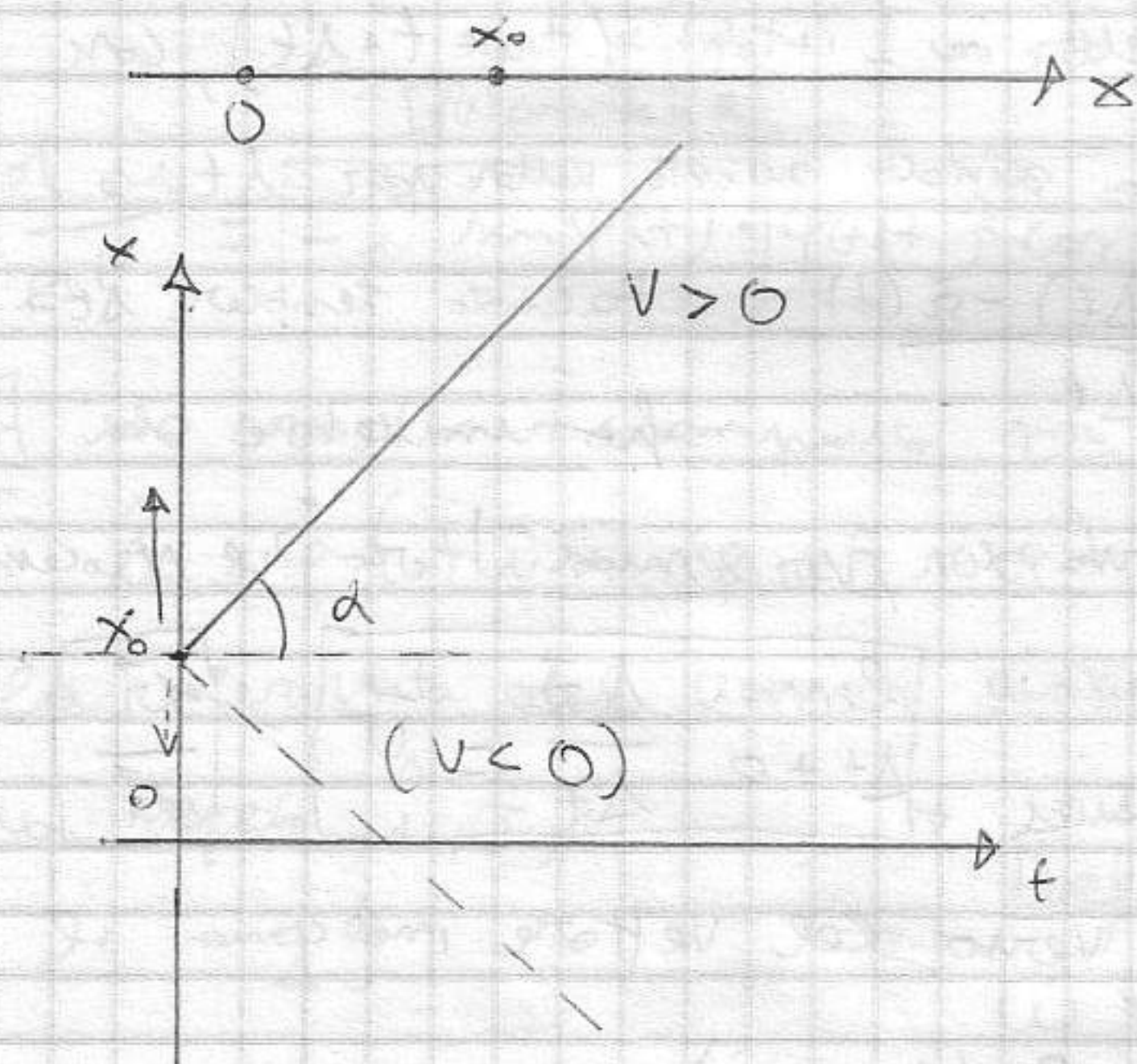
↳ UNIFORME:  $v = k$  nel tempo  $\rightarrow v(t) = \frac{dr}{dt} = \text{cost.}$  Traiettoria e'

$$\boxed{x(t) = vt + x_0} \rightarrow \frac{dx}{dt} = v \quad (v = k)$$

tale che costante e' k,

quindi e' f(x) rettilinea

$x_0$  valore di x all'istante  $t_0$ .



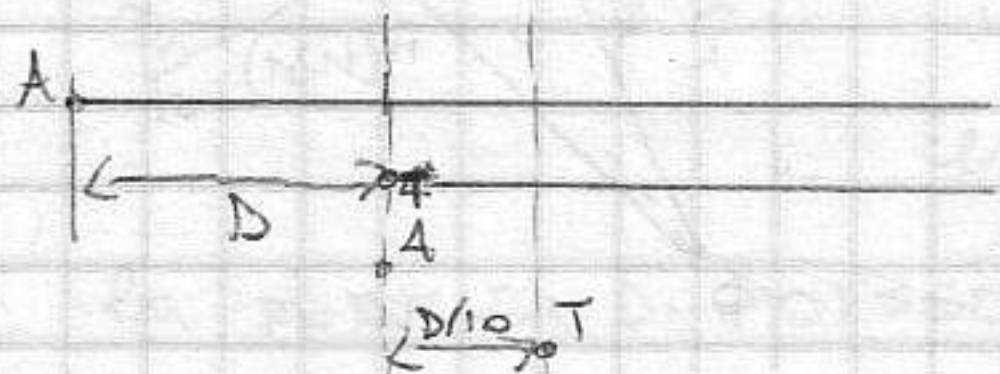
$\Delta t = 0$ , il p.to materiale e' in  $x_0$

Rappresentiamo la f(x). In ascissa

va x, ord. va t  $\rightarrow$  DISGARANNO ORARIO,

$\text{tg } \alpha = v$ .

Il paradosso di Zenone: [ $\Delta =$  Achille;  $T =$  Tartaruga]



$D = 100\text{m}$ . la si diminuisce ad ogni passo

ma quando Achille ha percorso  $D/10$ , la T.

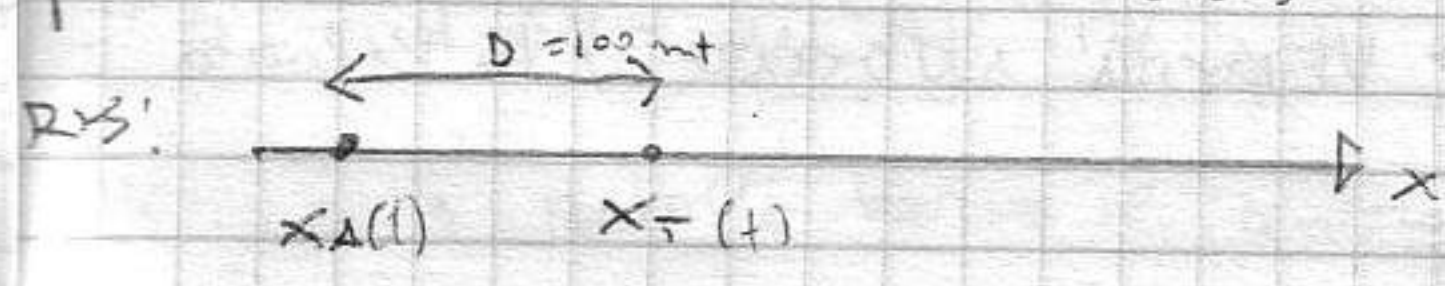
non e' in  $D/100$  e con via all' $\infty$

L'intervallo da coprire diminuisce, ma la T resta sempre attenti.

A volte per trovare  $D + \frac{D}{10} + \frac{D}{100} + \frac{D}{1000} \dots$  la somma è una serie geometrica:  $D \left[ 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} \dots + \frac{1}{10^m} \right]$ ,  $q = \frac{1}{10}$   $\left[ \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} \right]$  → PROCESSIONE GEOM. di ragione q

Si calcola  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$  → Distanza resta  $\boxed{\frac{10}{9} D}$  Sommando

però:  $\infty$  m'altiere un numero FINITO (rivoluzione analitica matematica)

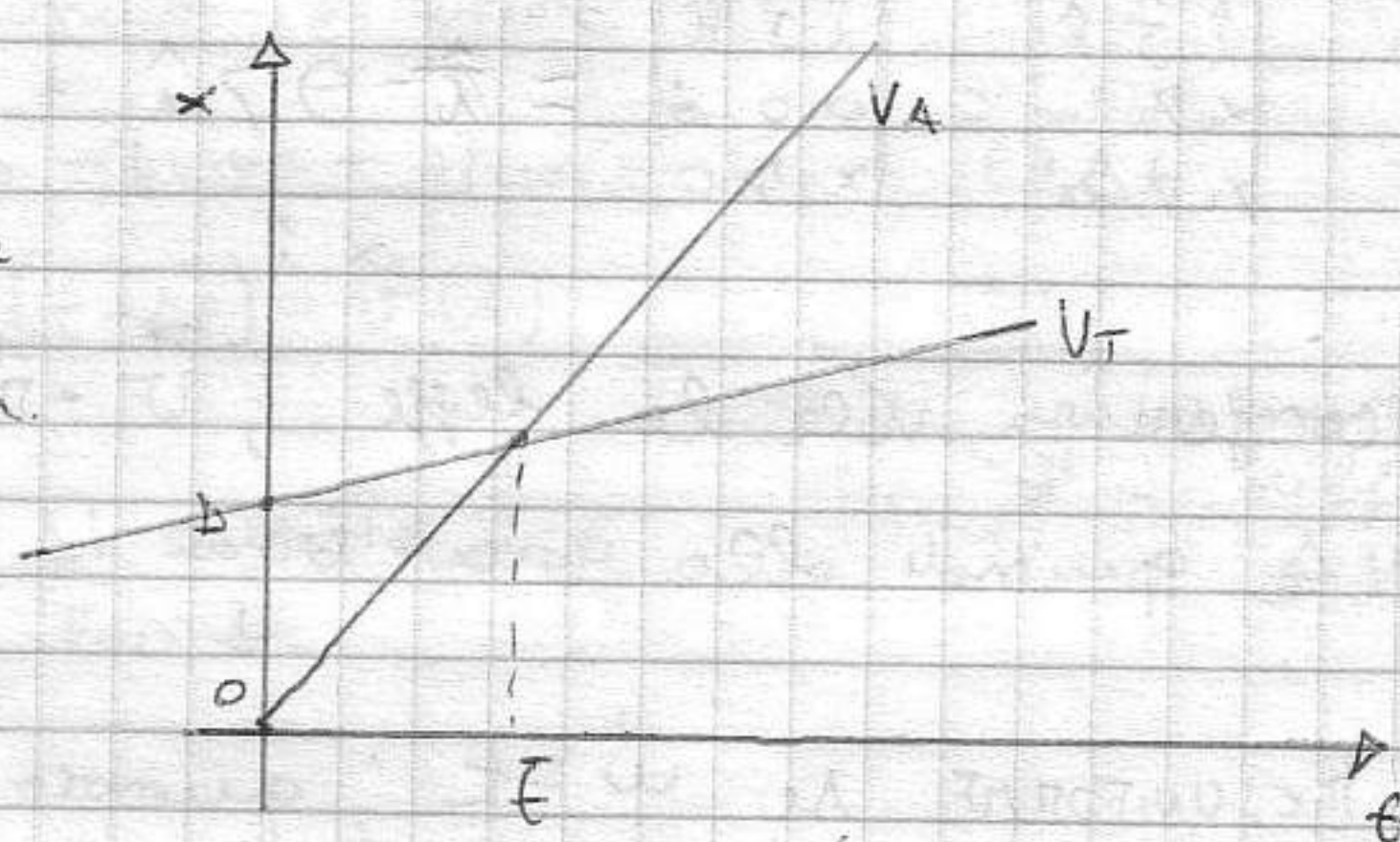


$$x_A(t) = v_A t + [0]$$

$$x_T(t) = v_T t + D$$

Facciamo  $0 = x_A - \frac{v_A}{v_T} = 10$

Dal grafico si nota che  $\exists$  l'istante in cui Achille raggiunge la tartaruga.



$$\text{Se } t = \bar{t}, \quad x_A(\bar{t}) = x_T(\bar{t})$$

$$v_A \bar{t} = v_T \bar{t} + D \rightarrow (v_A - v_T) \bar{t} = D$$

$$\bar{t} = \frac{D}{v_A - v_T}, \quad \text{Voglio la D, si calcola. } x_A(\bar{t}) = v_A \cdot \frac{D}{v_A - v_T} =$$

$$= \left( \frac{v_A}{v_T} \right) D = \frac{10}{9} D$$

Non serve valore velocità, basta il rapporto

(Vedi 11)

13-1-2005 - Moto circolare uniforme: moto di un punto in una circonferenza

in  $t = \pi$  percorriamo archi di circ. =

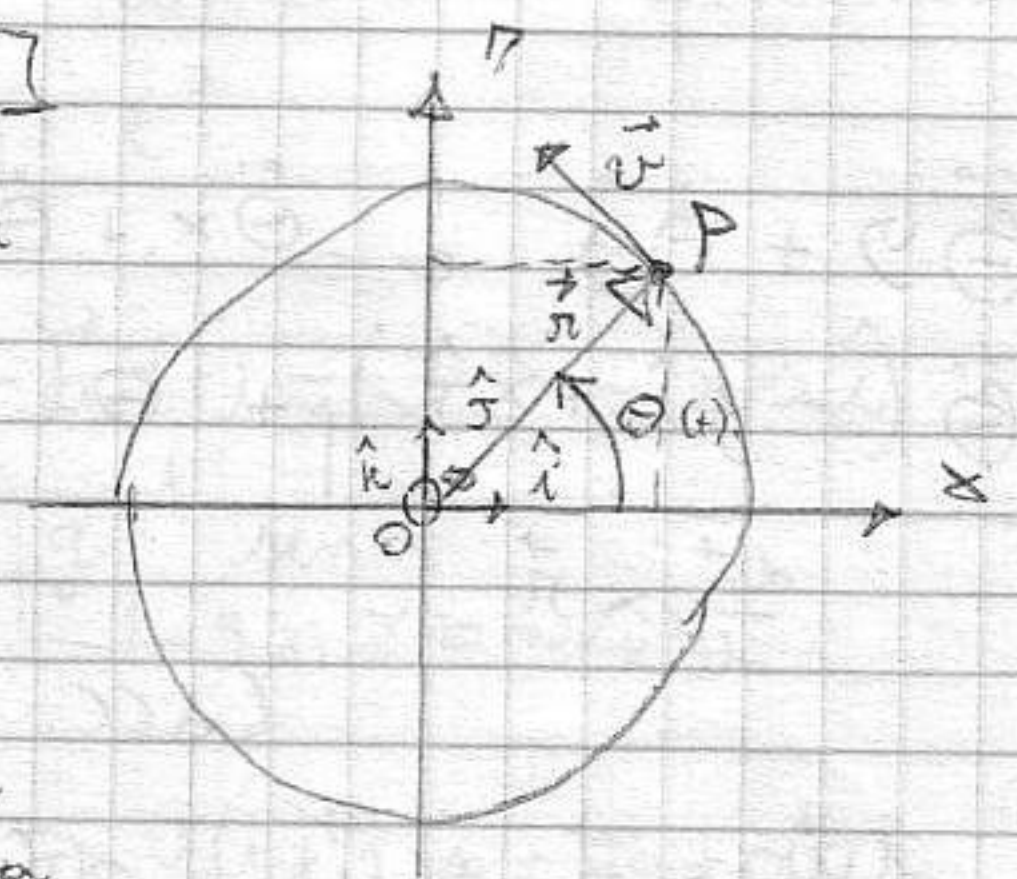
Facciamo un sist. ref.  $\vec{OP}$  è il vett. posizione

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

R [raggio] =  $|\vec{r}(t)|$  la par. del punto

dipende da  $\theta(t)$ .

$$x(t) = R \cos(\theta(t)); \quad y(t) = R \sin(\theta(t)) \quad \vec{r} \text{ con } \theta(t) \text{ misura dell'}$$



11) Moti questi valori → abbiamo individuato il moto

Dove errore proporzionalità tra  $\theta$  e  $t$ . Quindi,  $\theta(t) = A t + B$  in forma di m.c.u.

Velocità:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j}$ . Sostituendo si ha

$$\dot{x} = -R\dot{\theta}\sin(\theta) \Rightarrow \dot{x} = -\dot{\theta}r \quad ; \quad \dot{y} = R\dot{\theta}\cos(\theta) = \dot{x}\dot{\theta} \quad [\dot{\theta} > 0]$$

(vedi derivata vettore),  $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$  + VELOCITÀ ANGOLARE / la velocità si può def. come  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Dimmi:  $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{-\dot{\theta}y\hat{i}}_{\dot{x}\hat{i}} + \underbrace{\dot{\theta}x\hat{j}}_{\dot{y}\hat{j}} = \vec{v}$ .  $\forall$  moto del punto sulla

Circonf. vale la legge;  $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{v}$  TANGENTE alla Cir. e quindi alla traiettoria

C'è m.c. UNIFORME se  $\vec{\omega} = k$ ; quando  $\theta = \omega t + k$ .

$|\vec{v}| = \omega R$  & relazione a  $T$ , tempo per compiere un giro  $\rightarrow \vec{r}$  ha lunghezza  $T$  per girare  $2\pi R \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

Nel moto rettilineo unif.  $\vec{v} = k$ , qui  $|\vec{v}| = k$ , ma  $\vec{v}$  come vettore non è costante, stesso modulo ma dir. diversa.

Definiamo l'ACCELERAZIONE [ $m/s^2$ ]  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})$

$$\vec{v} = -\dot{\theta}y\hat{i} + \dot{\theta}x\hat{j} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{d}{dt}(\dot{\theta}y)\hat{i} + \frac{d}{dt}(\dot{\theta}x)\hat{j} =$$

$$= \ddot{\theta}y + \dot{\theta}\dot{y} \quad e \quad \ddot{\theta}x + \dot{\theta}\dot{x} \rightarrow -\ddot{\theta}y\hat{i} - \dot{\theta}\dot{y}\hat{i} + \ddot{\theta}x\hat{j} + \dot{\theta}\dot{x}\hat{j} =$$

$$= \underbrace{\ddot{\theta}(-y\hat{i} + x\hat{j})}_{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}} + \underbrace{\dot{\theta}(-\dot{y}\hat{i} + \dot{x}\hat{j})}_{\vec{\omega} \times \vec{v}}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}$$

(ACC. CENTRIFUGA)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$  (Regole derivate prodotti vale anche per i vettori e i loro moduli.)

Vel. moto circ. unif.  $\vec{\omega} = \omega \hat{k} = \frac{2\pi}{T} \hat{k}$ . Quindi l'acce.  $\vec{a} =$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

↓  
2° prod. vett.

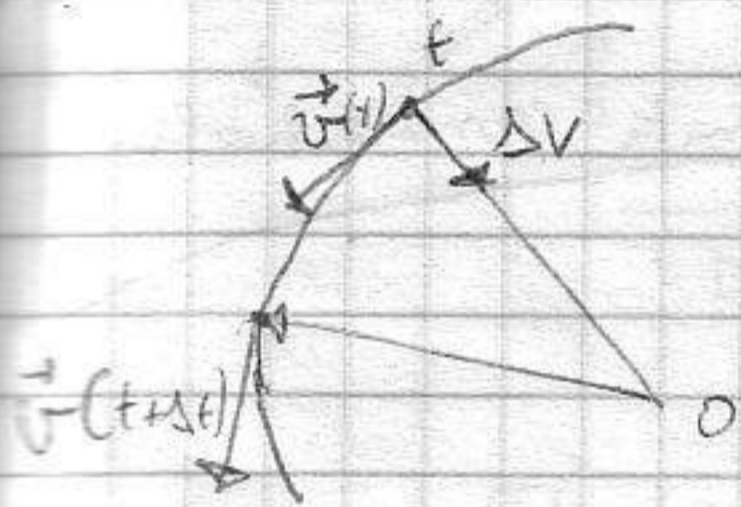
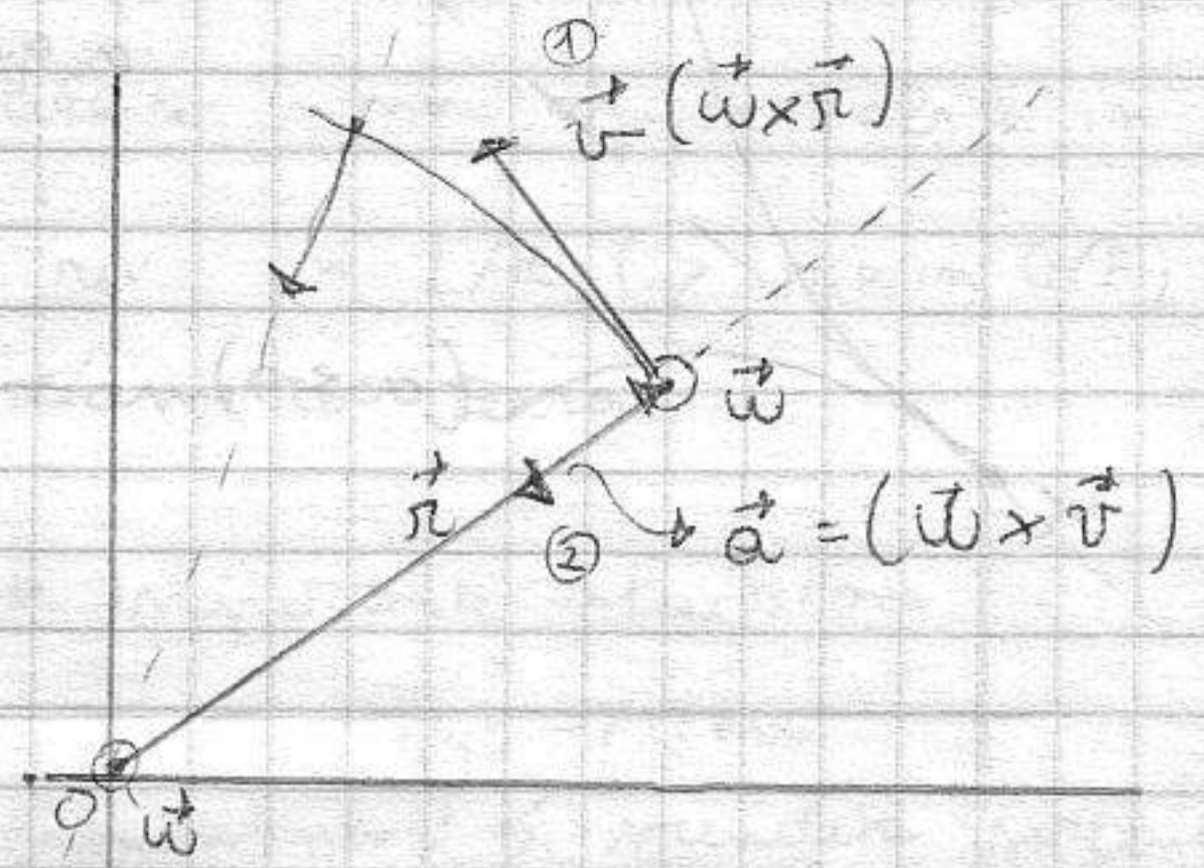
Prima  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  (1), Poi  $\vec{\omega} \times \vec{v}$  (2) e mi ha

$$|\vec{a}| = \omega |\vec{v}| = \omega^2 R$$

↓  
V p.to della

circ.,  $\vec{a}$  è rivolto verso il centro, nel

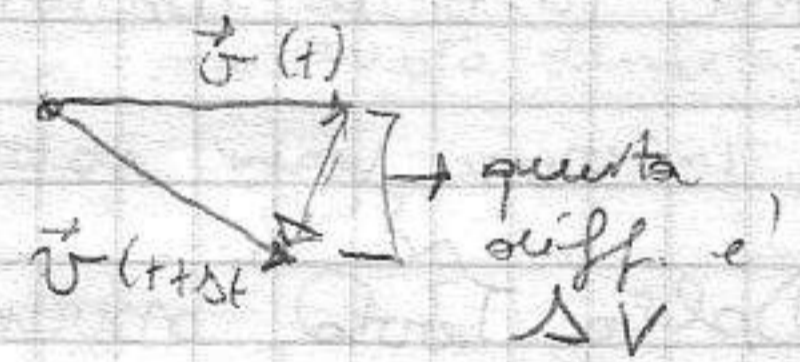
m.c.u.;  $\vec{a}$  è opp. del componente tangenziale  $\vec{v}$



Voglio da dove - studio  $\vec{v}$  in  $t + \Delta t$

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$$

Lo sai se  $\Delta \vec{v} \approx$  dir. tangenziale al limite



Se si accelera,  $|\vec{v}|$  aumenta; accelerazione ha componente tangenziale nel verso della  $\vec{v}$



Tutti i moti - circ. m. rett. uniforme - sono accelerati

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO (rettilineo)

Galileo moti di - se oltre il piano incl. -

Lo spazio varia con relazione quadratica

$$x(t) = \beta t^2$$

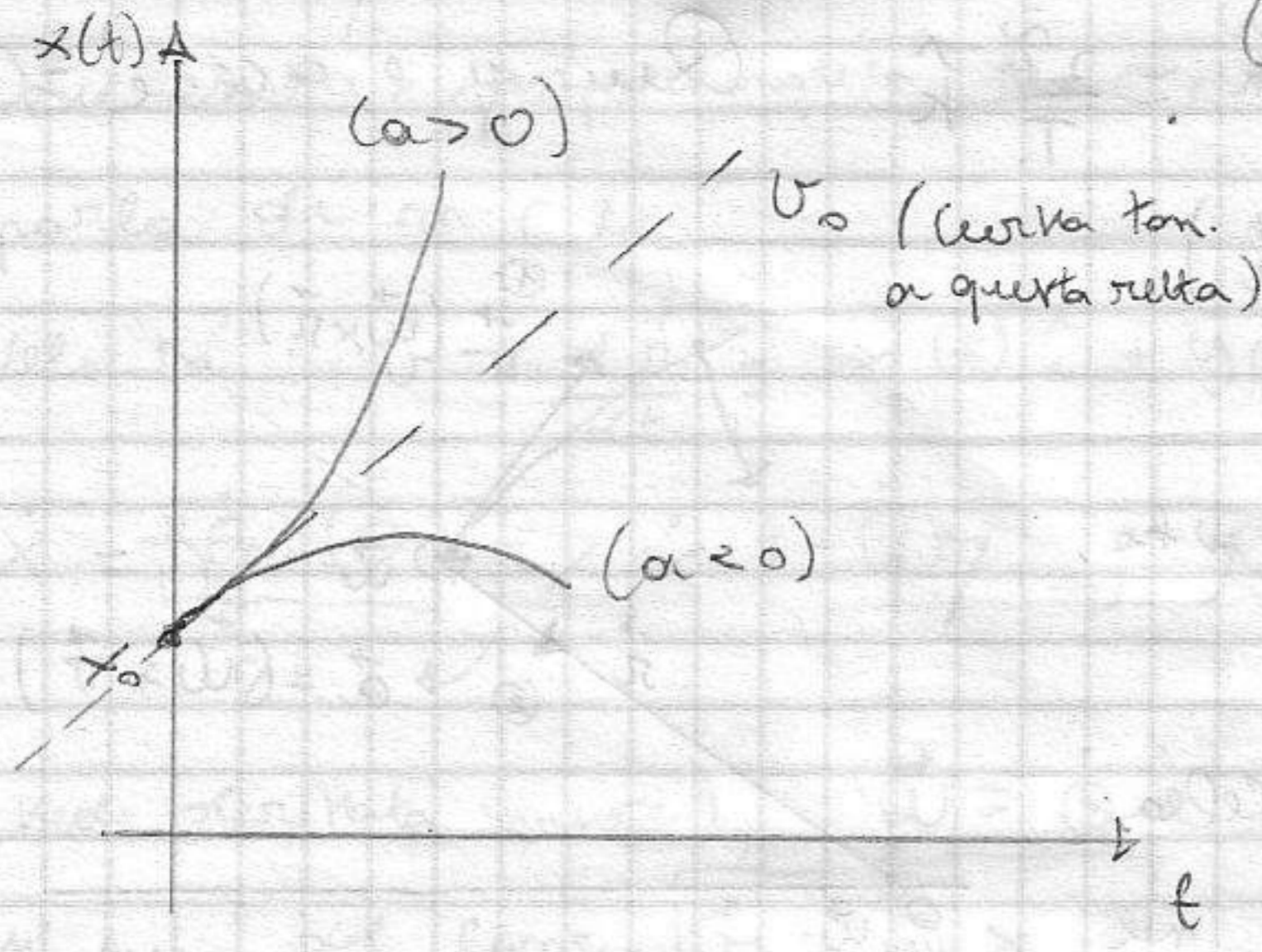
$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{i}; \quad \vec{v}(t) = \dot{x} \hat{i} = 2\beta t \hat{i}; \quad \vec{a}(t) = \ddot{x} \hat{i} = 2\beta \hat{i}$$

In questo moto  $\vec{a}$  è legata ad  $\alpha$ ;  $a = g$  mnd  
 $\rightarrow g_{\text{eff}} \approx 10 \text{ m/s}^2$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v(t) = \dot{x} = v_0 + at$$

$$a(t) = \ddot{x} = a$$

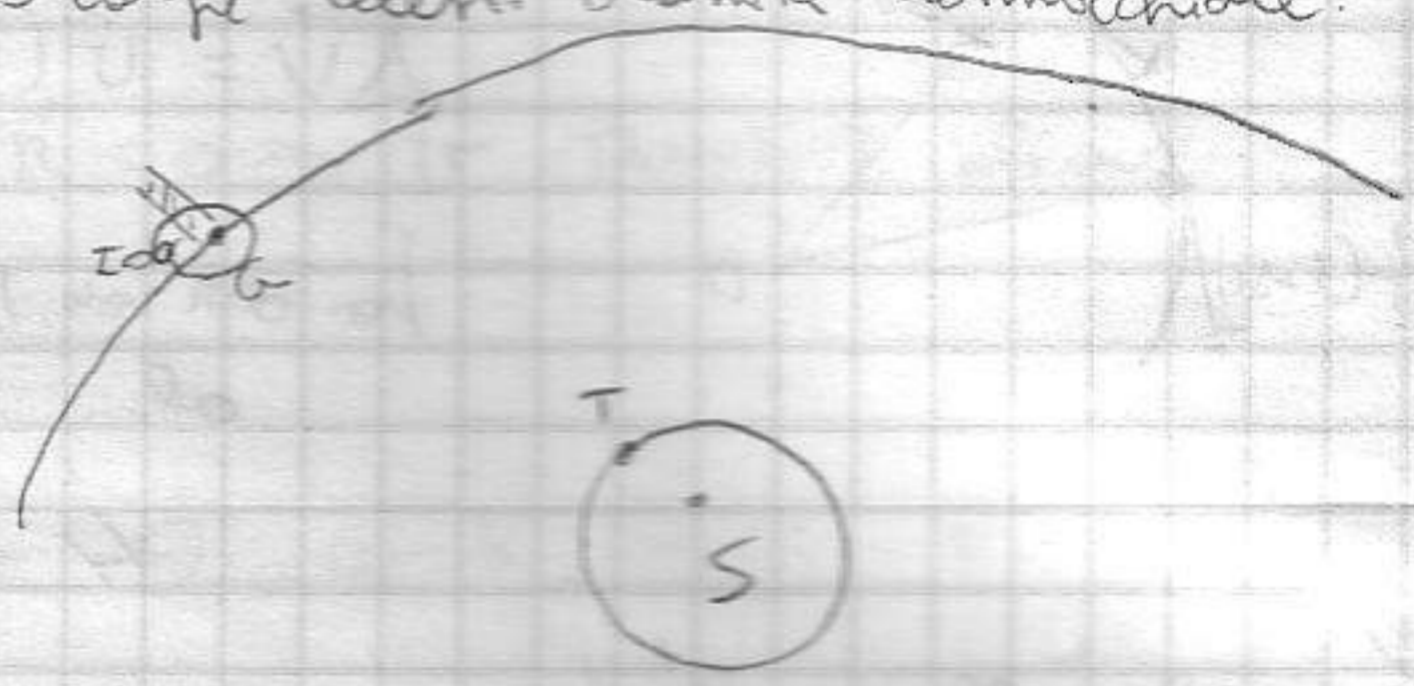


14-1-2005 (vedi ④ ex.)

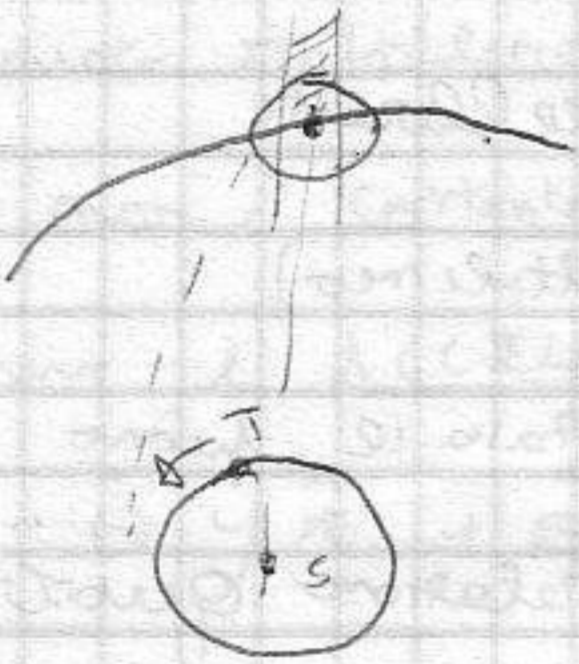
20-1-2005 - APPLICAZIONI DEL MOTO CIRCOLARE

Nel 1676 un astronomo <sup>[rotter]</sup> studiò i moti corpi celesti tramite cannocchiale. (interesse verso satelliti Giove, IO).

Dalla Terra, osservando i moti satelliti, lo si vede emergere da zona d'ombra. Timoro T

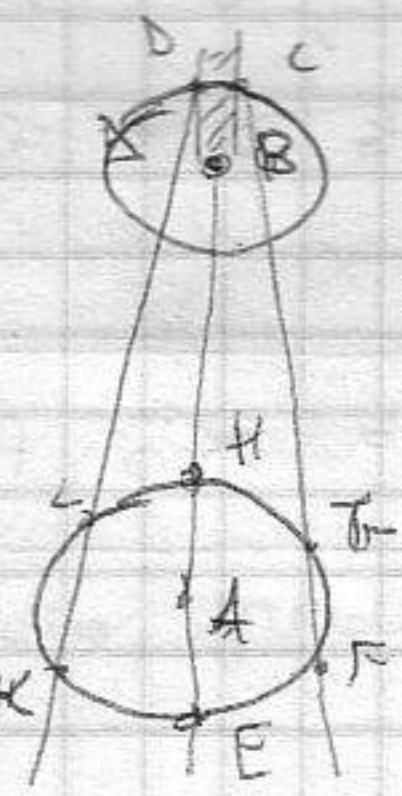


risoluzione IO intorno a Giove ( $\approx 42h$ ). Si sa che la rivoluzione non era costante. Quando la Terra si "allontana" da Giove,  $T_1 >$ , quando si "avvicina"  $T_1 <$  il problema era mot. rispetto a Giove. Durante il t. di rivoluzione anche la Terra si muoveva. Se  $T_1$  minima  $T_1$  approssimazione, quando minima  $T_2$



$T_2$  la Terra si era spostata  $\Rightarrow$  luce proveniente da IO doveva impiegare più tempo. B = Gio; A = Sole; C = p.to interno

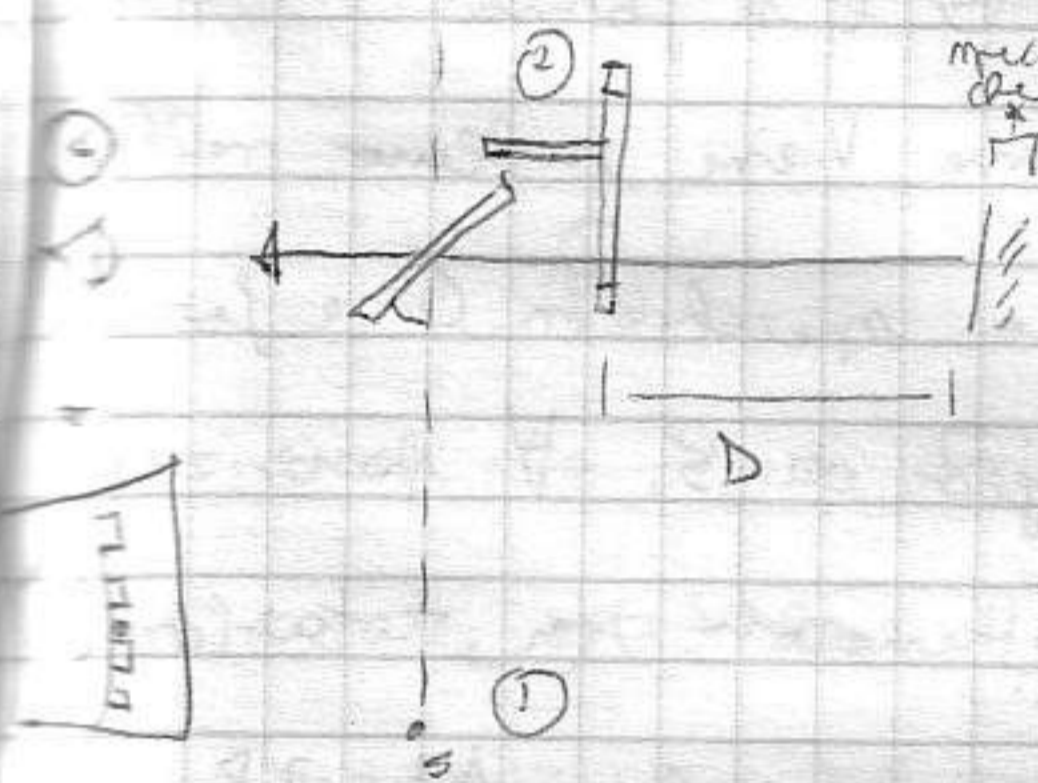
IO nel cono d'ombra, D = p.to esterno; altri punti sono mot. Terra. Se T è in L, IO si vede emergere da D; 42,5 h + terra; la Terra è in K e si vede IO uscire ancora da D.  $\Rightarrow$  se luce



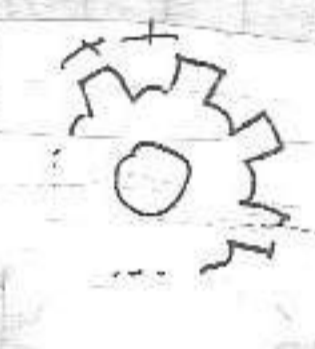
impiega  $T$  per arrivare, satellite muove aereo + tempo, ma mai  
 a ritorno allontanando. [ in G e F muove invece che il T e di meno ]  
 la differenza del periodo rivoluzione satellite - non apprezzabile in  
 2 rivoluzioni - e apprezzabile in comp. 40 rev. in L/K (> rev. in G/F).

Diff e 22 minuti e t. luce per compiere diametro Terra  
 (e 16 min) e stimo la velocità luce. → Importante intuizione

[da mole arca. a mole terrestri]. Altro esperimento, <sup>1849 - FIZEAU</sup> si puntava sorgente



macchina che riflette luminosa e la si manda tramite vetro  
 trasparente + specchio in più parte e un  
 po' riflette. Fascio parte su ruota dentata  
 Se ruota e porta / da  
 frena, luce parte, <sup>2</sup>  
 rimbalza a specchio e



parte in modo da poter vedere immagine <sup>4</sup>  
 mette in rotazione ruota; se si muove lentamente, se ruota

con luce parte da sorgente rimbalza e ritorna  
 $\Rightarrow \Delta t = \frac{2D}{c}$  Se  $\omega$  e  $v$  ang della ruota,

ruota ha rotato di un angolo nel frattempo.

$\alpha = \omega \Delta t = \frac{2D}{c} \omega$ , Nel tempo in cui percorre D - se ruota ruota da  
 ripete un dente noi non vediamo luce - annullato il sistema.

arrivando velocità ad un certo punto non vede luce, misura  $\omega$  e  
 trova C. Bisogna conoscere  $\omega$  <sup>2</sup>  $\alpha$  si poteva sapere

denti ruota (720), ruota era "simmetrica" [mp. Keble's mp. branch]  $\Rightarrow$   
 $d = \frac{2D}{2N} + 720 \text{ denti} + 720 \text{ mp. Keble's} = \frac{2D}{N}$ . Quindi:  $\frac{2D}{c} \cdot 2\pi \cdot \omega = \frac{2\pi}{N}$

$C = 4D \omega N$ ,  $D = 8,63 \cdot 10^3 \text{ mt}$ ;  $N = 720$ ;  $\omega = 12,6 \text{ Hz} \Rightarrow C = 313000 \text{ km/s}$  (15)



Altri esperimenti - FOUCAULT [1860] - una ruota lunghetta + piccola.

1° exp. dimostrazione  $c$  in laboratorio. Sistema ottico: Sorgente

$[R = \text{dirt. } S_1/S_2]$

punt. / specchio a  $45^\circ$  / specchio

ruotante intorno ad axe  $c$  - specchio

Merico con  $\pi$ . curvatura =  $96$  e

centro in  $c$ .

Raggio da  $S$ , arriva in  $C$ , viene

riflesso  $(2)$  e si forma immagine

puntiforme. Viene riflesso nella

Specchio

rotante sist.  $(2)$ , forma indistinto, riflesso da specchio in  $(3)$  e forma

immagine in  $(6)$  in retino.  $\Rightarrow$  Im  $(6)$  e' immagine di  $S$ .  $\nabla$  posizione

specchiello in  $C$ ,  $S_1$  si forma sempre in  $(6)$ . Mettendolo in rotazione:

Se  $R$  e raggio specchio,  $\Delta t = \frac{2R}{c}$

(tempo da  $C$  a  $C$ ). Quando

e' tornato in  $C$ , specchio sta ruotando

con certa  $\omega$  - altra rotazione  $\alpha$ .

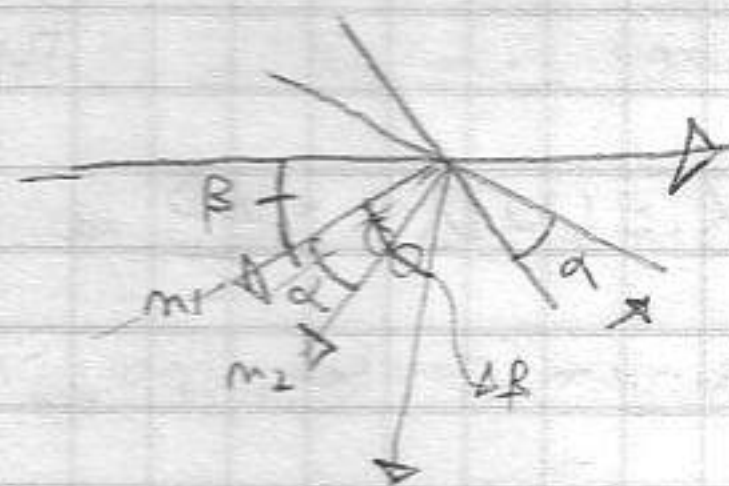
$\alpha = \omega \Delta t = \frac{2\omega R}{c}$  (valore piccolo)

Dove va il raggio riflesso) la ruota + dello specchio sono

ruotata di  $\alpha$ . Il nuovo angolo di incidenza

e'  $\beta - \alpha$ . Si vuole sapere angolo di riflesso.

tena del raggio  $\rightarrow \beta - 2\alpha \Rightarrow$  angolo e'  $2\alpha$ .



All'uscita il raggio riflesso ha un'immagine

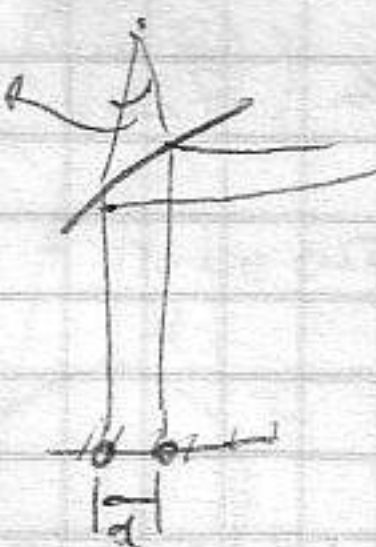
sportata. Relazione tra minima spostamento del reticolo e

$2\alpha \rightarrow$  ricatiamo  $\alpha$  e quindi  $c$ .

Il raggio era circa  $6$  mt,  $d = 0,8$  m

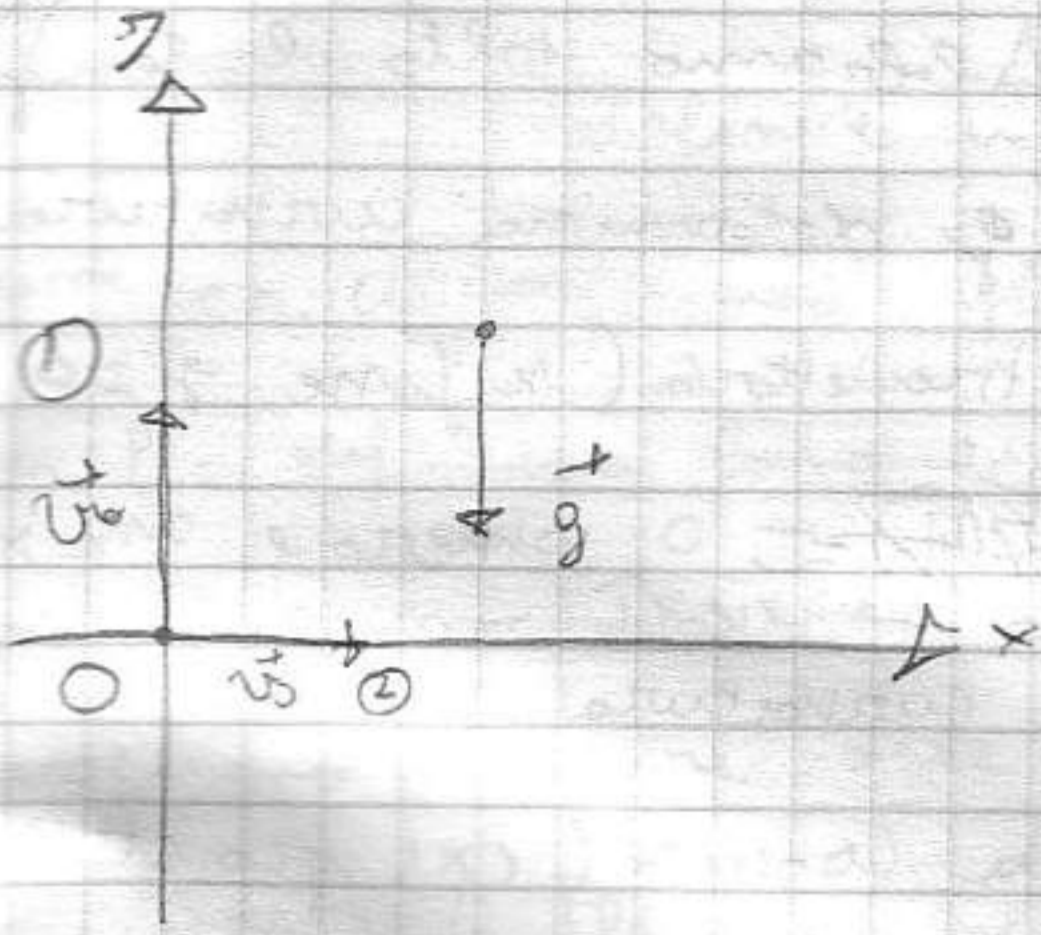
$\omega$  specchio =  $705$  Hz -  $d$  specchio / specchio nell'ordine

dei metri  $\rightarrow c = 298.000$  km

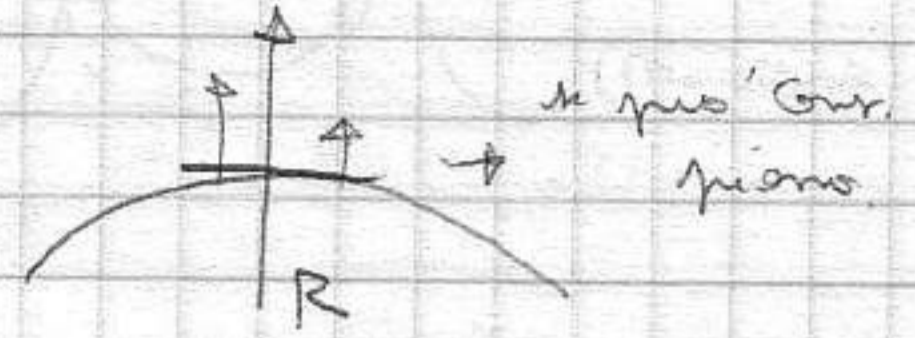


era difficile per questo perché a 700 Hz → collegato con motore a vapore. Grazie a meccanica e ottica si è appross. bene il simulatore.

H



Prendiamo piano sulla Terra



Fissiamo un  $O(x, y)$

Prendiamo p.to materiale con

$$\vec{a} = \vec{g} \Rightarrow |\vec{g}| \approx 9,81 \text{ m/s}^2 \approx 10 \text{ m/s}^2$$

Moto unif. accelerato; si pensa

pro' oltre da v. in. Ex: sasso lanciato in aria, con  $\vec{v}_0$  nel grafico,

$$x(t) = 0 \text{ e } y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1); \text{ se } \vec{v}_0 \text{ è } (2) \text{ si ha moto di p.to}$$

/ direzione dei 2 vettori  $\perp$ , quindi  $\vec{v}$  e  $\vec{a}$  sono DIR.  $\Leftrightarrow \Rightarrow$  moto

lungo un piano. Si fissa  $O(x, y)$ , si cercano componenti  $\vec{x}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$ :

$$a_x = 0; a_y = -g \quad / \quad \text{il moto sir. a' composizione due moti} \rightarrow$$

movendo vettore posizione e ruotarlo con:  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$  (norma

costante). Essendo  $a_x = 0$ ,  $x(t) = \vec{v}_0 t$ . Essendo  $v_x(0) = v_0$  e  $v_y(0) = 0$  componenti

in. m.,  $v_x(0) = v_0$  e  $v_y(0) = 0 \Rightarrow x(t) = v_0 t$ ;  $y(t)$  altro moto

$$\text{f. accel, quindi - essendo } v_{0y}(0) = 0, y(t) = -\frac{1}{2} g t^2$$

tipo del moto (p.to materiale lanciato orizzontalmente e soggetto a g.

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \text{E' stato descritto completamente il moto.}$$

$$[ \text{MOTO PUNTO NEL PIANO} ]$$

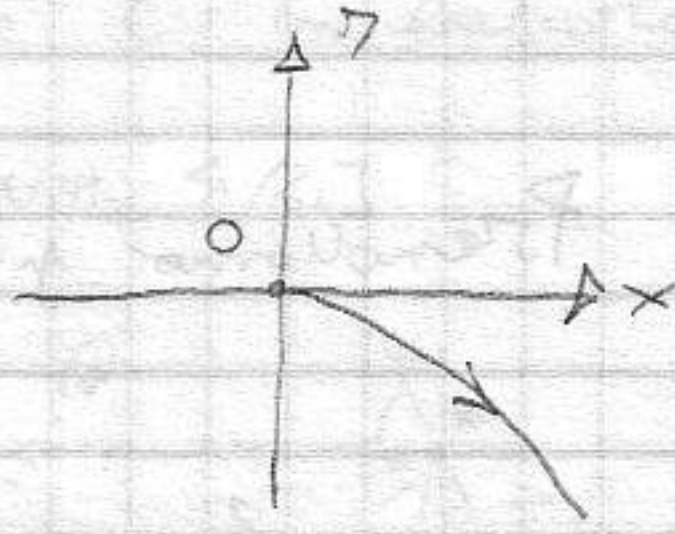
Espr. moto di p.to da  $O(x, y)$ , ma il moto ha caratteristiche me  
intermedie di  $O(x, y)$ :

- TIPO DI TRAIETTORIA (lungo geom. dei punti attraversati da corpo - (17)

curva). Sora' una legge  $f(x, y) = 0$ ; si risolve per parametrizza in t

Prova  $t = \frac{x}{v_0} \rightarrow \eta = -\frac{1}{2}g(x/v_0)^2 = -\frac{g}{2v_0^2}x^2$   $\rightarrow$  eq. nel piano  $x, \eta$  de scrive la traiettoria

$\rightarrow$  parabola



Abbiamo tolto il tempo  $g$  determina curvatura traiettoria (a fase  $g=0$

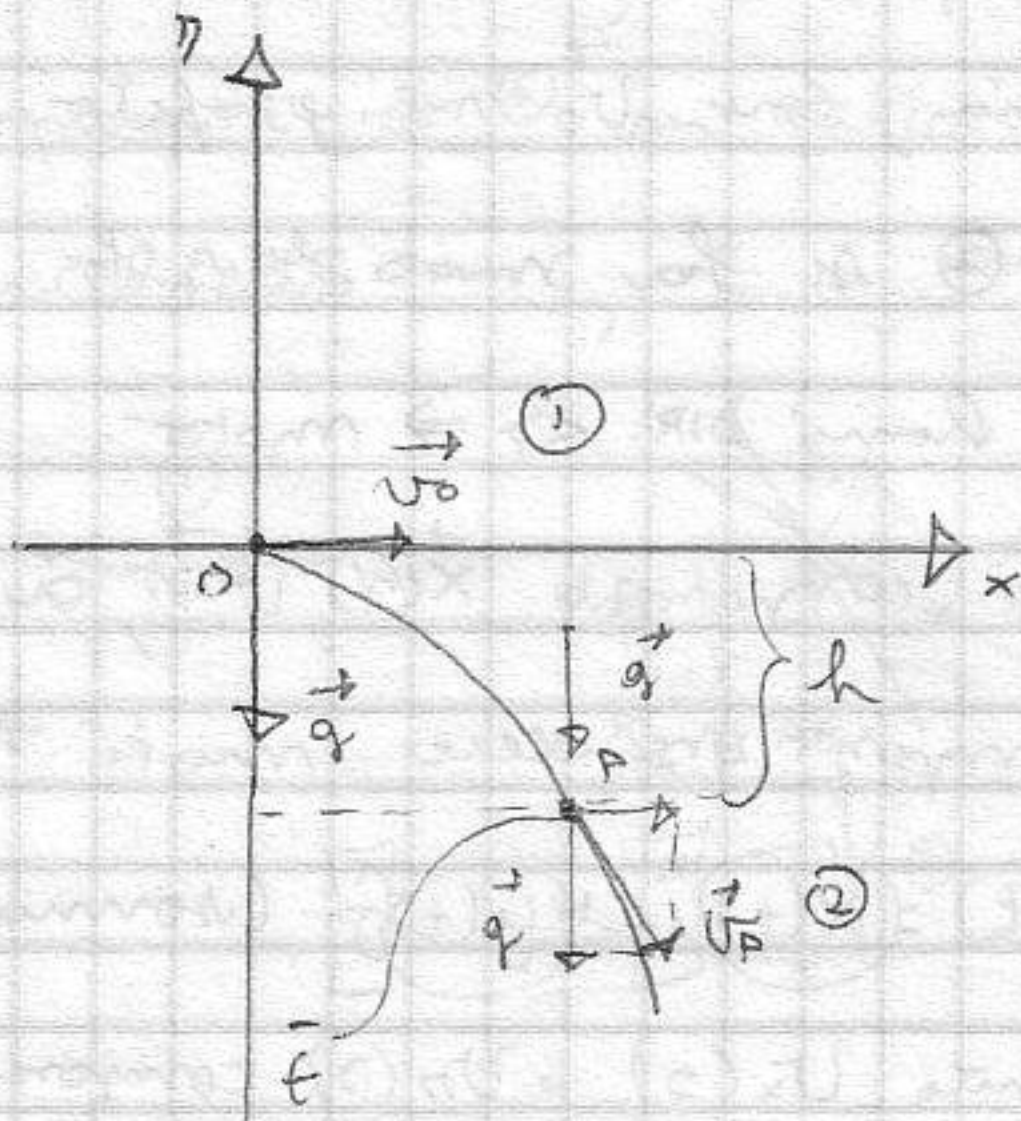
$\eta = 0$ , ovvero l'asse  $x$ ,

in moto rettilineo); a  $v_0$  oltre la curvatura diventa piccola

$\Rightarrow$  a vuole tempo prima di notare la curvatura (es. proiettile)

$\Rightarrow$  se consideri piccole  $g$  la traiettoria sembra dritta

21-1-2005



$x(t) = v_0 t$  Eq. traiettoria:  $\eta = -\frac{g}{2v_0^2}x^2$  concavità parabola

$\vec{g} \perp \vec{v}_0$ ; P.to zero di quota  $h$ ;  $\vec{v}$  è tan. a traiettoria, mentre  $\vec{g}$  resta sempre verso il basso

$\vec{g} \cdot \vec{v} > 0$  (angolo acuto)  $\Rightarrow$   $\exists$  componente accelerazione // al vettore  $\vec{v}$ . Colcoliamo

$\vec{v}_P \cdot \vec{f} =$  in tante in cui il punto è in  $P \rightarrow \eta(\bar{t}) = -H = -\frac{1}{2}g\bar{t}^2$ , quindi  $\bar{t} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ . Componente

te velocità:  $v(x) = \dot{x} = v_0$ ;  $v(\eta) = \dot{y} = -gt$  Quindi in  $\bar{t}$ ,  $v(x) = v_0$ ,

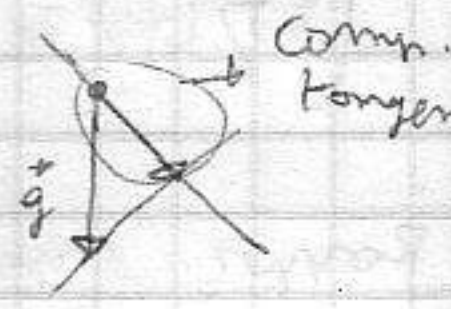
$v(\eta) = -\sqrt{2H}g$ .  $\vec{v}$  in ②, rispetto a ①, ha una variazione nella comp.

$y = -gt$ . Il modulo  $|\vec{v}_P| = \sqrt{v_0^2 + 2Hg} > v_0$  (teor. pitagora)

In ① inizialmente - essendo  $\vec{g} \perp \vec{v}$  - fa incurvare la traiettoria (visti moto circ. unif.) come se fosse una circonferenza; ma acc. non

è  $\perp$  a traiettoria (come in m.c.u) rimane // all'asse  $\eta$ .

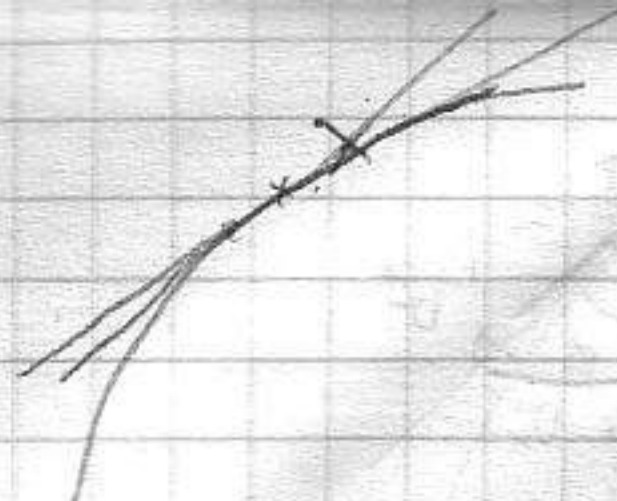
È la componente tangenziale che accelera il moto, e  $|\vec{v}|$ .



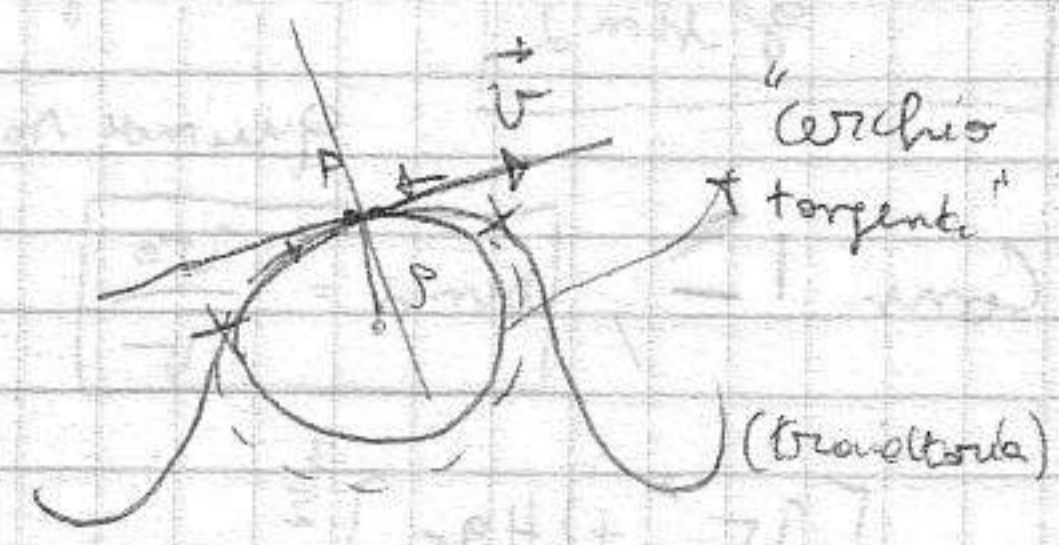
(in m.c.u  $\exists$  solo componente normale  $\Rightarrow$   $\exists$  acc. tan e  $v = kv$ ).

L'angolo di  $\vec{v}$  e la componente tangenziale di  $\vec{g}$ , quella  $\perp$  fa

incurvare la traiettoria.



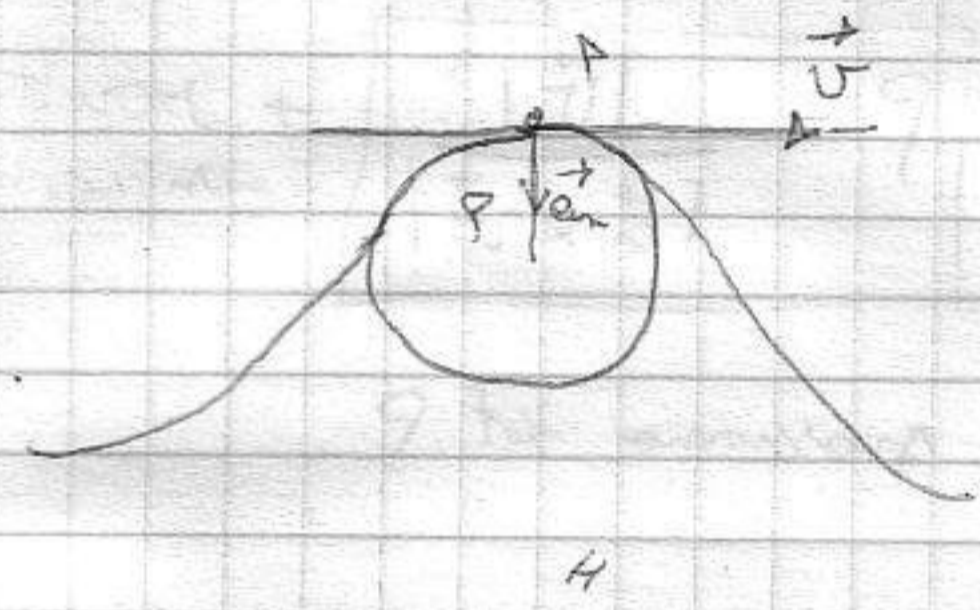
... (taglia con in 2 punti) - avvolto a retta limite in cui i due punti coincidono.  
 Allora una volta possiamo definire una curva di L.



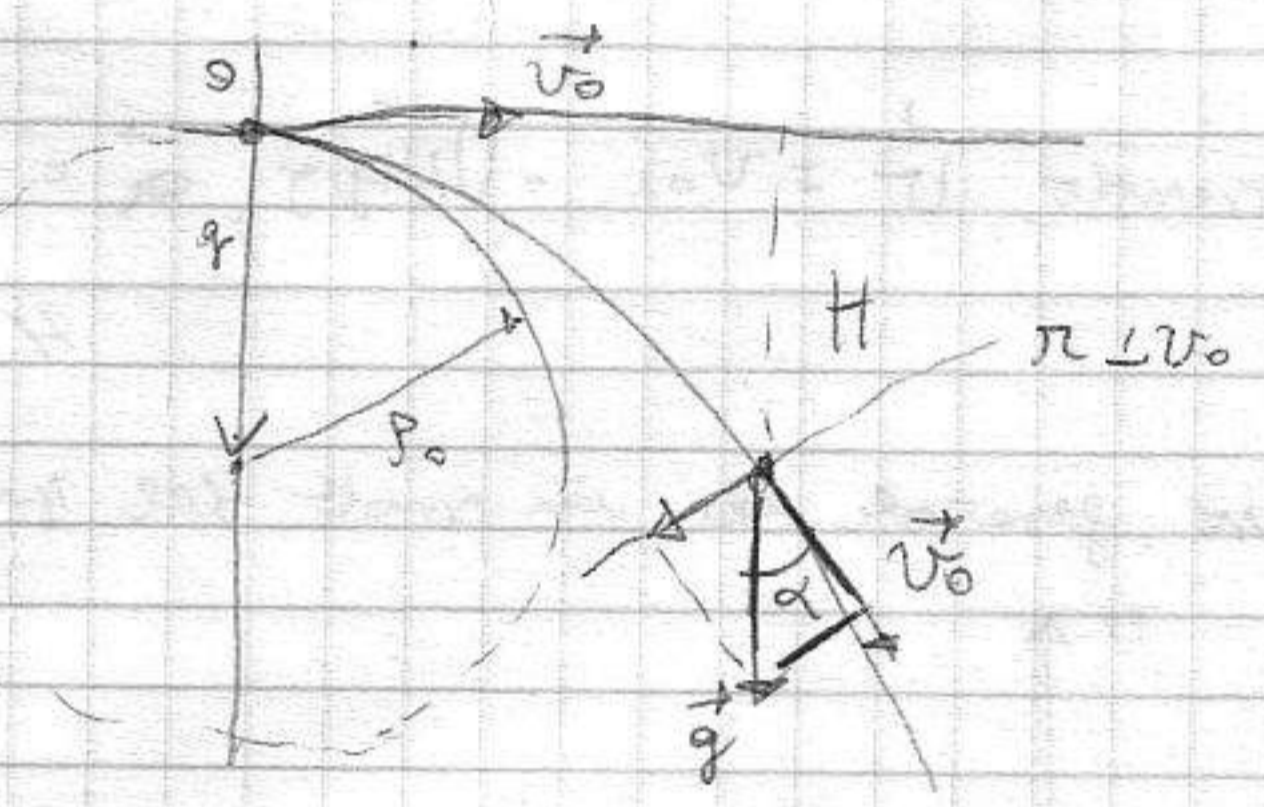
ovvero, ex. di conferenza. Gli altri 2 punti  
 → a P e def. una forma limite.

Approssimiamo T.R.D.I.F.F.I.O.R.I.S al CERCHIO OSCULATORE;  $P =$  raggio di curvatura (ci vogliamo riferire alle caratteristiche intrinseche del moto), (ora caratteristica  $P$ ?) Il moto intorno a P è circolare uniforme altrove - teorico.

nel caso osc. Se  $\vec{v} = v$  in P,  $\vec{a}_P = \perp$  diretta verso centro di curvatura traiettoria, quindi  $|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{P}$

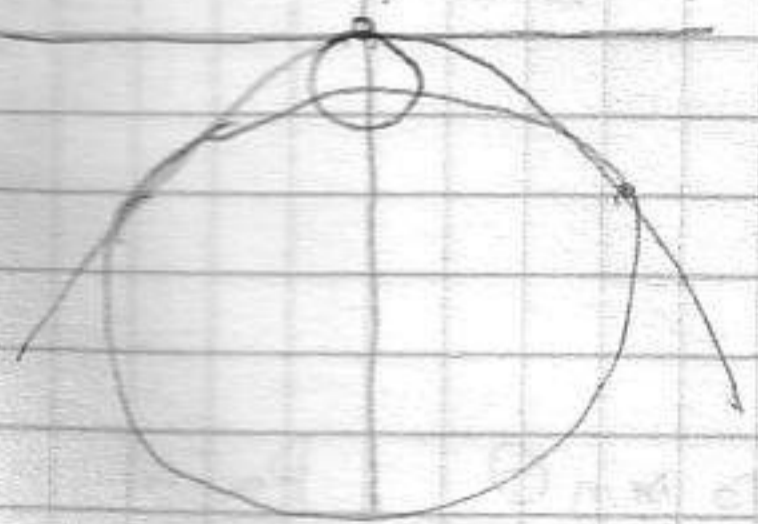


Tornando a prima, vogliamo il P in O.



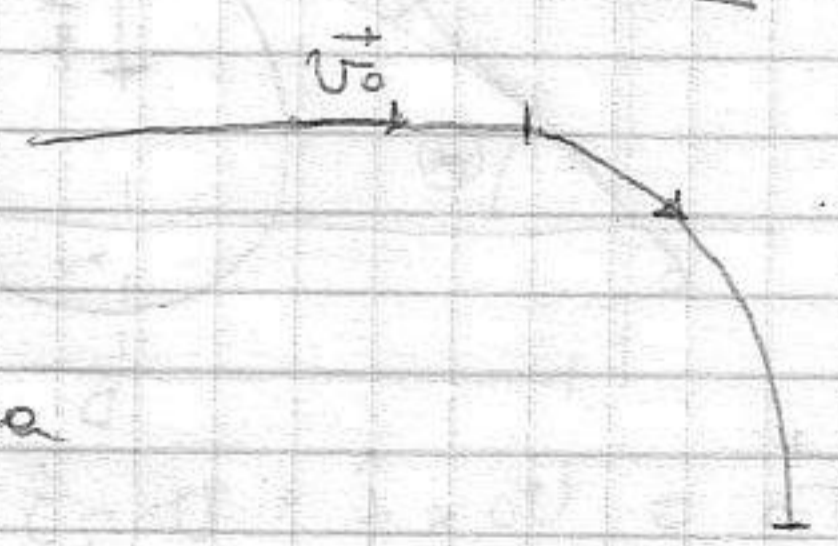
Tutta  $P$  è la traiettoria, quindi anche lì è in m.c.u.  $\Rightarrow P_0 = \frac{v_0^2}{g}$   
 (raggio curvatura traiettoria in O)

Lim  $\frac{v_0^2}{g} = \infty$ , (retta). Come varia  $P$  lungo la traiettoria? Curvatura è costante o no? In questo  $P_0$  aumentati



(parabola) Ex: Strada

∃ curve che permettono transizioni passibili da  $P = \infty$  a  $P = d$ .

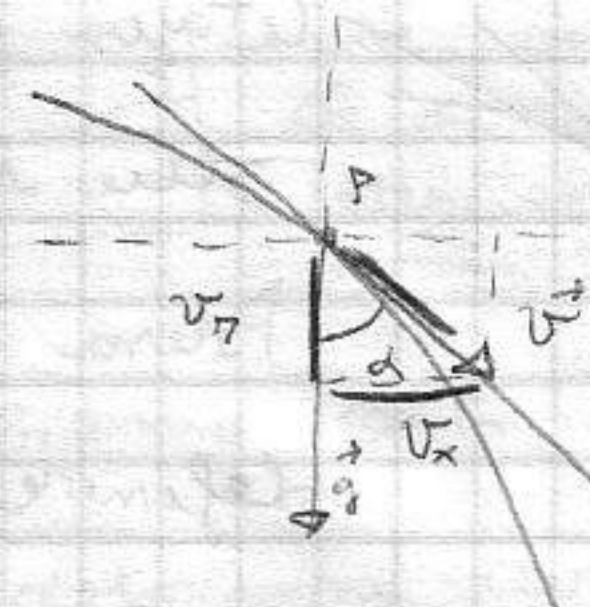


(traiettoria è sempre curva), Per calcolarlo, togliendo  $\vec{v}$ , mi serve il modulo della componente  $\perp$  di  $g$ , per determinarlo ho bisogno di  $d$ .

Decompongo vettore lungo  $\pi$ .  $|\vec{a}_n| = (\cos \alpha) = g \cdot \sin \alpha \Rightarrow$  (19)

$$\rho = \frac{V^2}{g \sin^2 \alpha}$$

nonca solo  $\sin \alpha$   
 Posto  $\vec{v}_p$ ,  
 quindi ho  $v_x$  e  $v_y$ .

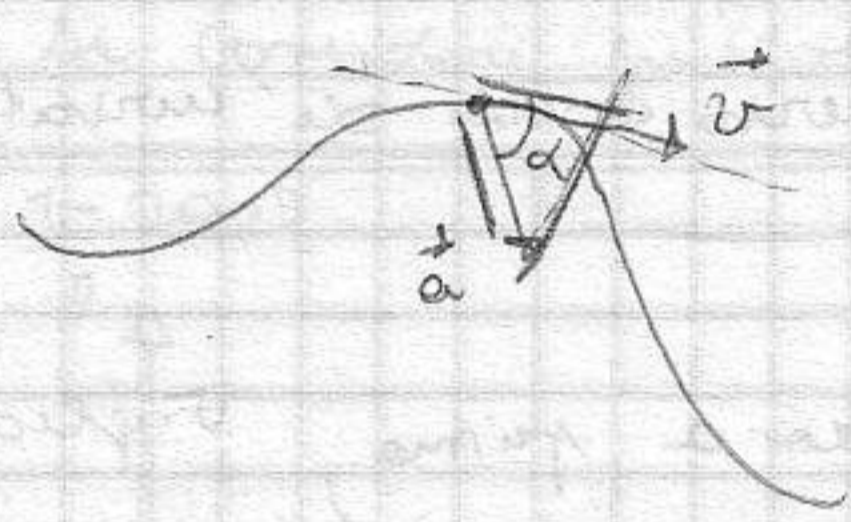


Con  $\sin \alpha = \frac{v_0}{v}$  quindi ho  $\frac{V^3}{g v_0}$

$$\rho = \frac{[v_0^2 + 2Hg]^{\frac{3}{2}}}{g v_0} \Rightarrow \rho = \rho_0 \left[ 1 + \frac{2Hg}{v_0^2} \right]^{\frac{3}{2}} > 0$$

semplificando e proprio  $\rho$  in 0

Scriviamo  $\rho$  di  $O(x, y)$ . Come esprimere  $\rho$ ? Prima intuizione  $\rho = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}|} =$



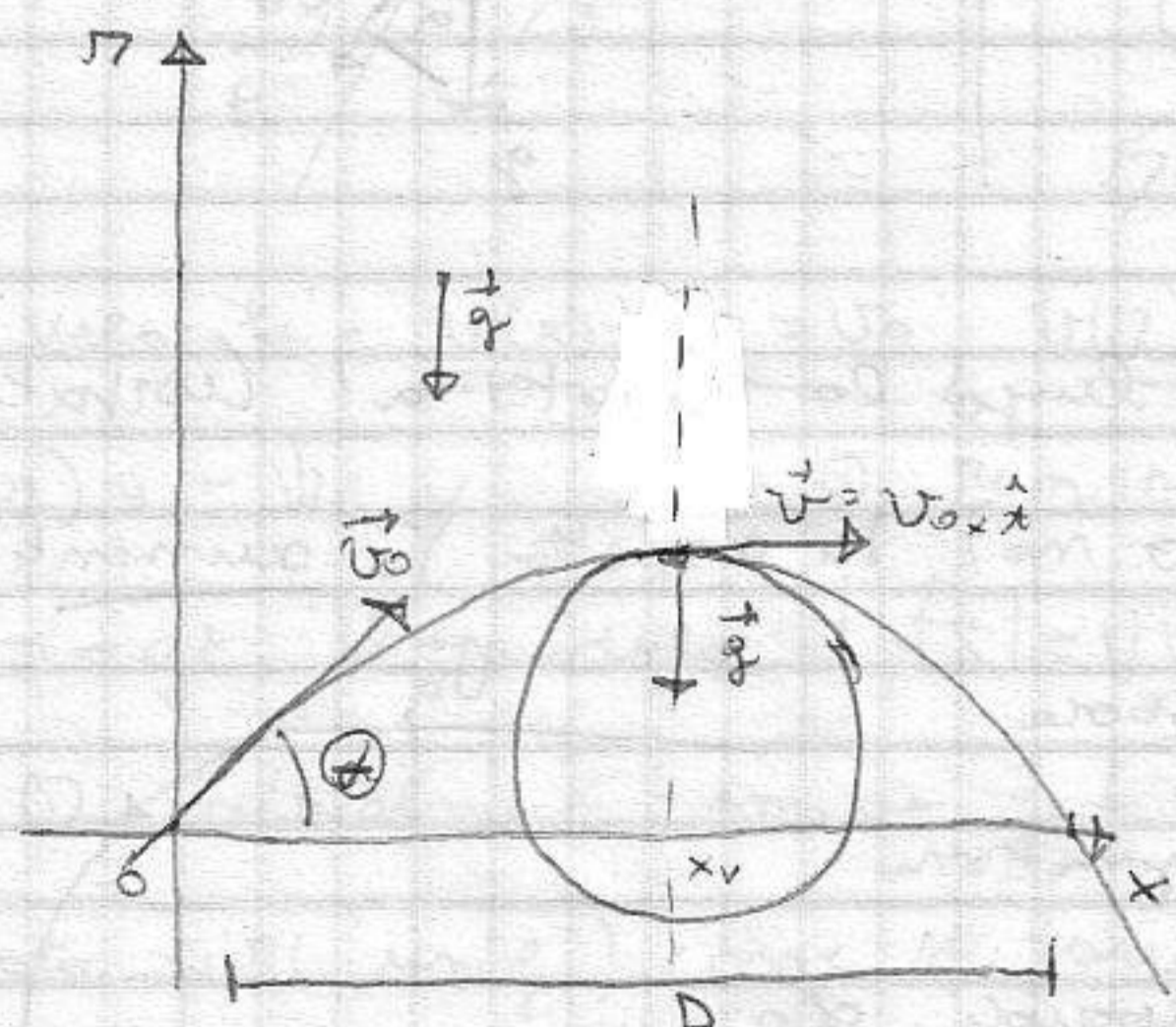
$$= \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}| \sin \alpha} \quad (\text{considerando } \nabla)$$

Uno operatori vettoriali.  
 (prodotto vettoriale)  $|\vec{a} \times \vec{v}| = |\vec{a}| |\vec{v}| \sin \alpha$

quindi  $\rho = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{a} \times \vec{v}|}$   $\rightarrow$  scrittura sintetica ed  $O(x, y)$

Prendendo  $\vec{v} = v_0 \hat{i} - \sqrt{2Hg} \hat{j}$ ,  $\vec{a} = -g \hat{j}$  possiamo det.  $\rho$ .

Corso generale di un moto del punto materiale soggetto a  $g$ :



Fissiamo  $O(x, y)$  e  $\Theta$ , angolo di  $\vec{v}_0$   
 con axe  $x$ , chiamato  $\Delta \theta_0$ .

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

(leggi scorie)

$\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j}$  dove  $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ ;  $v_{0y} = v_0 \sin \theta$ . Poichè  $g$  è sempre diretta verso il basso,  $x(t)$  è m. rettilinea uniforme. Lungo l'axe  $y$  è moto accelerato. Che tipo di traiettoria mi ha?

(20) Eq. parametrica in  $t$   $\left[ t = \frac{x}{v_{0x}} ; y = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \left( \frac{x^2}{v_{0x}^2} \right) \right]$ . Quindi

1  $\frac{v_{0y}}{v_{0x}}$  e'  $\tan(\theta)$ , quindi  $y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2$  (eq. traiettoria) (2)

PASUBOLI GNL. PASSA

$\dot{y}$  in  $x=0$  e'  $\tan \theta \Rightarrow \dot{y}$  alla curvatura in O forma  $\theta$  con x  
(corris,  $\vec{v}$  e' sempre diretta lungo tangente);

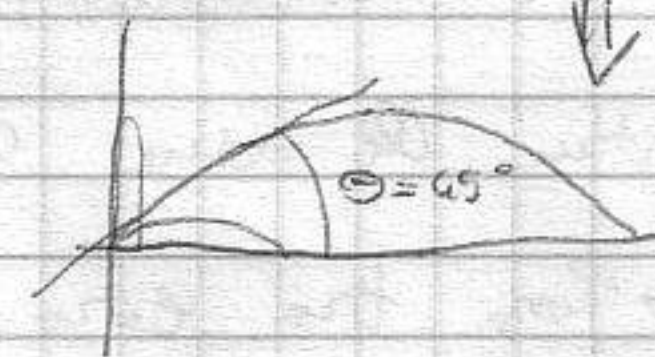
$\frac{g}{2v_{0x}^2}$   $\rightarrow$  verso di una lunghezza;  $\left(\frac{v_{0x}^2}{g}\right)$  Vogliamo  $P_{xv}$ . In xv  $|\vec{v}| = v_{0x}$  e  $\vec{a} = \vec{g}$ .  
Ma in xv  $\vec{a} \perp \vec{v} \Rightarrow \frac{v_{0x}^2}{g}$  e' proprio  $P_{xv}$

Eq. traiettoria esprimibile come  $x \tan \theta - \frac{1}{2P_v} x^2$   $\rightarrow$  doppio intersezione  $P_v$  in xv che e' anche il min p  $\forall x$  traibett.

Calcoliamo D [GITTATA]. Impostiamo  $x=D$  e  $y=0$ .

Si ottiene  $0 = x \tan \theta - \frac{1}{2P_v} D^2$ ,  $\frac{D}{2P_v} = \tan \theta \rightarrow D = 2P_v \tan \theta =$   
 $2 \frac{v_{0x}^2}{g} \tan \theta$  ma  
 $v_{0x} = v_{0x} \cos \theta$ , quindi  $= \frac{2}{g} \cdot v_0^2 \cos^2 \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

quindi  $D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$   $\rightarrow$  formula della gittata. Non dip. solo dalla velocita', ma anche dall'angolo.

$D_{max} = \frac{v_0^2}{g}$    $\rightarrow v_0 = \sqrt{g D_{max}}$  (vedi (1))

26-1-2005 (vedi (11))

DINAMICA del P.TO MATERIALE (studio della causa del moto)

legata al principio di inerzia (teorema de Galilei; prima m.  
pensava che  $\rightarrow$  mantenere corpo in moto a velocita' costante, invece lui  
affirmo' che stato naturale corpo e' moto rettilineo uniforme)

Si confrontava quiete con m. rett. unif.; in corpo isolato tende  
a muoversi con m. unif. fino a quando non interviene causa  
esterna (forza). Si annua vettore  $\vec{F}$ , e' la causa del moto,  
della deviazione dal moto stato iniziale. Problema e' natura forza.

FORZE GRAVITAZIONALI e FORZE ELETTRICHE;  $\vec{F}$  delle forze legato  
non a  $\vec{v}$  (come prima di g.) ma all'ACCELERAZIONE (vedi (2))

di velocità)  $\vec{F} = m \vec{a}$  → 2° PRINCIPIO DI NEWTON.

Applicando forza a p.to materiale esso è soggetto ad accelerazione proporzionale alla massa,  $g$ , di materia del corpo.

[PRINCIPIO DI INERZIA: Se  $F_{\text{ext}} + \vec{a} = 0 \Rightarrow$  si muove di moto ret. uniforme.]

$m$  è caratteristica intrinseca corpo - resistenza che il corpo oppone al cambiamento di stato cinematico [definita spesso come massa inerziale]

$m$  è grandezza fisica; l'unità di misura è il  $\text{kg}$  [S.I.]

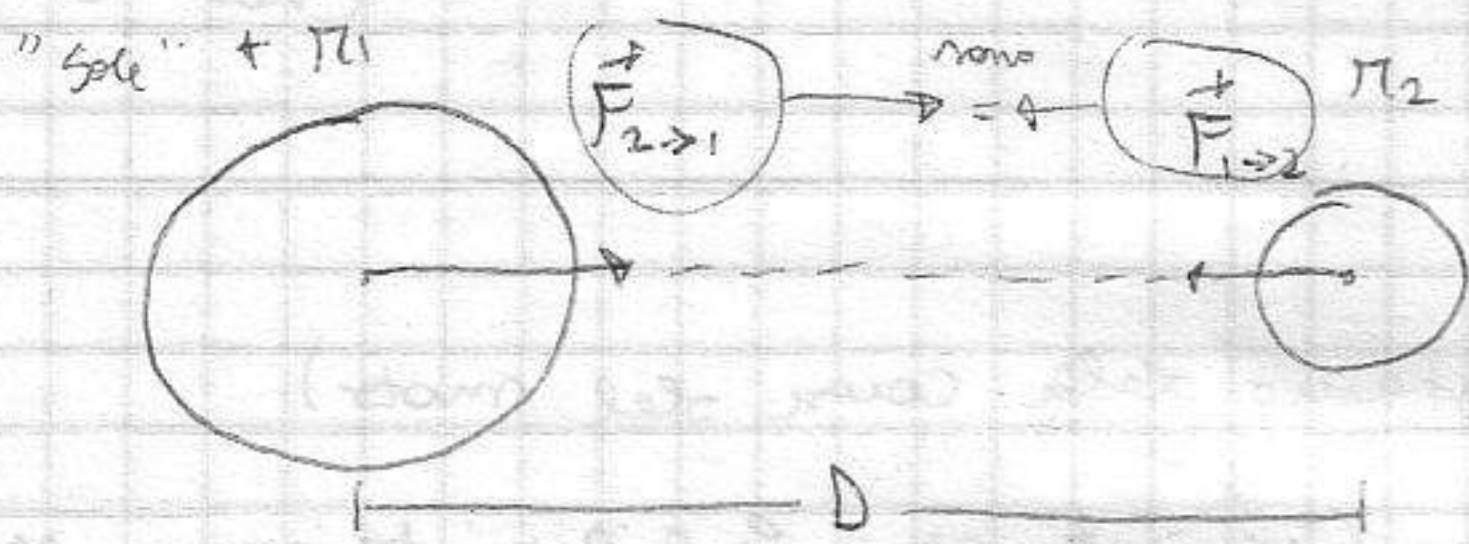
$\vec{F}$  è " " " (non fondamentali);  $\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$  [Newton]

(base di tutta la meccanica Newtoniana)

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE:  $\vec{F}$  risultante nel sistema è somma vettoriale di tutte le forze - utile x interpret. matematica.

Problema è capire "chi è  $F$ ".  $F$ . gravitazionali, elastiche, di contatto, attriti

FORZA GRAVITAZIONALE. Newton scopri' che  $m$  (corpo), oltre all'inerzia stessa, poteva essere fonte di forza. Intui' che due corpi interagivano



tra loro una  $F$  uguale e contraria diretta lungo la congiungente dei centri la cui modulo è proporzionale del prodotto masse e inv. proporzionale a  $D^2$  (c.

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = G \frac{M_1 M_2}{D^2}$$

vuole costante x portare a N).  $M_1 \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ;  $M_2 \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  ( $M$

sole è 1 milin volta quella della Terra +  $a_{\text{Terra}}$  è mil volta + grande del

sole → approx  $\vec{a}(\text{sole}) = 0$ ,  $D = 150 \cdot 10^6 \text{ km} \rightarrow 1,5 \cdot 10^2 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \text{ m} =$

$$1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} \text{ Quindici} \quad \vec{F} = G \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{3 \frac{3}{4} \cdot 10^{22}} \text{ N} = \frac{6,7 \cdot 16}{3} \cdot 10^{-11+30+24-22} \text{ N}$$

②  $\approx 3 \cdot 10^{22} \text{ N}$  → forza di attrazione Sole-Terra.

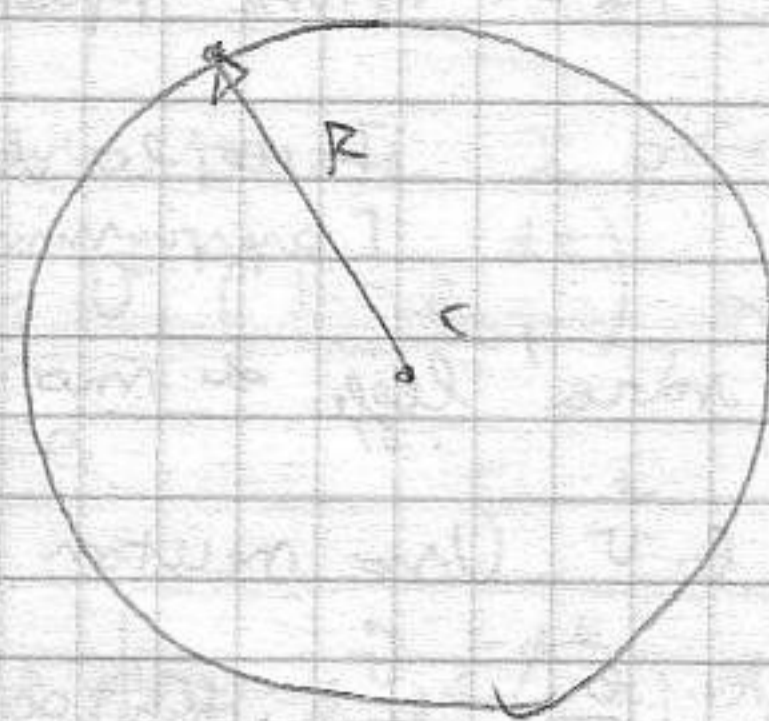
Qual è  $F$  della Terra in di noi. | Supponiamo sfera, lo  $F$  simultaneo  
 si può pensare in relazione a  $C$  [p. b

matriciale che contiene tutto  $\Pi$ ] quindi

$$F = G \frac{\Pi \cdot M}{R^2}$$

si può applicare (non è  
 trascurabile e non concentrato, ma

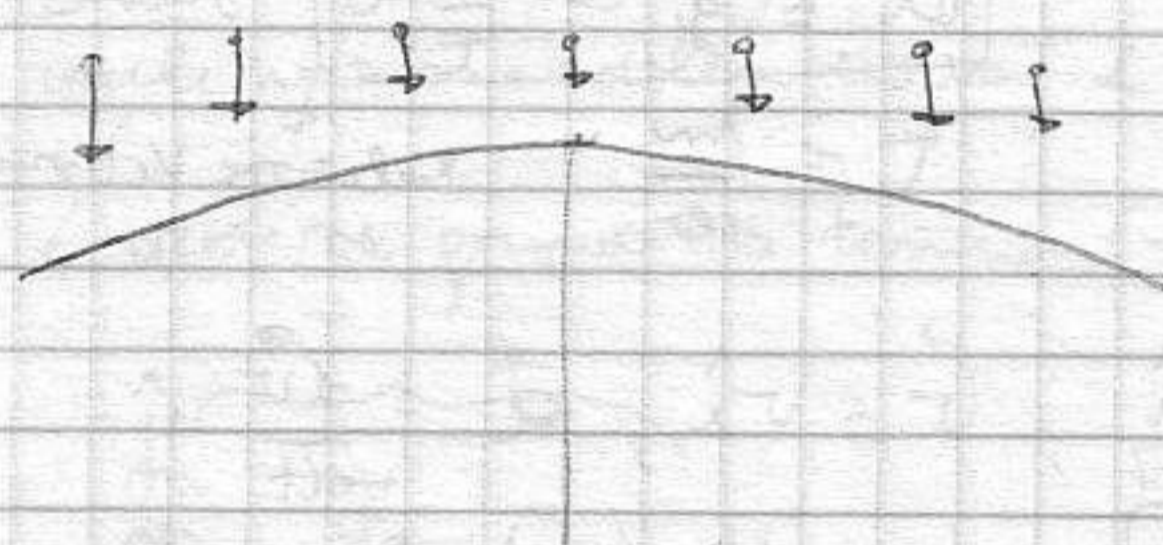
molto appross. e sferica, x simmetria si può fare).



$$F = \Pi \frac{6.7 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ N}}{6.4 \cdot 10^6} = 10 \Pi \text{ (N)} \rightarrow \text{Se oggetto è posto in sup. terrestre, lo } F \text{ si ottiene dal centro della}$$

Terra e'  $g$  (derivata direttamente dal tipo di interazione gravitazionale)

Anche noi "abbiamo" la Terra, ma è trascurabile



[per trascurabile]  $\rightarrow$  Un punto  
 materiale di  $\Pi$  kg posto in vicinanza  
 della superficie, subisce una  
 $F$  gravitazionale:  $\vec{F}_g = M \vec{g}$   $\rightarrow$

specifico la natura della forza. Per conoscere il modo del punto, uno

è p. abim, poiché  $\vec{F} = (m) \vec{a}$ , ma invariabile, al posto di  $\vec{F}$  (e  
 punto è soggetto solo a  $\vec{F}_g$ ) immette formula:  $\Pi \vec{g} = m \vec{a}$

[Non è detto che  $M$  [massa gravitazionale] e

uguale  $m$ , invariabile.  $m$  è caratteristica INTRINSECA corpo, mentre  $M$  dipende

da legge di Newton. In realtà sperimentalmente coincidono  $\Rightarrow$

entrambe si definiscono  $G$  [m]

$$m \vec{g} = m \vec{a} \Rightarrow \text{l'accelerazione a cui è soggetto è } \vec{g}$$

4

$\vec{F}_g = m \vec{g}$  (nel vuoto). Come accade immerso in

un fluido | Se posto in fermo con l'azione di  $\vec{F}_g$  e del mezzo non



altro moto rettilineo uniforme. Oltre a  $F_g$

è presente  $F_a$  di verso opposto a  $\vec{g}$  /  $F_a = -\frac{b}{c} \vec{v}$

tutte le varie interazioni complicate  
[approssimabile per basse velocità]

Quale sarà legge di moto?  $\vec{F}_{tot} = \vec{F}_g + \vec{F}_a =$

$m\vec{g} - b\vec{v}$ . Uno newton  $m\vec{g} - b\vec{v} = m\vec{a}$  (divido per la massa)

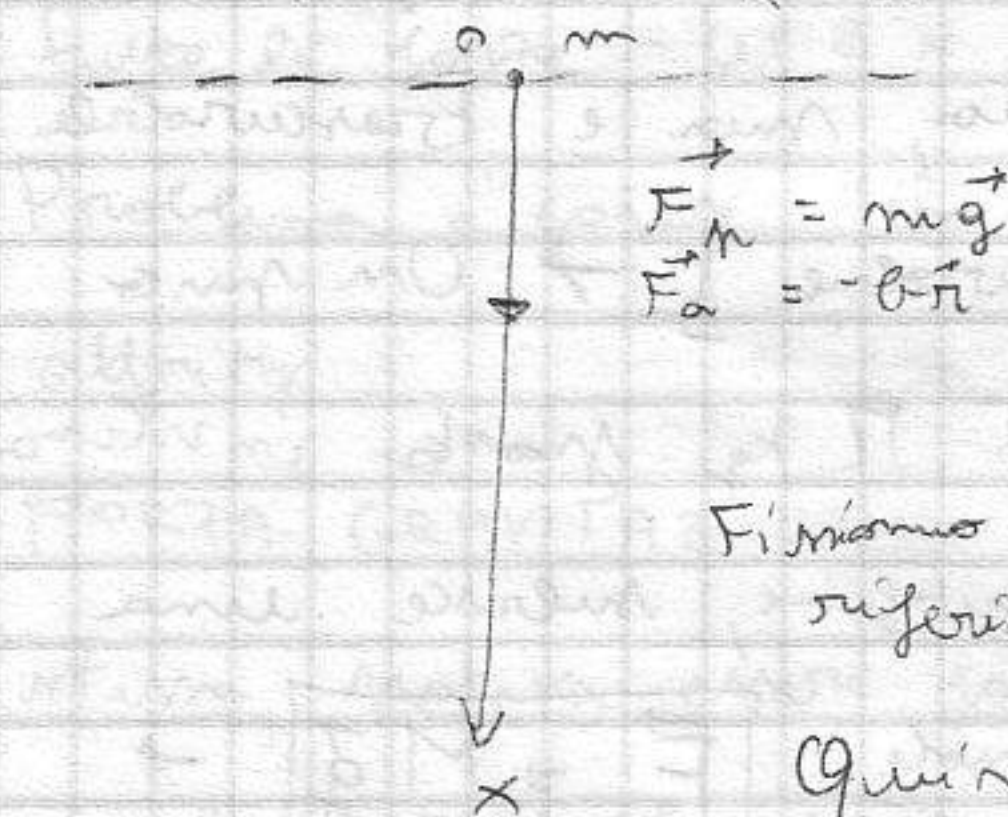
$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{b}{m} \vec{v} \rightarrow \text{dip. da massa e b}$$

in parte con  $\vec{a} = \vec{g}$ , ma aumentando  $b$  aumenta resistenza + diminuisce

$\vec{a}$  (sempre  $\vec{v}$ , velocità cresce sempre di meno, tende a diminuire fino a stabilizzarsi a  $v = k \rightarrow$  [eq. differenziale]).

27 - 1 - 2005

[MOTO ESPONENZIALE]



$$\vec{F}_g + \vec{F}_a = m\vec{a}$$

$m\vec{g} - b\vec{v}$   
oppo a  $\vec{g}$

Div. per m si ha

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{1}{\tau} \vec{v} \quad \text{dove}$$

$$\tau = \frac{m}{b} \quad \text{Relazione Vettoriale}$$

Fissiamo sistema  
riferimento

$$\vec{g} = g \hat{i}, \quad \vec{v} = v \hat{i}, \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{i}$$

Qui moltiplico  $\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{\tau} v$   $\rightarrow v = v(t)$  è l'incognita  
[eq. differenziale 1° ordine lineare]

Fissiamo condizione iniziale

$$v(0) = 0$$

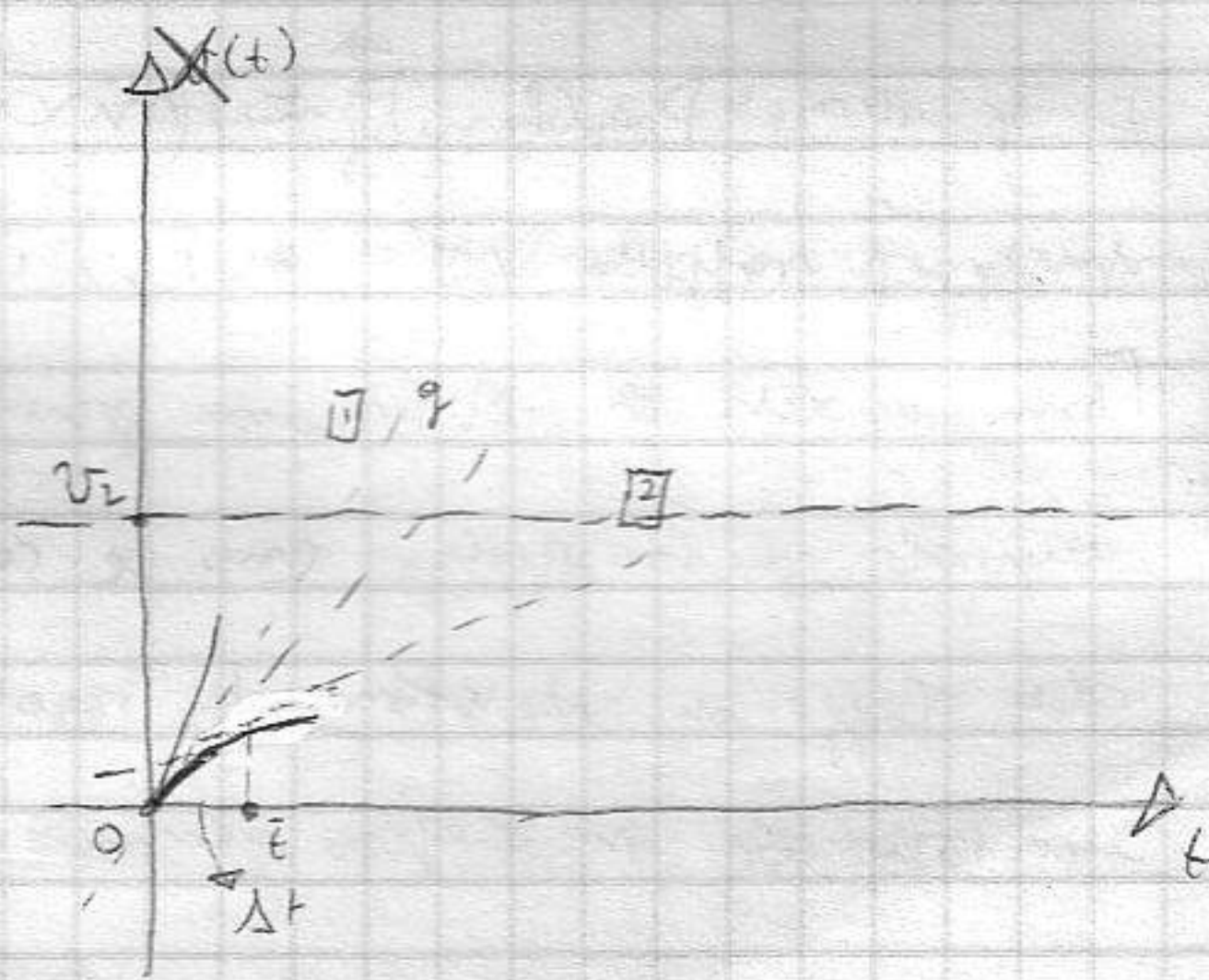
$\Rightarrow$  PROBLEMA DI CAUCHY

Posso inserire  $v(0)$  nell'equazione;

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \dot{v}(0) = g \rightarrow \text{tan. di grafico}$$

Per maggiore concavità calcolo  $\ddot{v} = -\frac{1}{\tau} \dot{v}$ ,  
dove  $\dot{v}$  (sempre  $> 0$ ), quindi  $\ddot{v} = -\frac{1}{\tau} g$

che è  $< 0 \Rightarrow$  concava / Posso costruire  
tutte le approssimazioni alla curva.



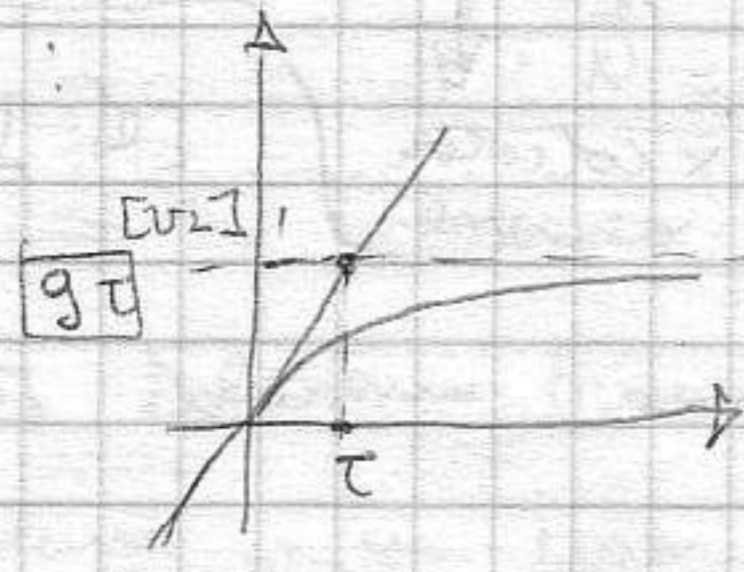
Concavità era intuitiva; per un  $\Delta t$  la pendenza curva è  $k \rightarrow$  la approssimo  
alla tang. In  $t = \Delta t$  la  $v$  è  $g\Delta t$ .  $v$  in  $\Delta t = g - \frac{1}{\tau} g\Delta t \rightarrow g(1 - \frac{\Delta t}{\tau})$ . Conoscendo

24) scelta [2] e noto che pendenza diminuisce sempre di più, fino ad  
una  $v_2$  di moto in cui moto è uniforme  $\Rightarrow$  curva  $\rightarrow v_2$  (asintoto)

Per la verifica matematica si tenta di indovinare  $v(t)$ . [non sempre si riescono a risolvere le eq. diff  $\rightarrow$  si approssimano] . Ex:  $e^{-x}$  ( $e^{-at}$ )

$v(t) = 1 - e^{-at}$

Si tenta di approssimare a  $f(x)$  già note



Moltiplica per  $v_2$  e ottengo  $v(t) = v_2 (1 - e^{-at})$ , andomando simile.

Calcoliamo  $\dot{v}(t)$   $\rightarrow v_2 d(1 - e^{-at}) = \frac{dv}{dt}$

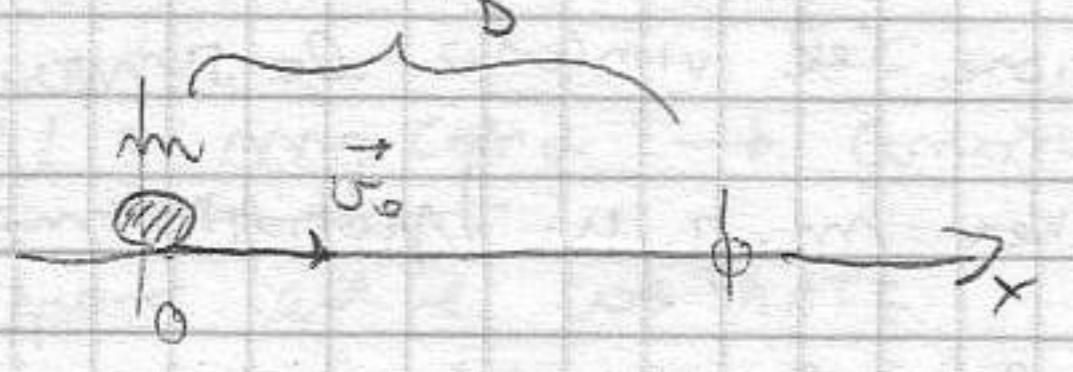
$v_2 \cdot a = v_2 - v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = v_2 a - a v$ . Pongo  $a = \frac{1}{\tau}$ ,  $v_2 a = g$ , ho trovato soluzione  $\rightarrow$

$v(t) = g\tau (1 - e^{-t/\tau})$  [v: -30 mm]

Poichè è soluzione nota è l'UNICA.

Importanza di  $\tau$ ; tg. grafico in 0 incontra asintoto in  $\tau$ ;  $> \tau$ ,  $> e$  è l'inclinazione della curva,  $< \tau$ , la curva si avvicina ad  $am$  e asintoto.

$\tau$  è solitamente piccolo tempo. (ex: 3T è tempo limite)



Ex: moto p. materiale su un piano liscio attrito in aria (fluido). È presente  $F_a = -b \cdot v$

Nota legata a leggi dinamiche, quindi

$F_a = -b \cdot v = m \cdot a$ , dove  $a = -\frac{1}{\tau} v$

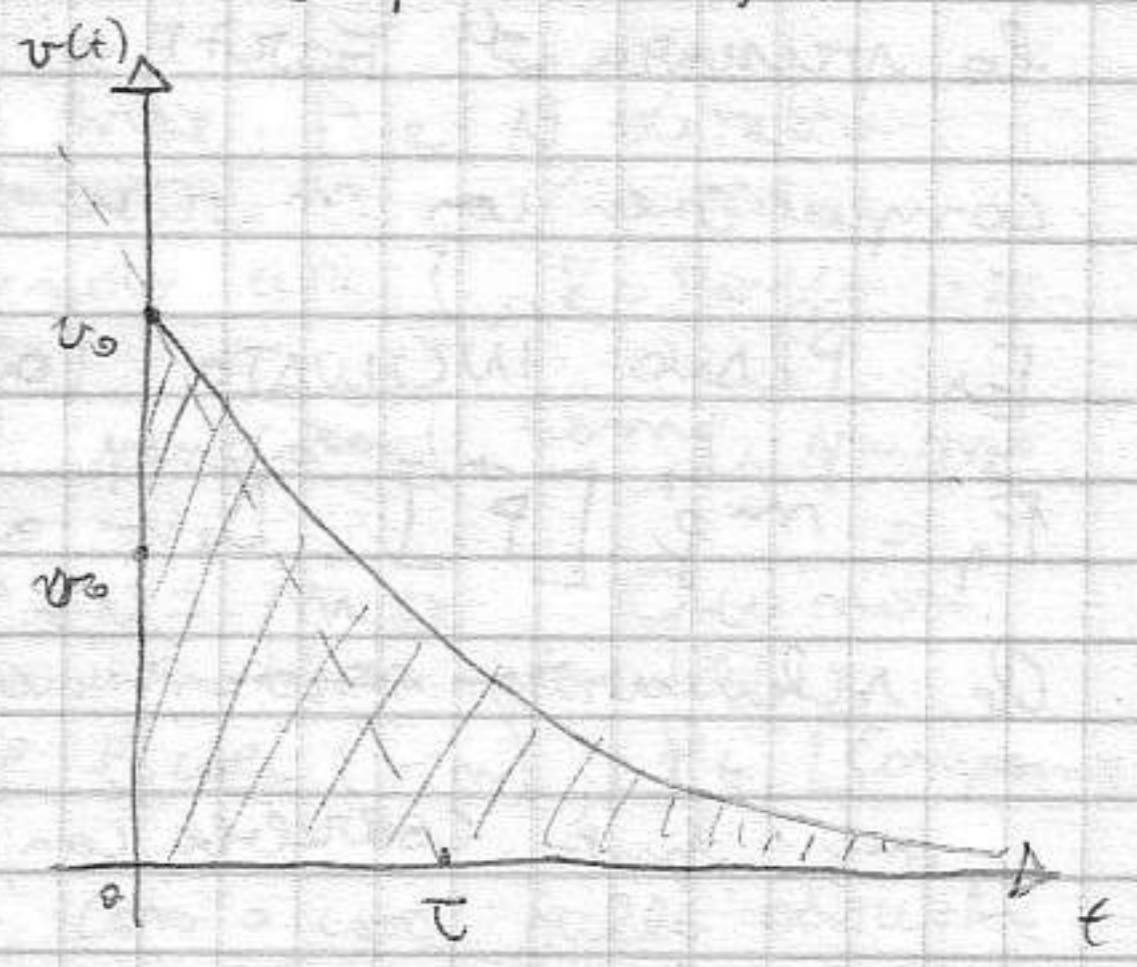
[moto decelerato, ma non uniformemente]

A dispetto di  $v$  de (SMBIA);  $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau} v$

( $F_a$  è forza di resistenza passiva

si oppone al moto).  $v_{lim}$  nota 0. Pendente

nota  $v_0$ ,  $t$  [in 0]. Formule solvere può essere  $v(t) = v_0 \cdot e^{-t/\tau}$



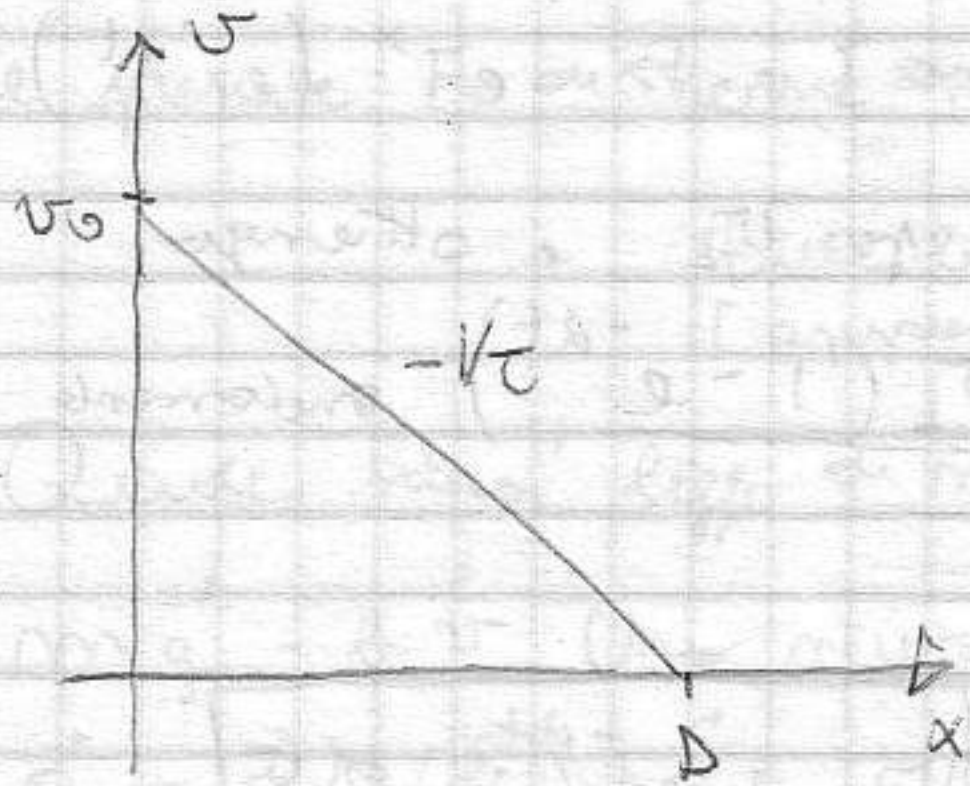
Palla si muove e si ferma dopo un  $t = \infty$  percorrendo  $D$ . Poi in

teoria impiega  $t$  finito (è modello sbagliato, è approssimazione).

$v = \frac{dx}{dt}$ . Quindi  $x$  dopo  $dx$  devo fare l'integrale. Cerchiamo per

relazione tra  $v$  e  $x$ ,  $v = -\frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt}$ , derivato per  $dx$  e ho  $\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\tau}$

ipotesi costante  $v(x)$  (non puo' essere f(tempo) ma f(spazio percorso))



si ha scelta, quindi

$$D = v_0 \tau$$

Trucchi x calcolo  $\int \frac{dx}{v}$

MOTO ESPONENZIALE (o MOTO CON ATTRITO VISCOZO) - IMPORTANTE!

Prendiamo punto materiale in movimento.

molto e' azione della forza peso. Se volessi

una traiettoria del tipo

VINCOLO il moto

(ex: ferro su cattedra) + seria un moto vincolato; analisi dei moti vincolati

e' importante (strag. > di moti). Come rappresentare azione vincolo?

Noi imponiamo  $\vec{v}$  costante  $\rightarrow \vec{F} = \vec{p} \Rightarrow$  l'azione del vincolo lo rappresenta

Come sist. forze  $[\vec{N}]$  e' contraria a  $\vec{F}_p$  x avere m.r.u. Ipotesi

la presenza di FORTE di REAZIONE in modo che  $\vec{F}$  totali sist. siano

compatibili con m.r.u.

Ex: PIANO INCLINATO (azione della  $F_p$ )

$\vec{F}_p = m \vec{g} [\vec{P}]$ , Devo avere sist. forze

che schematizza azione vincolo. In assenza

si imb, punto cadrebbe con  $\vec{a} = \vec{g}$ . Nota

fero avviene in dir. inclinata. Come nota  $\vec{a}$ ? Errore dir. rettilinea,

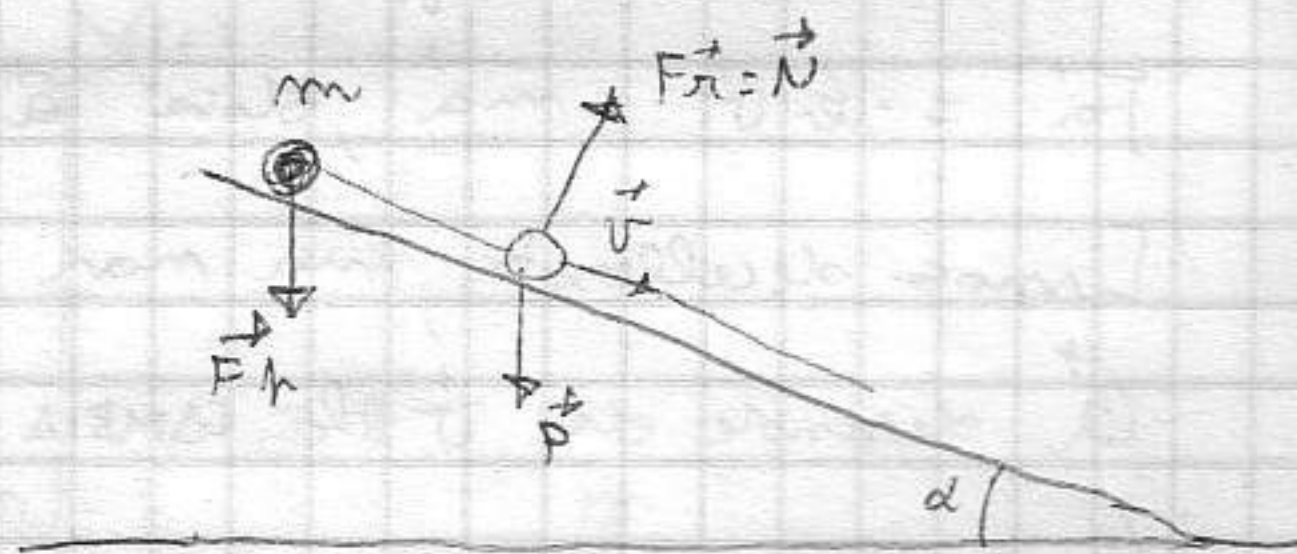
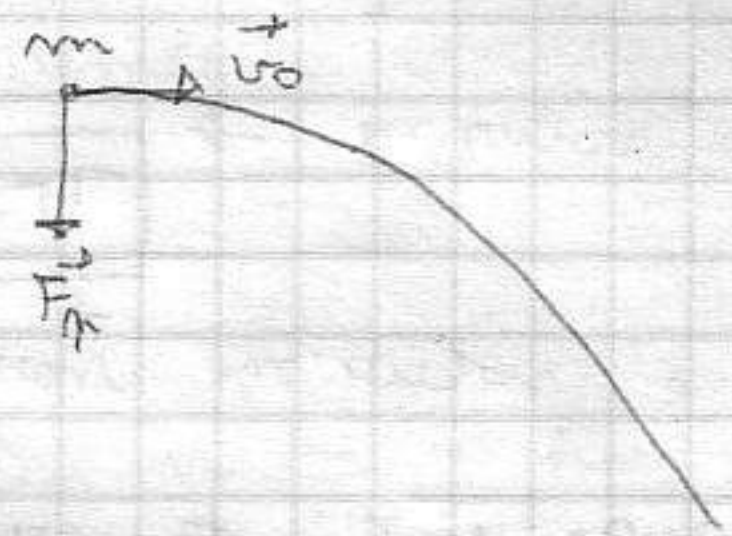
$\vec{a}_m$  (componente normale)  $\Rightarrow \vec{a}$  e' diretta tangenzialmente,  $\vec{F}$  reazione deve

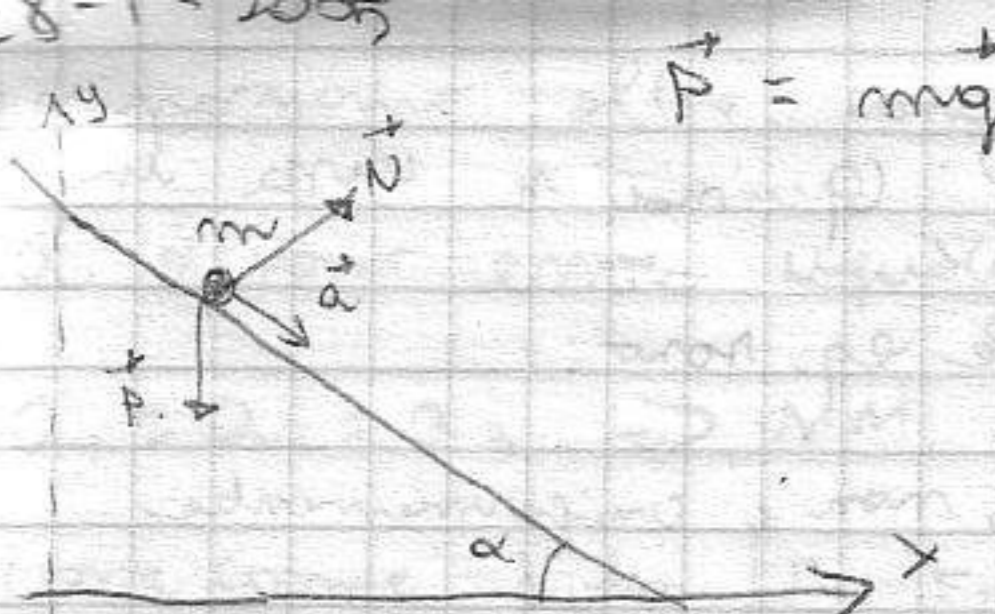
essere  $\perp$  a dir. (vincolo impedisce al punto di cadere). Sistema di  $\vec{P}$  e  $\vec{N}$  e'

effetto combinato  $\vec{P}$  e  $\vec{N}$ ; x applicare l' legge dinamica  $\Rightarrow \vec{F}_p + \vec{N} = m \vec{a}$

(2)  $\vec{N}$  e' modo matematico x scrivere vincolo). Insieme al principio delle

scrivere legge di moto.





$\vec{P} = m\vec{g}$  (comodo a riammettere reazione vincolare in  $N$ )

Se vincolo è liscio,  $\vec{N} \perp \text{dir.}$   $\Rightarrow$  possiamo scrivere

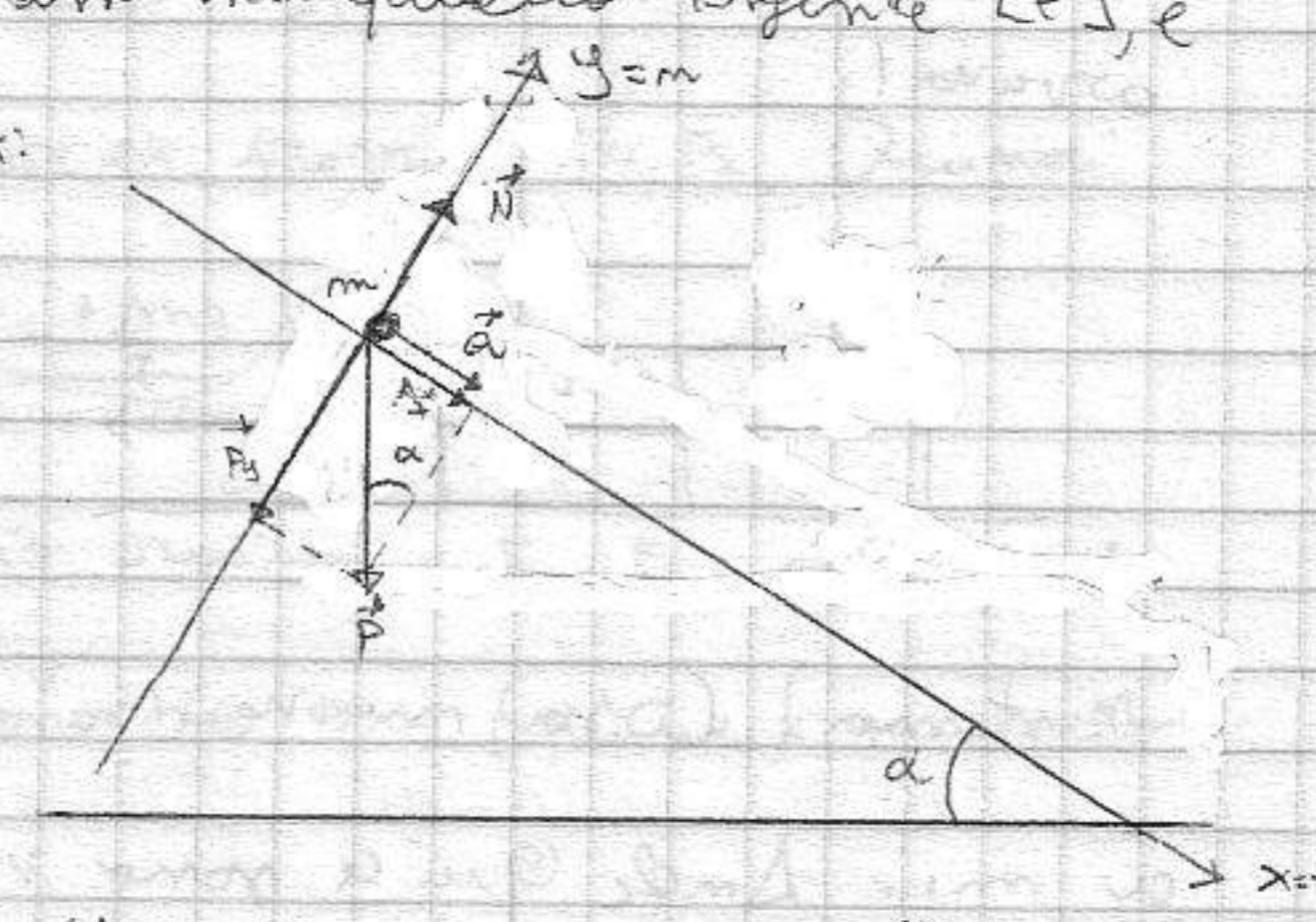
$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$ ;  $\vec{a}$  è puramente tangenziale

essendo molto sottile!!! [ $a_n$  è legata ESCLUSIVAMENTE alla CURVATURA]

Dobbiamo trovare int. sup. x scomporre vettori. Conviene riferirsi ad un sistema in cui uno degli assi sia quello tangente  $[t]$ , e l'altro quello normale  $[n]$ . Sol ex:

x  $\rightarrow P_x = P \sin \alpha$  ( $mg \sin \alpha$ );  $N_x = 0$ ;  
 $a_x = m a_t$

y  $\rightarrow P_y = -P \cos \alpha$  ( $-mg \cos \alpha$ );  $N_y = N$ ;  
 $a_y = m a_n$   $\rightarrow$  qui è 0

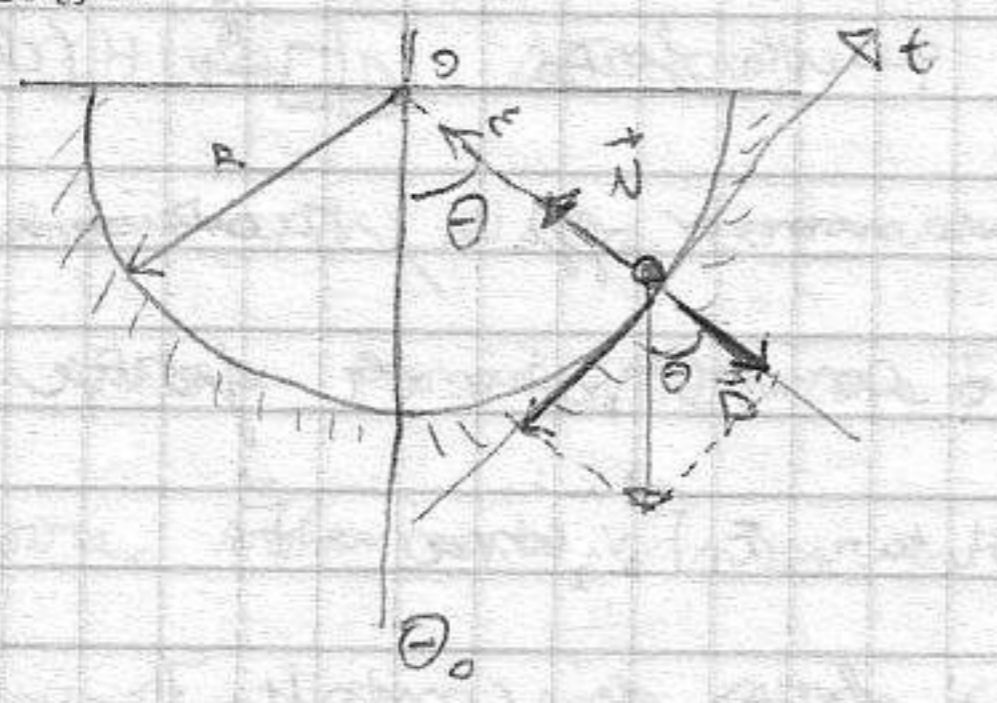


Componente in  $x$ :  $mg \sin \alpha = m a_t$ ;  $y$ :  $-mg \cos \alpha + N = 0$

Dividendo per  $m$ :  $a_t = g \sin \alpha \rightarrow$  Variabile inclinazione piano vuol dire accelerazione, fissa, ma rimane moto unif. accelerato [ $a$  cambia con  $\alpha$ , ma rimane costante]

$N = mg \cos \alpha \rightarrow$  conosciamo valore reazione vincolare esplicata sul piano, ed è COSTANTE

(altro modello)



Polo e rotazione 2 forze;  $\vec{P}$  e  $\vec{N}$  diretta cont. verso O [movimento circ.];  $R =$  raggio circ. [modello simile al pendolo]. Comp. primo, uniamo]  $\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$  [Qui non possiamo pensare un assi tangente e uno normale] fissiamo un int. sup. locale  $(t, n)$ ;  $P_t$  [Componente lungo dir. tangente]  $= mg \sin \theta$  ( $\downarrow$ )  $= m a_t$ ;  $P_n$  [Componente normale m]  $= -mg \cos \theta$  ( $\downarrow$ )  $+ N = m a_n$ ;  $\rightarrow$  loro uguale a prima MA  $\theta$  è angolo de

$-mg \cos \theta + N = m a_n$   $\rightarrow$  loro uguale a prima MA  $\theta$  è angolo de

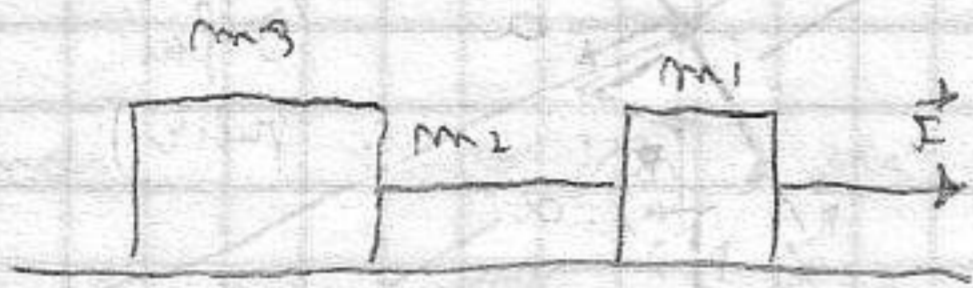
Usata ( $\alpha$  era costante) e inoltre  $a_n \neq 0$ ; con il vincolo  $\vec{N}$  c'è proprio la formazione di  $a_n$  [vincolo due moti circolari] [tenendo quindi traiettoria circolare,  $a_n = \frac{v^2}{R}$ ];  $\left[ a_t = -g \sin \theta ; N - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{R} \right]$

Attento a impostare bene le reazioni vincolari!

Partire punto partiamo descriverlo tramite  $\theta$ ; quindi a cura un RIFORMULAZIONE AUCORRE e si misurano angoli. Ma le eq. sono:

•  $a_t$  è opposta a  $a_{nr}$  e dipende da  $\theta \rightarrow$  moto non è uniformemente accelerato! Non so che fare.

• In un punto (ex  $\theta=0$ ) ho  $N - mg = \frac{mv^2}{R}$  ma  $\rightarrow$  devo sapere la  $v$  con cui arriva!



$m_1 =$  locomotiva,  $m_2 =$  punto di traino,  $m_3 =$  vapore

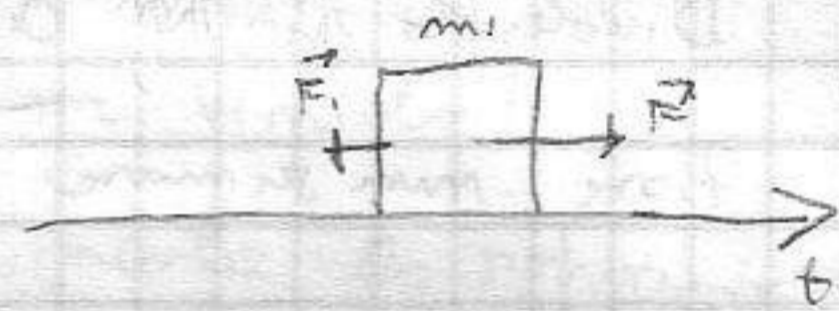
Applichiamo  $\vec{F}$  (traiettoria rettilinea, non considero per). Come si muove il

sistema (cosa muove  $m_3$ )  $\vec{F}$  è esattamente  $\vec{F}$ . In realtà  $\vec{F}$  è applicata

a  $m_1$ . Anche qui ci sono vincoli [punto e locomotiva sono solidali.] Come

stapparentare vincoli) Supponiamo  $\square$  solo locomotiva con  $\vec{F}$ , sarebbe moto

rettil. accelerato, dove  $\vec{a}_1 = \vec{F}/m_1$ ; però in



realtà traino si muove tutto.  $\square$  forza che  $\rightarrow$

a rallentare sistema ( $\vec{F}_1$ ), azione dei ferri connessi a locomotiva  $\rightarrow$

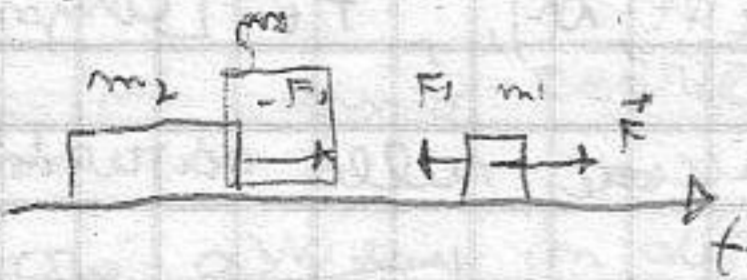
legge di moto è  $\vec{F} + \vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1$ , quindi  $F - F_1 = m_1 a_1$ .  $m_2$  e  $m_3$

sono connessi a  $m_1$ , quindi su  $m_2$  c'è questa forza  $\square$   $\vec{F}_1$  (che è

l'effetto delle locomotive). Azione  $m_1$  è trainamento opposto, reazione è  $F_2$

3° PRINCIPIO DI NEWTON: sistemi interagiscono con coppia di forze

uguali e contrarie. Quindi primo interpretare  $F$  su  $m_2$  come  $-\vec{F}_1$

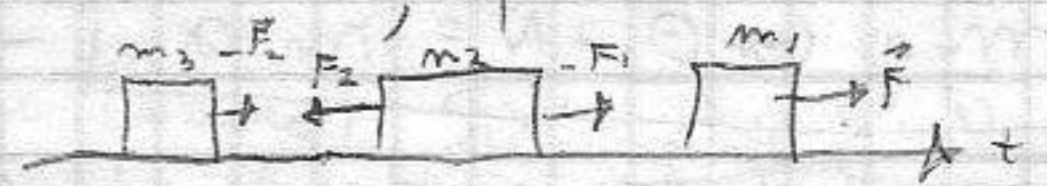


[interazione tra sistemi, forze di contatto]

L'eq. di moto di  $m_2$  è  $-\vec{F}_1 = m_2 \vec{a}_2$ . PERÒ!

$m_2$  è connesso a  $m_3$  tramite altro vincolo di contatto quindi:

$\vec{F}_2$  è  $-\vec{F}_1$ , quindi legge di moto  $m_2$  è  $\square$



$-\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m_2 \vec{a}_2$ ,  $-\vec{F}_1$  essendo concesso a  $t$ , dove modulo  $F_1$  [ $F_1 = |F_1| = |-F_1|$ ]

28  $\vec{F}_2$  è verso opposto, quindi è  $-\vec{F}_2$ . Eq. finali:  $\begin{cases} F - F_1 = m_1 a_1 \\ F_1 - F_2 = m_2 a_2 \\ F_2 = m_3 a_3 \end{cases}$  (sint con 3 eq. e 6 inc.  $\rightarrow$  ind.)

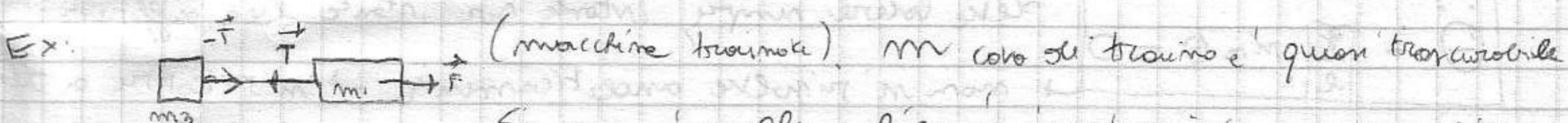
Imponiamo altre condizioni; se i moti devono essere uguali, le  $\vec{a}$  devono essere uguali.  $\rightarrow$  Velocità le stesse (summo in attacco), quindi  $a_1 = a_2 = a_3 \Rightarrow$  int. 6 eq. e 6 incognite  $\rightarrow$  isolando con "a" accelerazione come,

si ha  $[F_0 - F_1 = m_1 a; F_1 - F_2 = m_2 a; F_2 = m_3 a]$ . Sommando membro a membro si ha  $F = (m_1 + m_2 + m_3) a \Rightarrow a = \frac{F}{(m_1 + m_2 + m_3)}$

Sistema si muove come se fosse un corpo solo. Si entra nel dettaglio dei vincoli e conosciute o ex. propri  $F_1, F_2$ . Quindi

se voglio  $F_1$  impongo  $F_1 = F - \frac{m_1 F}{m_1 + m_2 + m_3} = \left( \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right) F + a$

Consideriamo  $F_1 - F_2 = m_2 a$ ,  $m_2$  è forza trainante e  $F_1, F_2$  sono gli scambi tra sistemi. Sono  $\leftrightarrow$ , perché dipendono da  $m_2$  (quindi si muove e mi occorre la forza).

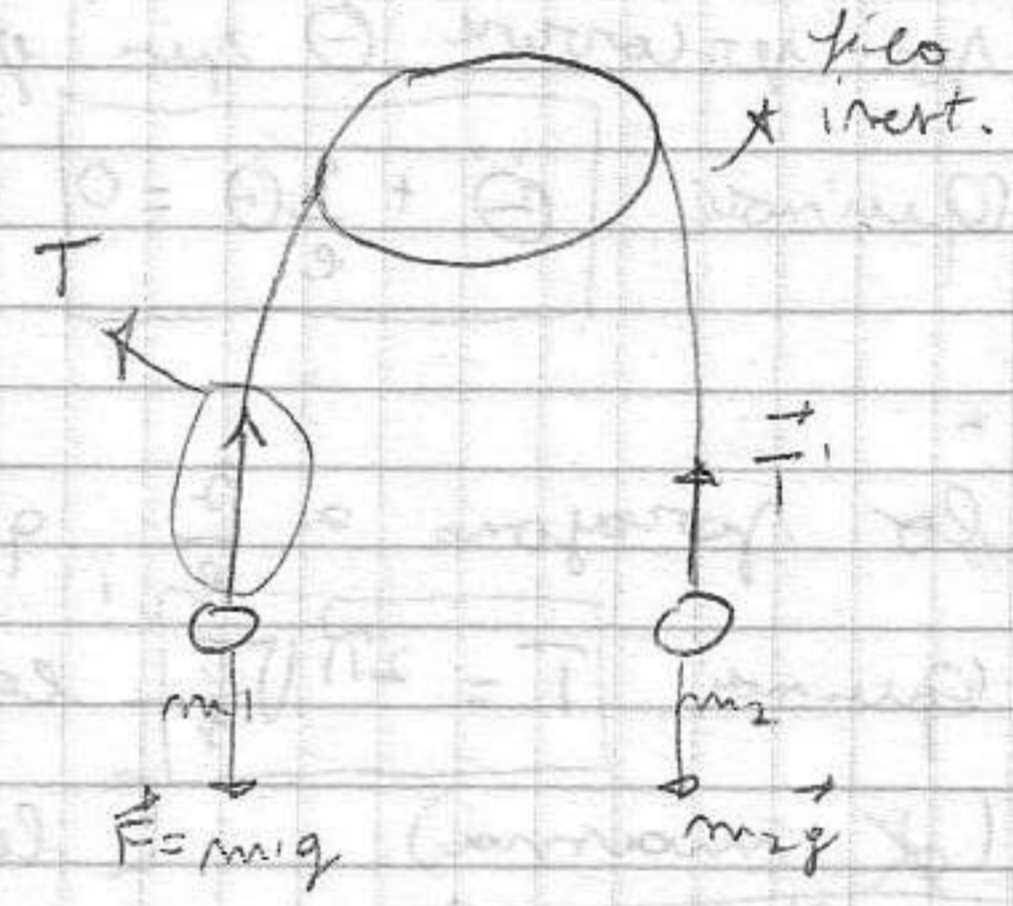


Se  $m_2$  è nulla e filo è inestensibile, posso dire semplicemente che la forza sulla  $m$  trainata è la TENSIONE del filo  $[T]$

$\rightarrow$  la tens. mi trasmette INTEGRALMENTE tramite il filo (olte errore inestensibile e mantenere modello realistico) e quindi  $F - T = m_1 a$  e  $T = m_2 a$

MACCHINA DI ATWOOD (unite e collegate g)

Abbiamo  $m_1$  e  $m_2$  connesse con un filo che passa tramite carrucola [fissa; filo



non sono rotante senza attrito],  $m_1 > m_2$ ,  $m_1$  scende e  $m_2$  sale. Come collegate a / le

responsabile di forza gravita,  $T$  è spinta

gli 2' massa;  $\rightarrow m_1 g - |T| = m_1 a$  (accelerazione sistema)

La 2' massa sale, ma c'è azione  $F_g$  +  $m_2$  sale a causa di  $T$ .  $m_1$  porta (2) tramite filo, c'è tensione.  $\rightarrow T' - m_2 g = m_2 a$ , parti filo è

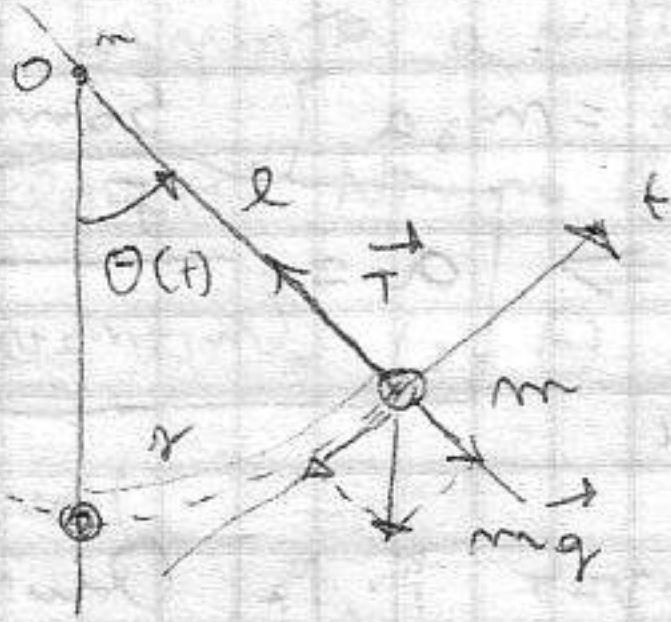
inert. e di  $m$  traino si ha  $T = T'$  e  $a$  è la stessa. Sommando si ha

(29)  $(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$ . Quel è la

# Tensione del filo [19P].

02-2/2005 (vedi  $\otimes$  ex.)

## NOTO DEL PENDOLO SEMPLICE (moto oscillatorio)



$\Theta(t)$  indica la posizione del pendolo, si applica sempre 2 principi.  $[\vec{T} + \vec{P} = m \vec{a}]$  Fissiamo un sist. coord. locale; proiettando  $T$  su  $t$  ho  $0$ ; proiett.  $P$  ho  $-T_x$ ; quindi:

$$\begin{cases} t = -mg \sin \Theta = m a_t & \text{proiettando su } m \text{ ho} \\ m = T - mg \cos \Theta = \frac{mv^2}{l} & \text{Per il momento angolare } \boxed{a_t = -g \sin \Theta} \end{cases}$$

Spartia traiettoria  $[r + lunghezza\ arco : R(t) = l \Theta(t)]$ ; quindi

$a_t = \frac{d^2 R}{dt^2}$ , quindi  $\boxed{a_t = l \ddot{\Theta}(t)}$ . Per il pendolo semplice

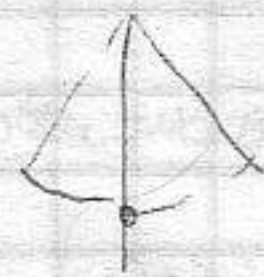
$$\boxed{\ddot{\Theta} + \frac{g}{l} \sin \Theta = 0}$$

che vale sempre, intanto per intanto (eq. differenziale) non si risolve analiticamente  $\rightarrow$  si ricorre a delle

approssimazioni  $\rightarrow$  si studia molto per "piccole oscillazioni". Quando

si parte dal minimo,  $a_t = -a$

posizione di lancio. Se moto



il tempo di periodo stabile viene LUNGO, considero le

oscillazioni intorno all'equilibrio;  $\rightarrow$  allora  $T$  [periodo]  $\rightarrow$  a quello

per piccole  $\Theta$  piu grande. - Se  $\Theta$  sono suff. piccole  $\sin \Theta \approx \Theta$

quindi  $\boxed{\ddot{\Theta} + \frac{g}{l} \Theta = 0}$ , se al posto di  $\Theta(t)$  prendo  $A \cdot \sin(\omega t)$ ,  
 $\ddot{\Theta} = -A \omega^2 \sin \omega t = \boxed{-\omega^2 \Theta}$  Per avere  $\omega^2$

lo paragono a  $\frac{g}{l}$ , quindi  $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$  (il periodo e'  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ),

quindi  $\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}$  basta allungare il pendolo per cambiare molto

(a marea). [leggere tra  $f(x)$  trigonometriche e  $\exp[i^x = \cos x + i \sin x]$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0} \text{ con } \pi = 0 \rightarrow \text{contiene tutte le } k \text{ fondamentali della matematica}$$

31. MOTO ARMONICO SEMPLICE
33. ATRITO
34. MV - STATICO
35. MD - DINAMICO
36. ENERGIA CINETICA / LAVORO
37. TM LAVORO ED ENERGIA CINETICA
39. ENERGIA POTENZIALE / ELASTICA / GRAVITAZIONALE
40. ENERGIA MECCANICA / PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA
41. LAVORO F. CONSERVATIVE / NON CONSERVATIVE
42.  $F = -\frac{dE_p}{dx}$  / SISTEMI DI P.TI INTERIORI / F. INTERNE - ESTERNE
43. CENTRO DI MASSA
44. DENSITA' DI MASSA
46. EQ. MOTO C.M. / QUANTITA' DI MOTO / 1' EQUAZIONE CARDINALE DEI SISTEMI / PRINCIPIO CONSERV. DI  $\vec{P}$
47. CORPI RIGIDI / TRASLAZIONE
48. ROTAZIONE / ROTOTRASLAZIONE / GRADI LIBERTA'
49. MOMENTO DELLA FORZA / MOMENTO DI  $\vec{P}$  / MOMENTO ASSIALE  $\vec{F}^{(a)}$  / MOMENTO ANGOLARE
50. 2' EQUAZIONE CARDINALE DEI SISTEMI
51. MOMENTO DI INERZIA
52. TEOREMA DEGLI ASSI // [HUYGENS-STEINER]
54. MACCHINA DI <sup>ATWOOD</sup> ~~HELVET~~ MODIFICATA / EQUILIBRIO DEI CORPI RIGIDI
58. EQUILIBRIO STABILE / INSTABILE



MOTO ARMONICO SEMPLICE p.to mat. moto unidim.

$\vec{F} = -kx \hat{i}$  [forza POSIZIONALE - dip. da posizione]



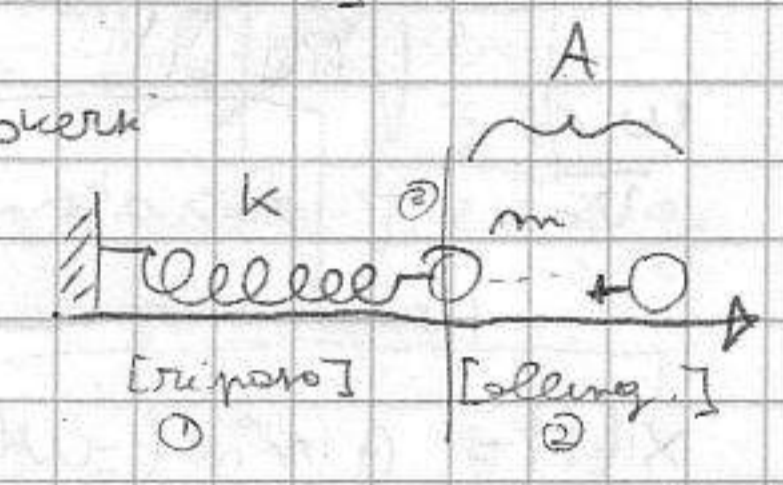
anche F. gr. gravita' ] - modello semplice forza elastica. (ma non vale sempre, ex m. tiso troppo la molla). Segno "-" indica F. si richiamo e "k" e' la COSTANTE ELASTICA della MOLLA (N/m). Applicando 2° principio,

$m\vec{a} = -kx \hat{i}$ ; essendo moto unidimensionale,  $\vec{a} = \hat{i} \ddot{x} \Rightarrow m \ddot{x} = -kx \rightarrow$

$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$  (EDO 2. ord.)  $\rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$   
 $\omega^2 = \text{rapp. di cost. prop.}$

① riposo ② allungo certa q e lascio andare - inizia a muoversi

verso ① strada in ③ con una certa V, F=0 ma prosegue oltre e



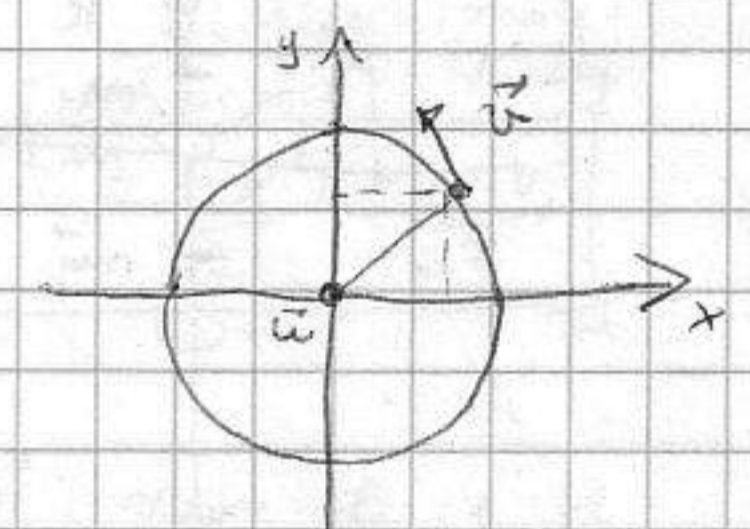
moto poi e' accelerato da kx che riporta verso il centro, quella

[oscillazioni intorno a pos. equilibrio] Quindi x(t) varia "periodica"

$x(t) = A \sin(\omega t)$  Controllo:  $\dot{x} = A\omega \cos \omega t \rightarrow \ddot{x} = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x$

Scegl'vol  $\omega = \beta = \omega$  quindi  $x(t) = A \sin \omega t$ ; ( $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ) - x(t) e' F(x)

PERIODICA e periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Moto os. legato a m.c.u.



(proiezione) moto su un' coordinata  $\rightarrow$  moto con la stessa  $\omega$ ; e' "legato" a moto di punto m. su circonferenza

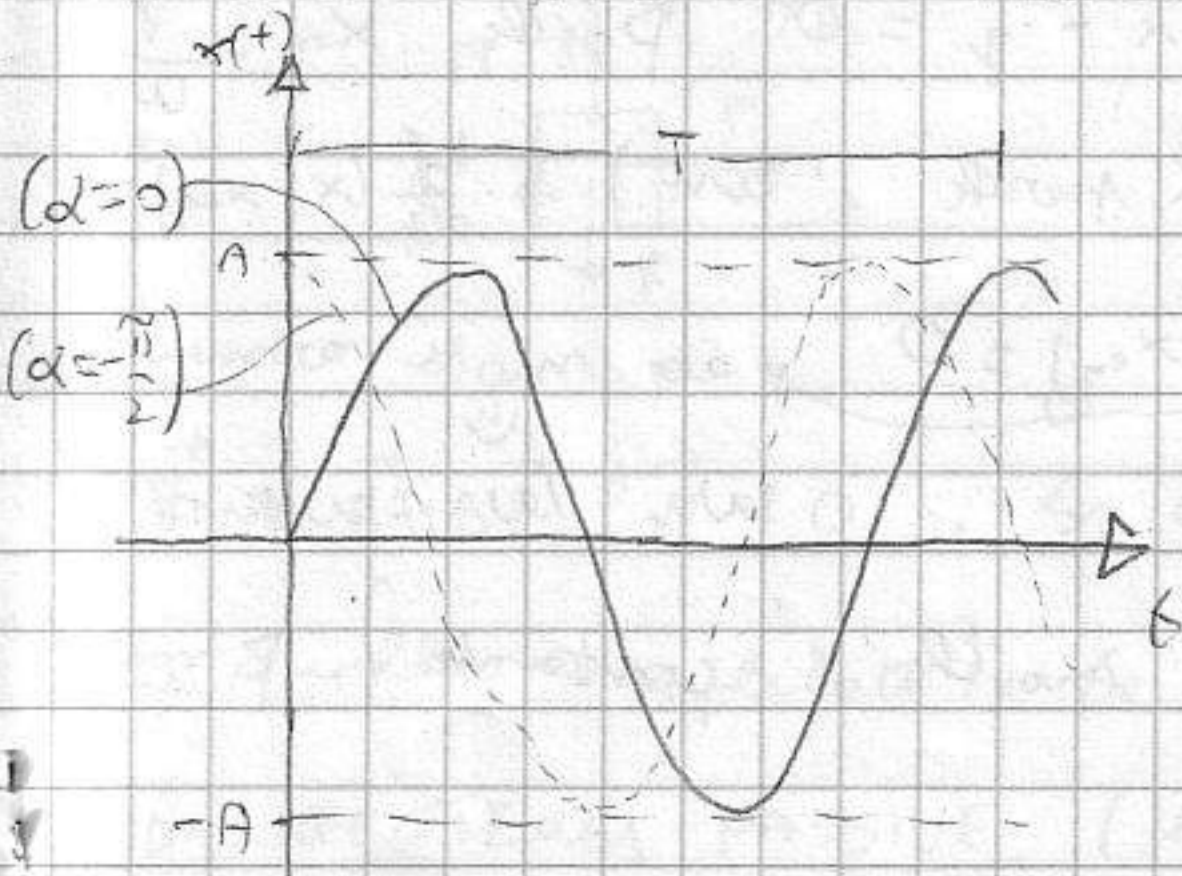
[grandezze con significato  $\leftrightarrow$ ] - p.to mat. oggetto a F. elastica e' caso semplice

(se avessi scelto  $x(t) = A \cos \omega t$  avrei avuto  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ ; avrebbe sostituito)

quindi ex.  $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$  sol. generale (o int. gen.) dell'eq. sul P.A.

L'unico parametro e'  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  e' legato alle freq. delle oscillazioni (m oppure inverta, k e' entita' F.), mentre la soluzione generale contiene 2 parametri,

A e  $\alpha$  di  $x$  nell'EDO. A cosa sono legati? (grafico:  $A \sin \omega t$ )



Situazioni si sono risolte da stessa eq.

(Costanti sono legate al tipo di cond. in.

(posizione e V in  $t=0$  - arbitraria).

A: poiche' sin e' limitato da -1 e 1, x e'

limitato da A e -A, quindi e' la mx

distanza dal centro oscillazione (AMPIEZZA OSCILLAZIONI)

[cond. iniziale moto]

Es:  $\begin{cases} X(0) = X_0 \\ V(0) = V_0 \end{cases}$  Voglio A e d in f(x) di  $X_0, V_0$ . Se vogliamo legge del moto e la forza e si impone nel 2° principio termodinamica

(che contiene  $\ddot{a} = \ddot{x} \Rightarrow$  si avra' sempre una EDO 2° ord.)

$V(t) = \dot{X} = A \omega \cos(\omega t + d)$  Sostituendo  $t=0 \rightarrow X(0) = A \sin d = X_0$  - eq. n.1

$V(0) = A \omega \cos d = V_0$  (perche' si e' A e d). Elimino d dalle eq.

$\sin d = \frac{X_0}{A}$ ;  $\cos d = \frac{V_0}{A \omega}$  (quadrato e sommo)  $1 = \frac{X_0^2}{A^2} + \frac{V_0^2}{\omega^2 A^2}$

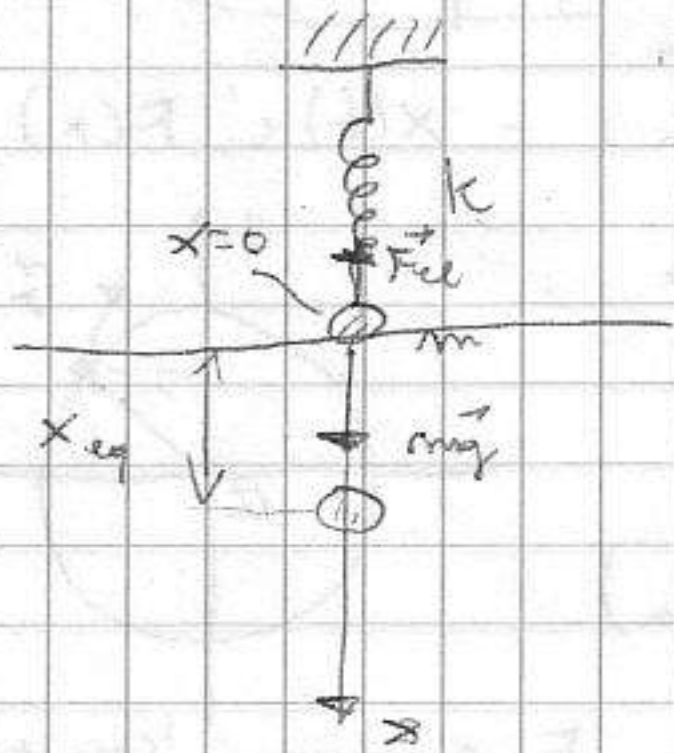
$A^2 = X_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2} \rightarrow A = \sqrt{X_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}}$  Dividendo eq.  $\tan d = \frac{X_0}{A} \cdot \frac{A \omega}{V_0} = \frac{\omega X_0}{V_0}$

$\tan d = \frac{\omega X_0}{V_0} \rightarrow d = \arctan\left(\frac{\omega X_0}{V_0}\right) \rightarrow$  si puo' usare altro metodo.

$X(t) = A \sin(\omega t + d) = A \sin \omega t \cos d + A \cos \omega t \sin d \Rightarrow \frac{X_0 \cos \omega t}{\omega} + \frac{V_0 \sin \omega t}{\omega}$

Conosciamo tutto del moto, ma in realtà non e' semplice.

Ex: Nel moto statico il p.t.s di equilibrio era quello



o era in quiete [F e sempre = -kΔx]

Puo' essere p.t.s eq. | Agiscono su m  $mg$  (verso

il basso e  $F_{el} \rightarrow m \vec{a} = \vec{F}_{el} + m \vec{g}$ .  $F_{el}$  totale

(poiche'  $x=0$   $\text{tore} = 0$ ).  $\Rightarrow$  non e' Equilibrio; non e'

portato; non in  $x_{eq}$  quindi impongo  $F_{el} + m \vec{g} = 0$

$-k x_{eq} + mg = 0 \rightarrow x_{eq} = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega^2}$

Supponiamo di tirare il p.t.s mat + cominciamo delle oscillazioni)

a che  $\omega \neq 1$  Nella accelerazione verso alto,  $F_{sp}$  verso il basso e

v. e verso quando scende. Risolviamo eq. moto:  $m \ddot{x} = -kx + mg$

$\ddot{x} + \omega^2 x = g$  - (EDO non omogenea)  $\rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x - g = 0$  Poiche'  $x_{eq} = \frac{g}{\omega^2}$

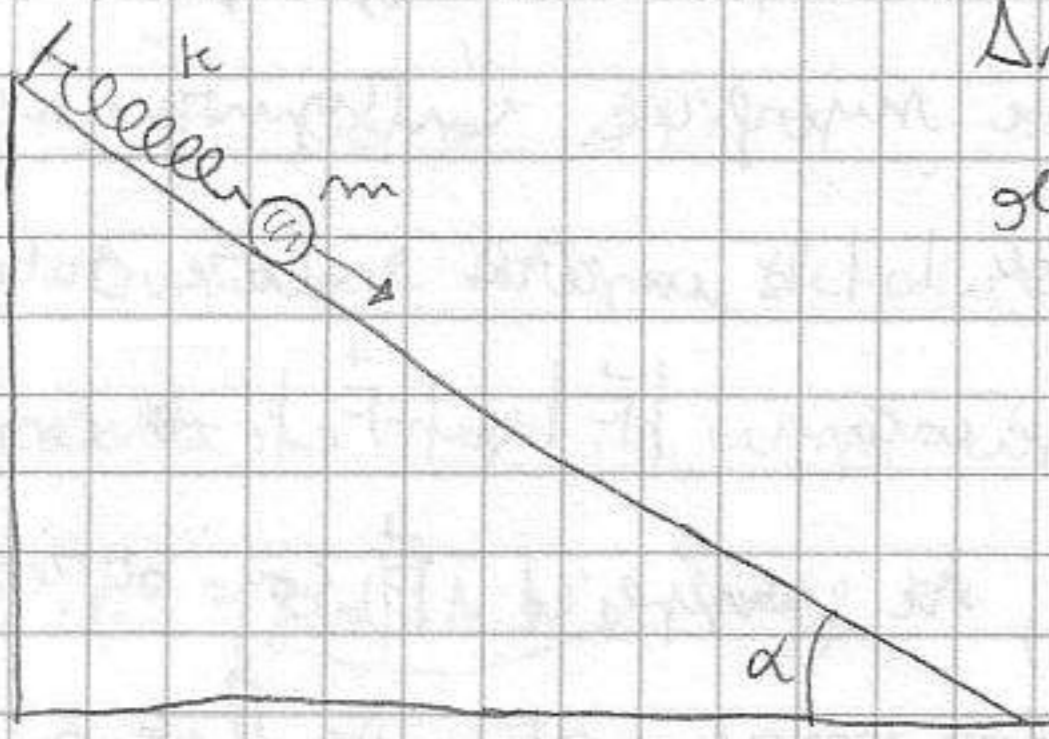
$\ddot{x} + \omega^2 (x - x_{eq}) = 0$  (perche' immette  $x_{eq}$  in  $\ddot{x}$  perche' e' cost.)  $\rightarrow \frac{d}{dt}(x - x_{eq}) = \dot{x}$

e  $\frac{d^2}{dt^2}(x - x_{eq}) = \ddot{x} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(x - x_{eq}) + \omega^2(x - x_{eq}) = 0$  eq. moto armonico.

$\omega$  e' INDIPENDENTE

sta per molla ( $g$  modifica solo eq poiche' e' costante). Rimane

② moto armonico.

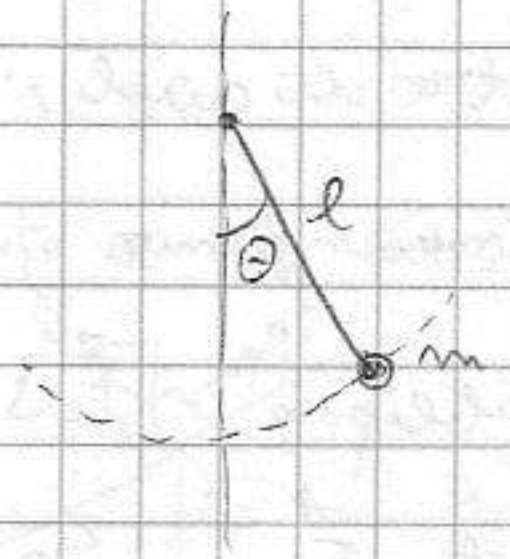


Anche qui non dip. da \$d\$, poiché dip. solo da \$k\$ e \$m\$.

Nel pendolo semplice

$$\text{ora } \ddot{\Theta} + \frac{g}{l} \sin \Theta = 0$$

e ci poniamo intorno



a eq. e consideravamo piccole oscillazioni. \$\rightarrow \Theta = m\Theta \rightarrow\$

$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{l} \Theta = 0 ; \text{ se } \frac{g}{l} = \omega^2 \text{ ho di nuovo eq. moto armonico } [\ddot{\Theta} + \omega \Theta = 0]$$

Pendolo semplice (x piccole oscill.) un P.A.S. con  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Solo che in questo caso le oscillazioni dipendono da lunghezza filo e \$g\$.

$$\begin{cases} x(t) = A \sin(\omega t + \alpha) \\ v(t) = A \omega \cos(\omega t + \alpha) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin(\omega t + \alpha) = \frac{x(t)}{A} \\ \cos(\omega t + \alpha) = \frac{v(t)}{A\omega} \end{cases} \rightarrow \boxed{\text{IMPORTANTE}} \quad 1 = \frac{x^2(t)}{A^2} + \frac{v^2(t)}{A^2 \omega^2}$$

In tal caso \$t\$ è parte di eq. traiettoria \$\rightarrow\$ eq. ELLISSI. \$\exists\$ sempre il moto

una \$q\$ costante e indep. da \$t\$ (non solo per P.A.S.) Principio di

conservazione energia meccanica, \$\exists\$ questa quantità perché è F. potenziale

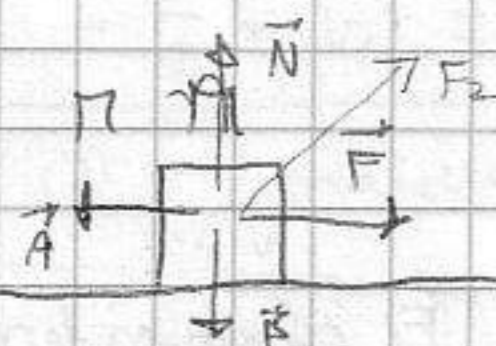
possiamo molt. per \$A^2 \omega^2\$:  $\frac{A^2 \omega^2}{k/m} = \omega^2 x^2 + v^2 \rightarrow \boxed{\text{IMPORTANTE}} \quad \frac{kA^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$

03-03-2005 ATRITO (già aff. in m. e. d.)  $\vec{F} = -b \vec{v}$  dove \$b\$ è il COEFF. di VISCOSITÀ che tiene conto interazione tra oggetto e particelle fluido.

\$\exists\$ \$\leftrightarrow\$ tipi di attrito.

- CONTATTO, attrito tra corpo e sup. di appoggio. ex tavolo: [di contatto] ex tavolo: [rugoso]

(carioni elettrici nei punti di contatto \$\Rightarrow\$ F. per maggiore resistenza). Azioni a livello microscopico, modello corpo su piano orizzontale:



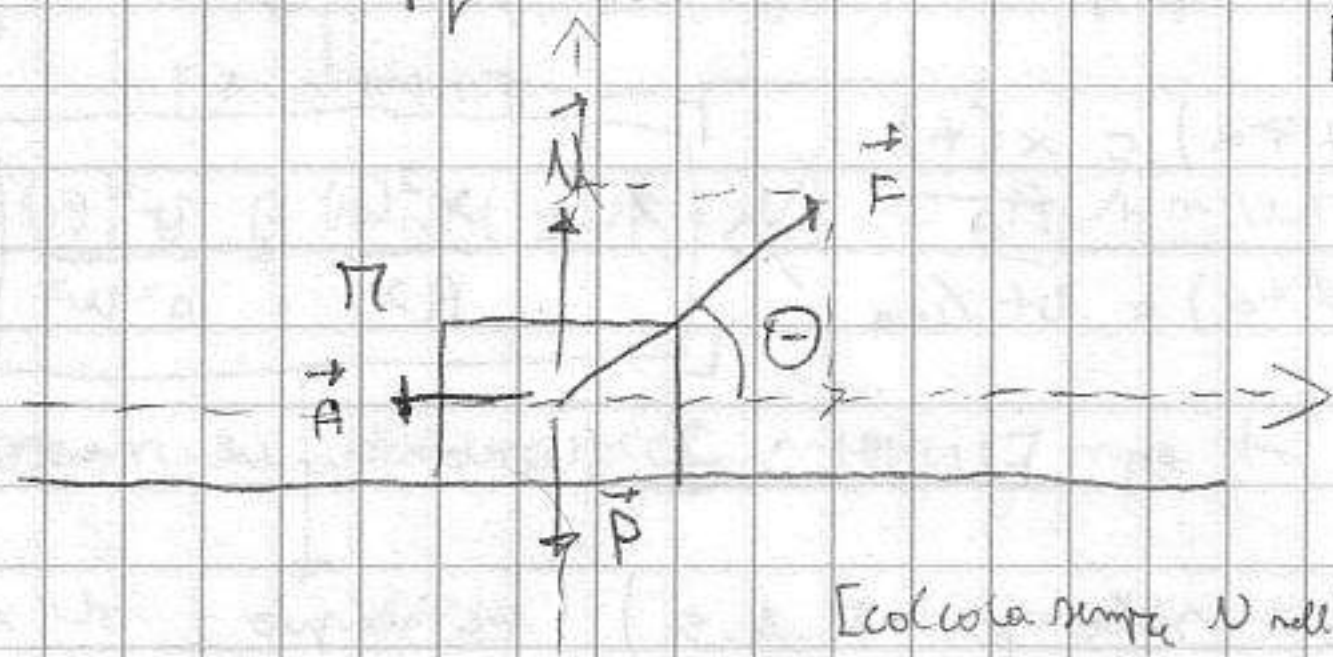
Applichiamo \$\vec{F}\$, ma corpo non si muove. \$\Rightarrow\$ \$\exists\$ \$\vec{F}\_a\$ si oppone a \$\vec{F}\$, analoga

forza. \$\exists\$ \$\vec{A}\$ forza di attrito. So che

$$\vec{F} + \vec{A} + \vec{P} + \vec{N} = 0, \text{ So che } |\vec{P}| = |\vec{N}| \text{ e } |\vec{F}| = |\vec{A}| \text{ (}\vec{F} \text{ è uguale e contraria a quella applicata). Se non applico } \vec{F}, \vec{A} = 0, \vec{F} \text{ attrito non FORA}$$

DI RESISTENZA PASSIVE (legate al tipo di azione sull'oggetto) (33)

Aumento  $F$  fino a quando  $N$  muove. Quando  $|\vec{F}|$  raggiunge valore  
 critico, corpo si muove. Contatto tra corpo e superficie è rappresentabile  
 con una forza opposta a quella applicata, di  $|\vec{F}| =$  un certo valore critico,  
 oltre il quale non riesce a contrastare  $F$  applicato.  $|\vec{F}| \leq |\vec{F}_c| \rightarrow$  corpo  
 rimane fermo;  $\vec{F}_c$  deve agire da  $\Pi$  corpo; se applico  $\vec{F}$  con direzione  
 "obliqua"  $[\vec{F}_2]$  e "obliqua". Se pongo altra mano, aumento  $\vec{N}$  e quindi  
 anche  $\vec{F}_c$ . Se da  $|\vec{F}_c| \rightarrow |\vec{N}|$ ; se piano forma perfett. liscio,  $\vec{N}$  sarebbe  
 perpendic.  $\perp$   $[\vec{N} \perp \vec{A}]$  (gener.); se piano non è liscio, viene a esplicitare  
 reazione  $L$  e tangenziale (che è proprio  $\vec{A}$ ); allora è la "capacità" del  
 piano ad esplicitare una reazione tangenziale [verso  $d$  del tipo di azione]



Ex: caso con  $\vec{F}$  non orizzontale  
 Reazione vincolare: considero  
 una verticale; se da  $N$  è verso  $\uparrow$

poi c'è componente di  $\vec{F}$  e  $\vec{A} \Rightarrow$   
 (reazione vincolare DIMINUISCE  
 con l'obliquità di  $\vec{F}$ )

[colloca sempre  $N$  nell'attivo]  $N + F \sin \theta - P = 0 \Rightarrow \boxed{N = P - F \sin \theta}$   
 Una volta dett.  $N$ , allora  $|\vec{F}_c| = \mu_s N$  coeff  
 di ATRITO STATICO.

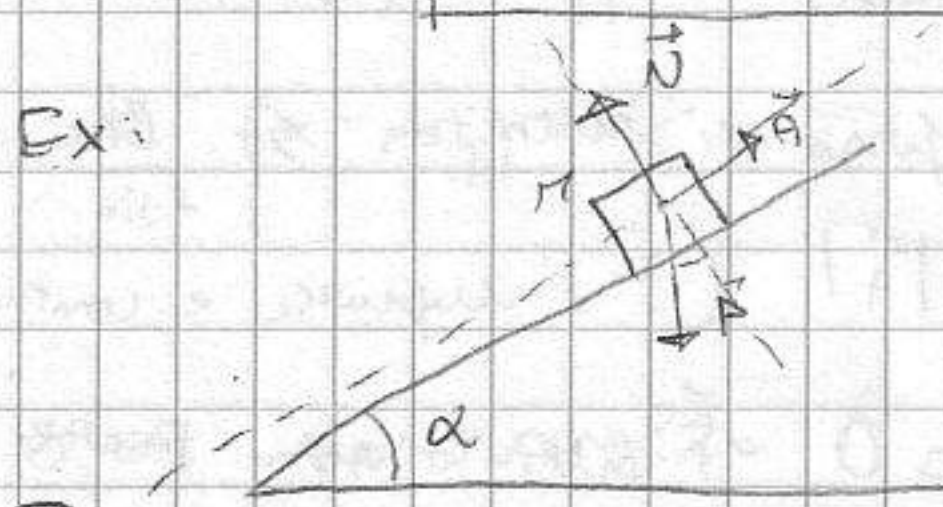
Se voglio  $\vec{F}$  min per fare muovere il corpo parte da C. eq. (corpo fermo)  
sempre verificata (a meno del corpo a riposo)

Lungo l'asse verticale ho  $(N)$  su quello orizzontale:  $F \cos \theta - A = 0$

$\Rightarrow \boxed{F \cos \theta = A}$  +  $\mu$  (è equilibrio). Impongo  $A <$  valore critico.  
 C'è equilibrio se  $\boxed{A \leq A_c = \mu_s N}$  [A non può superare  $\mu_s N$ ]. Sostituendo

$F \cos \theta \leq \mu_s (P - F \sin \theta)$ ;  $F \cos \theta \leq \mu_s P - \mu_s F \sin \theta$  quindi  
 $F (\cos \theta + \mu_s \sin \theta) \leq \mu_s P$ . La condizione per cui il sistema rimane

fermo è:  $\boxed{F \leq \frac{\mu_s P}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}}$



(34)  $[\vec{P}$  è FORZA ATTIVA]

•  $d$  è tale per cui il corpo è fermo.  $\rightarrow$   
 $\vec{N} + \vec{A} + \vec{P} = 0$ ;  $N = P \cos \alpha = mg \cos \alpha$  [vert.]  
 $P \sin \alpha = mg \sin \alpha = A$  [tan.] [C'è eq.  $\Leftrightarrow A \leq \mu_s N$ ]  
 $mg \sin \alpha \leq \mu_s mg \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\tan \alpha \leq \mu_s}$

Superconduttore di cui corpo in istria a muoversi.

Ex: muovi corpo  $\vec{F} \rightarrow$ ; dopo il primo movimento,  $\vec{F}$  necessaria e minore.

C'è inerzia del corpo che aiuta nel movimento.

Una volta in moto il corpo è soggetto a  $F$ , gli ATRITO DINAMICA il cui modulus

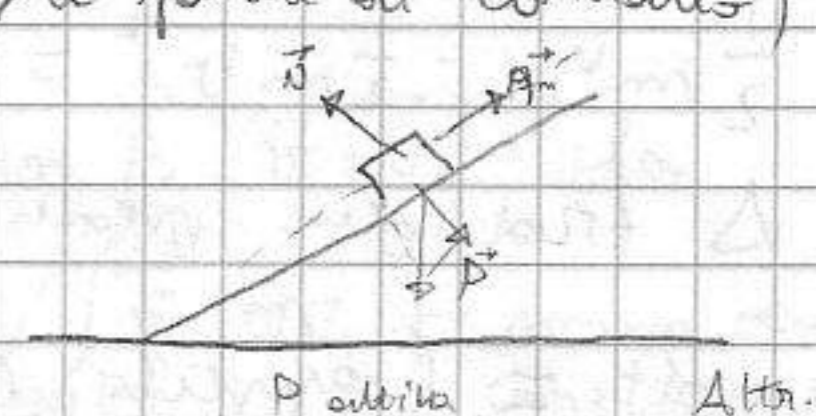
$|\vec{A}| = \mu_d |\vec{N}|$  coeff. di attrito DINAMICO. ( $\mu$  di per a portata di contatto)

$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{A}_d \rightarrow$  proc. DINAMICO

Proiettato su direz. norm. e tan.  $m a_n = 0 =$

$N \cdot \cos \alpha = N - mg \cos \alpha \rightarrow N = mg \cos \alpha$   $m a_t = mg \sin \alpha - \mu_d N$

$= mg \sin \alpha - \mu_d mg \cos \alpha \rightarrow a_t = g(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)$



04-3-2005

Se p.to è soggetto a  $\vec{F} = -kx \hat{i}$ , si hanno oscillazioni con  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  e legge

$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$  Derivando, si ha  $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2$  costante

C'è una quantità che durante il moto rimane costante. Prendi  $t_1 \rightarrow x_1, v_1$

e  $t_2 \rightarrow x_2, v_2$  la sol. affermo che  $\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \rightarrow$

$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2$

Attenzione ad ex. m.u.a. ①  $y(t) = -\frac{1}{2} g t^2$ ,  $v(t) = \dot{y} = -gt$  [Eliminiamo

$t$ ,  $t = -v/g$   $-y = -\frac{1}{2} g \frac{v^2}{g^2} - y = -\frac{v^2}{2g} + gy = -\frac{v^2}{2}$

Moltiplico per  $m$  e moltiplo:  $\frac{m v^2}{2} + m g y = 0$  [K]

Anche qui  $E$  una q. che è COSTANTE nel tempo.

Se prendo  $t_1$  e  $t_2$  con  $x_1, v_1$  e  $x_2, v_2 \rightarrow \frac{m v_1^2}{2} + m g y_1 = \frac{m v_2^2}{2} + m g y_2 \rightarrow$

$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = m g y_1 - m g y_2$ , supponiamo ora che tempo costante

Con  $v_0$  ② - traiettoria parabolica Lungo  $y$  devo avere nel gli prima

$\frac{m v_0^2}{2} + \frac{m v_0^2 y}{2} + m g y_1 = \frac{m v_0^2}{2} + \frac{m v_2^2 y}{2} + m g y_2$  Vale la legge di

moto.

Relazione (senza il tempo) che legano la  $x$  e la  $v$  di un corpo  $\forall$  istante.

$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$  è la VARIATIONE di  $\frac{1}{2} m v^2$  e l'oscillazione armonica

solo la  $x$  del punto. Si chiama ENERGIA CINETICA  $[K_c, E_c, T]$  e si misura in Joule  $[J]$ . La var.  $m$  può collocare in maniera generale senza conoscere le leggi del moto:

- ex: moto unidimensionale  $ma = F$ . Voglio  $\Delta E_c$  tra due istanti di  $t$ .

$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = ?$  → Invece di collocare  $\Delta$  tra due istanti generici, colloco  $\Delta$  tra due istanti  $\infty$  vicini. → diff.  $f(x) \Rightarrow d(\frac{1}{2} m v^2) = (m v \frac{dv}{dt}) dt$

$\cdot dt =$  (applico legge che conosco:  $m \frac{dv}{dt} = F$ )  $= F v dt$  ;

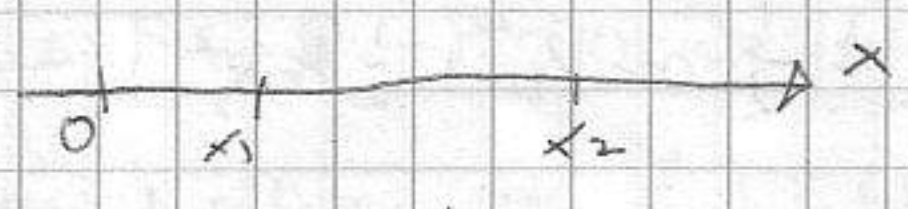
$dE_c = F v dt$ . Sfrutto i impo sulla  $v$ ,  $v \cdot dt = dx \rightarrow \boxed{dE_c = F dx}$

(non c'è il tempo). Integriamo: ①  $x_1, v_1$ ; ②  $x_2, v_2$  [STATO SISTEMI]

$\int_1^2 dE_c = E_c(x_2) - E_c(x_1) = \Delta E_c = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \boxed{\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2}$ . Devo sapere

solo come varia  $F$  lungo la distanza del moto. [ ] vari in cui moto non si può ricostruire] → LAVORO

08-3-2005



$\Delta E_c = \int_{x_1}^{x_2} F dx$   
 $\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$

Moto unidimensionale massa  $m$  soggetto a Forza  $F$ . Quando passo da  $x_1$  a  $x_2$  si colloca la differenza di una quantità tra le 2 posizioni (var. E. cinetica).

F. elastica:  $F = -kx$  ( $F$  è l'unica componente della Forza nell'axe  $x$ )

Per  $x_1, x_2$ ,  $\Delta E_c = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -k \left( \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right) = \boxed{\frac{k x_1^2}{2} - \frac{k x_2^2}{2}}$

Invece se vogliamo  $\Delta E_c$  tra due istanti  $x_1, x_2$  lo collochiamo per istanti

molto vicini ( $dE_c$ );  $E_c = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{v} \rightarrow v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} [ 2 v_x \cdot v_x + 2 v_y v_y + 2 v_z v_z ]$ ,  $\frac{d}{dt} v_x^2 = 2 v_x \frac{dv_x}{dt}$

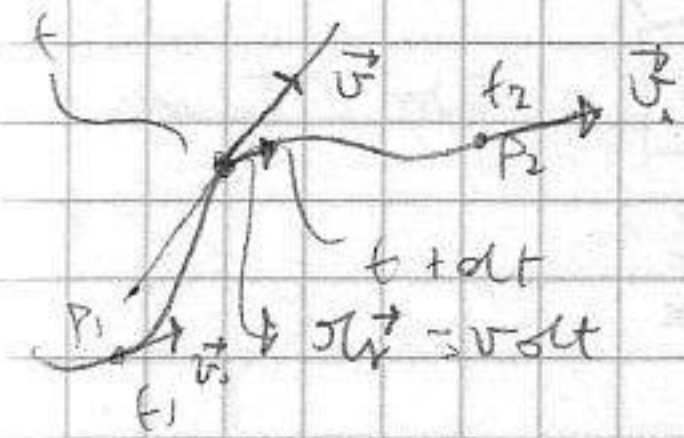
quindi  $= m [ v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y + v_z \dot{v}_z ]$  (prodotto scalare  $xx' + yy' + zz'$ )

$= \boxed{m \cdot \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dE_c}{dt}}$  → caso generale. Si può dire che  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$  (forza totale che agisce)

36) di conseguenza  $\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$

Si è voluta che  $\Delta E_c$  per intervalli  $\frac{1}{\infty}$  di tempo. Nel caso unidimensionale

si aveva  $dE_c = F v dt$ ; ora  $dE_c = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$  (VELOCE); spontaneamente  $\frac{1}{\infty}$



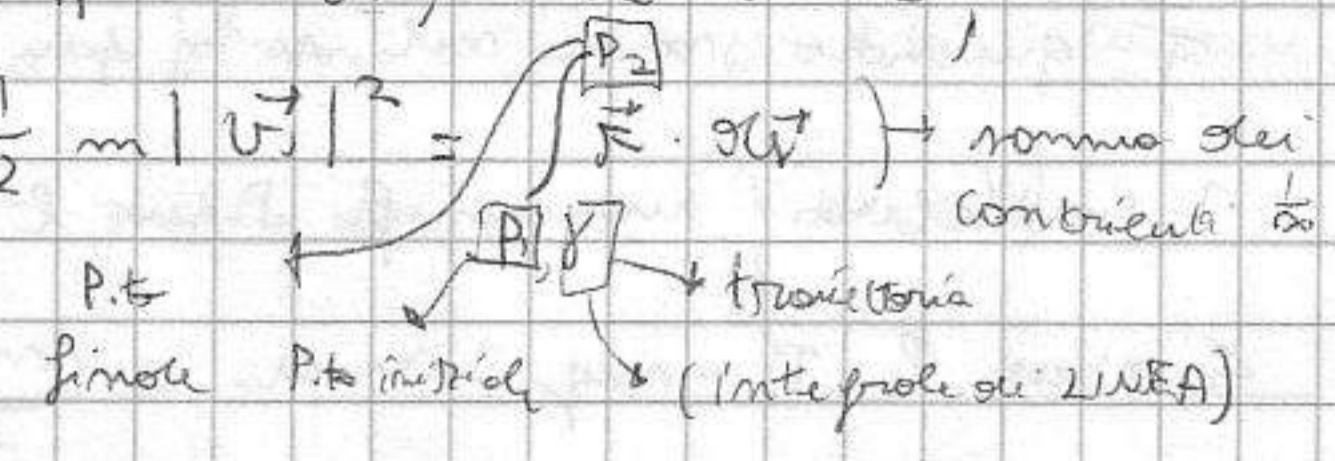
del punto lungo la traiettoria (per intervalli piccoli  $d\vec{r} \approx \vec{v} dt$ ). (Ha un significato fisico) nel tempo dt

INTEGRALE delle F. VIVE  $\int dE_c = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$   $\rightarrow$  LAVORO F. VIVE

Consideriamo  $t_1, t_2$  generici, in  $P_1$   $\vec{v}$  è rapp. con  $\vec{v}_1$ , in  $P_2$   $\vec{v} = \vec{v}_2$ ; la

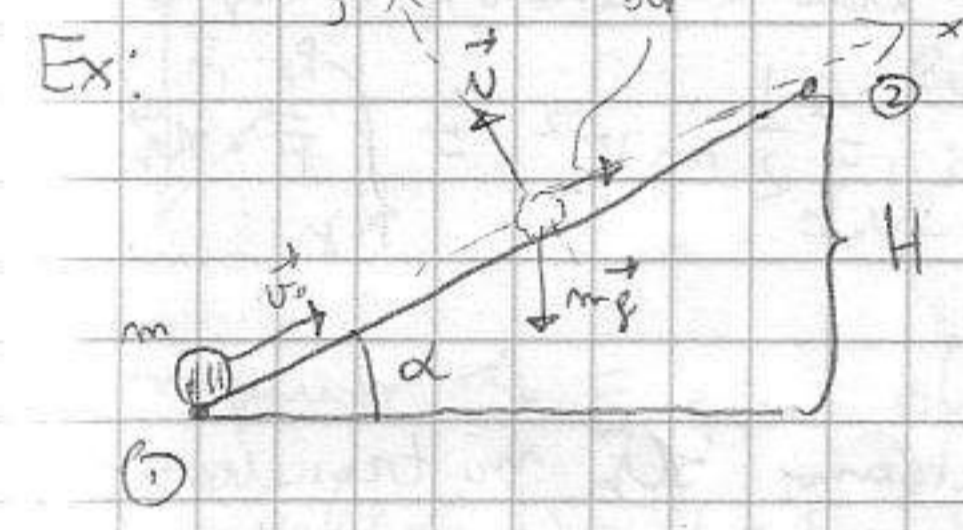
variazione di E. cinetica  $\Delta E_c = \frac{1}{2} m |\vec{v}_2|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$   $\rightarrow$  somma dei contributi  $\frac{1}{\infty}$

$\vec{F} \cdot d\vec{r}$  è il LAVORO ELEMENTARE e l'integrale è il LAVORO della FORZA  $\vec{F}$ .



(è conseguenza matematica del noto 2° principio dinamico, non è principio)

Quanto mai è facile e possibile trovare legge di moto.



Ex: Det. la quota max H raggiunta dal punto (blocco verso l'alto con  $\vec{v} = \vec{v}_0$ ) durante il moto

$\Delta$  moti sotto le forze in un t generico si ha:  $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$ ; proiettando su

asse,  $N = mg \cos \alpha$  e  $a = -g \sin \alpha \rightarrow$  moto un. accelerato,  $\Rightarrow v(t) =$

$v_0 + at = v_0 - (g \sin \alpha)t$  e  $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = v_0 t - \frac{1}{2} (g \sin \alpha) t^2$ . Per avere

H, si considera  $t \rightarrow x(t) = H \Rightarrow v = 0 \rightarrow t = \frac{v_0}{g \sin \alpha}$  indicando D. con la Dmax

ricorrendo alla  $D = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha} \rightarrow H = D \sin \alpha = \frac{v_0^2}{2g}$

Consideriamo 2 stati:  $t=0$  e  $t$ . Calcoliamo  $\Delta E_c (2,1) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = 0 -$

$\frac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{1}{2} m v_0^2$ . Ora  $\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} (\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g}) \cdot d\vec{r} =$

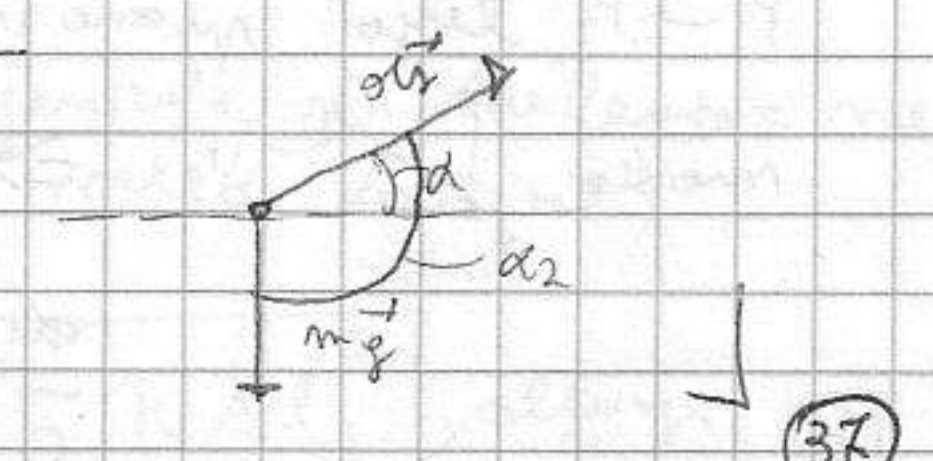
$\int_{P_1}^{P_2} \vec{N} \cdot d\vec{r} + \int_{P_1}^{P_2} m\vec{g} \cdot d\vec{r}$   $\rightarrow$  RICORDA VETTORI.  $\vec{N}$  - considero il p.t. generico, calcol

il prod. scal. nel p.t. generico,  $d\vec{r}$  è  $\perp$  a  $\vec{N} \Rightarrow \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$  SEMPRE

(la reazione vincolare del piano liscio è sempre  $\perp$  a spostamento  $\Rightarrow$  lavoro è SEMPRE nullo).  $\int_{P_1}^{P_2} m\vec{g} \cdot d\vec{r}$   $\rightarrow$  mono

le P.s. è  $|v_1| \cdot |v_2| \cdot \cos \alpha$ ;  $\alpha_2 = \alpha + \frac{\pi}{2}$ ;  $\cos \alpha_2 = -\sin \alpha$

le formule di risoluzione  $\cos \alpha_2 = -\sin \alpha$   $\rightarrow$



$$m \vec{g} \cdot d\vec{r} = -mg \sin \alpha |d\vec{r}| \Rightarrow \int_{P_1, \gamma}^{P_2} |d\vec{r}| = D \rightarrow \int_{P_1, \gamma}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg D \sin \alpha$$

Quindi  $\frac{1}{2} m v_0^2 - m g H \Rightarrow H = \frac{v_0^2}{2g}$

Ex. globo non si può risolvere eq. moto - Pseudo STEMALE

$\theta_0 \approx \frac{\pi}{3}$  (non per piccole oscillazioni); Vogliamo

$\vec{T}$  quando  $m$  è nel p.to più basso. (delle due

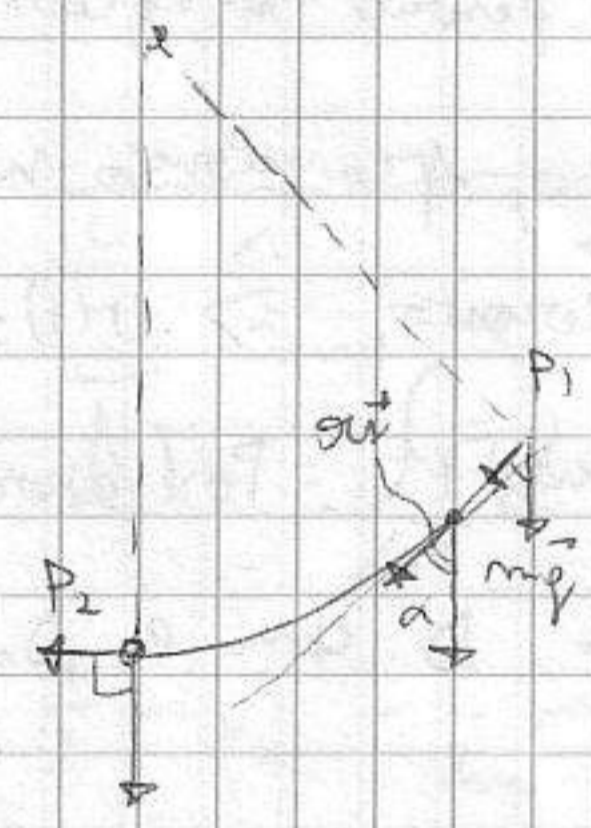
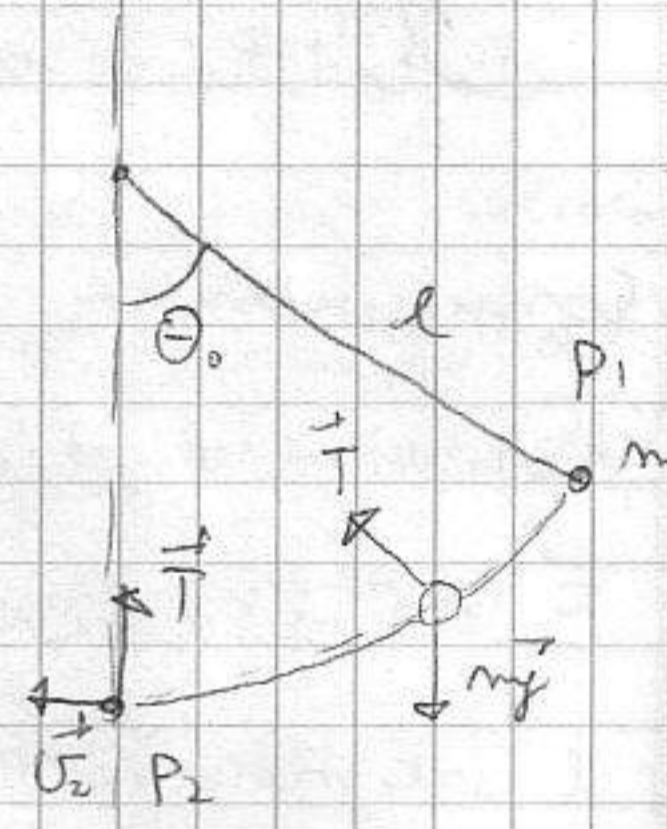
2 contributi, uno per  $\vec{F}_{\text{peso}}$ , l'altro per  $\vec{F}_{\text{centrif.}}$ )

Si aveva  $T - mg = m a_c = \frac{m v_2^2}{l} \Rightarrow T = mg + \frac{m v_2^2}{l}$

Il problema è calcolare  $v_2$ ,

poiché non si può calcolare legge moto. Risolviamo volutamente  $\vec{E}_c$  nel p.to

come della traiettoria, applichiamo TH.  $\vec{T}$  non compie lavoro (sempre  $\perp$  a traiettoria) Scegliamo 2 punti  $P_1$  e  $P_2$ .  $\Delta E_{c(2,1)} = \frac{1}{2} m v_2^2 = \int_{P_1, \gamma}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ,  
traiettoria e curvilinear.



→ Scegliamo P.to generico e valutiamo  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  su traiettoria

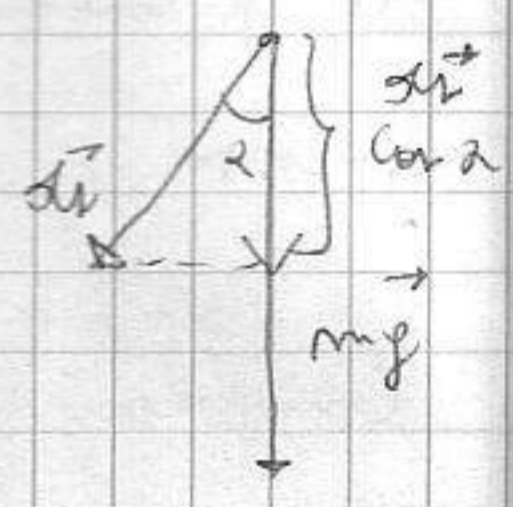
Devo calcolare  $m \vec{g} \cdot d\vec{r}$  nel caso di prime ds cost.

Qui varia → non possiamo portare fuori tutto.

$mg \cos \alpha |d\vec{r}|$  cambia a seconda della posizione

Il P.S. è  $m g \cos \alpha \Rightarrow L_T = +$  (lo

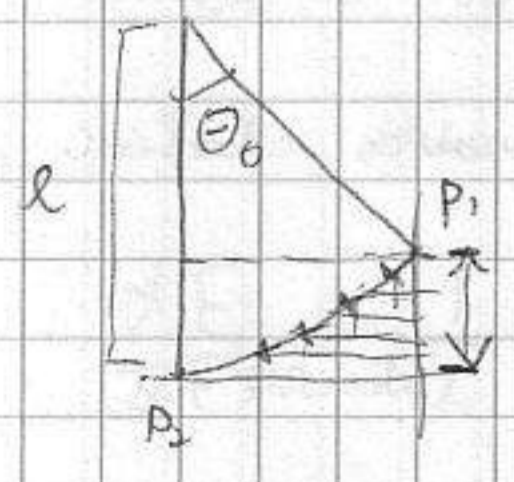
$\vec{dr} \propto \cos \alpha \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{dr} < \frac{1}{2}$ ). Prendiamo



tutta la traiettoria e scomponiamo nei suoi  $d\vec{r}$ , per ciascuno di essi solo queste componenti verticali e normali.

Ottengo la differenza di quota tra  $P_2$  e  $P_1$  →

$$m g (l - l \cos \theta_0) = m g l (1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2} m v_2^2$$



Se avessimo voluto studiare un problema analogo dove

$P_1 \rightarrow P_2$  lungo piano inclinato liscio, applicando TH, calcolo  $\Delta E_c$  allo stesso

modo  $v_1 \Rightarrow$  il lavoro è lo STESSO poiché  $\vec{F}_{\text{peso}}$  e  $F$  costante,

diverse solo le DIFFERENZE di quota.



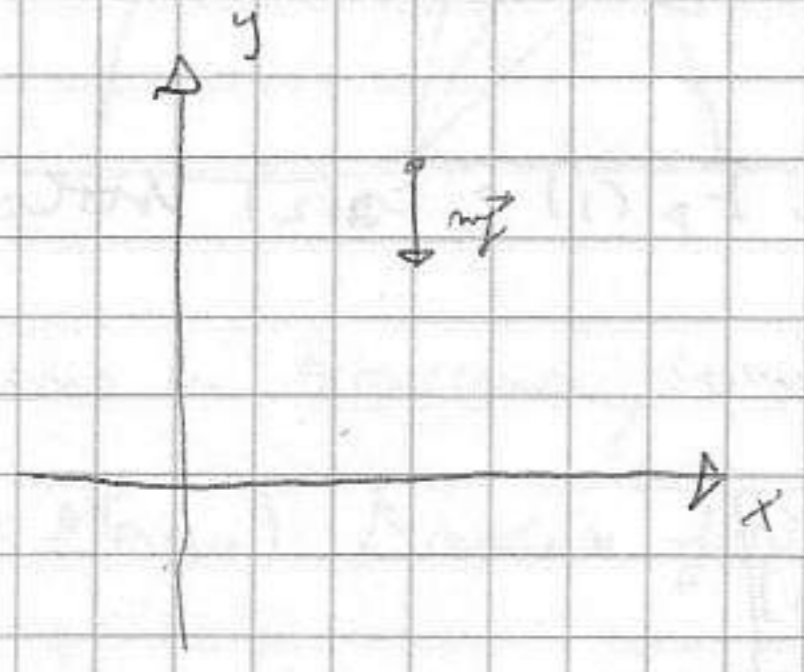
$\vec{F}_p$  è una FORZA CONSERVATIVA (come  $F_{el}$ ). Si può ricavare il lavoro lungo qualunque traiettoria con diff. di 2 valori di  $U$  (tra  $P_1$  e  $P_2$ )

$$\int_{P_1}^{P_2} m \vec{g} \cdot d\vec{s} = \boxed{U(P_1) - U(P_2)} \rightarrow \text{ENERGIA POTENZIALE}$$

Fissiamo un int. ref, no che  $U(P_1) = mgy_1$  e  $U(P_2) = mgy_2$

$U(P) = mgy$  → quota (con  $y$  verso l'alto)

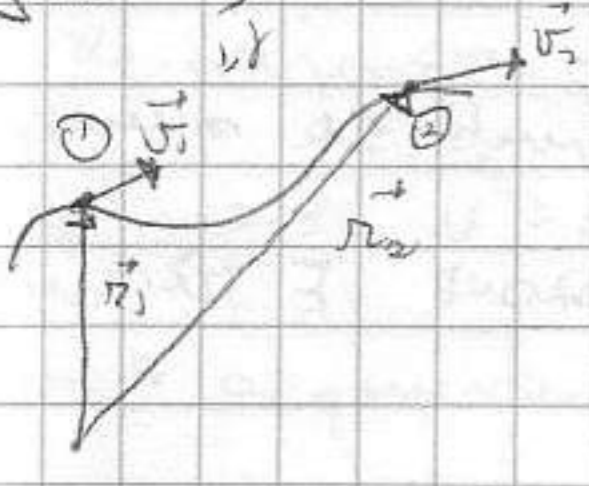
(le F. che compiono L sono di solito di 2 tipi: CONSERV. - introduciamo U-, quelle non cons. - (F. attrito))



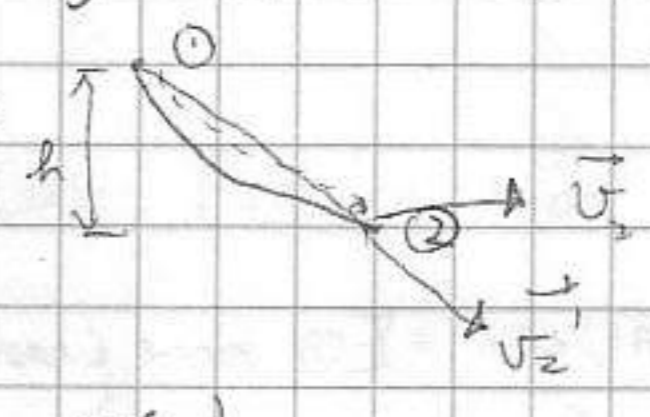
10-3-2005 (tr lavoro ed E. cinetica)

$$\Delta E_c = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \rightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad [J = N \cdot m]$$

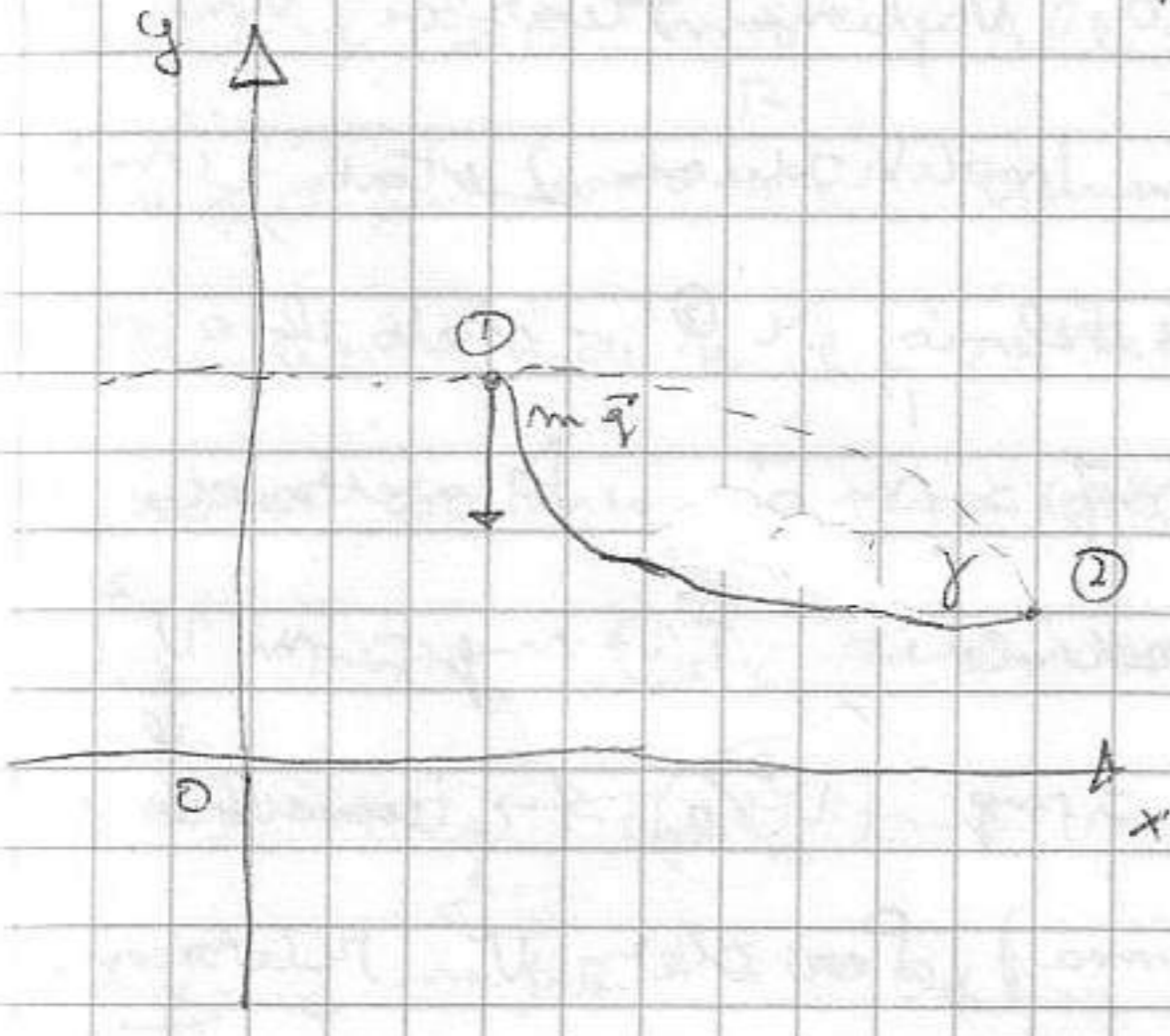
$[\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2] \quad [\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1]$



Il lavoro di forze per le quali si può scrivere in ogni istante del percorso. Es: PENDOLO:  $l$  tot.



Computo di F. pero bisogna solo stare al livello.  $|\vec{v}_2| = |\vec{v}_1|$  (v. piano inclinato e pendolo)



Prevediamo  $U(x,y)$  e  $F_p$ . Se punto va da 1 a 2 lungo una qualsiasi

traiettorie allora  $\vec{F}_p, \int_{P_1}^{P_2} m \vec{g} \cdot d\vec{s} =$

[I]  $mgy_1 - mgy_2$  (indip. traietto)

Introduciamo la funzione ENERGIA POTENZIALE di dipendere solo dalle

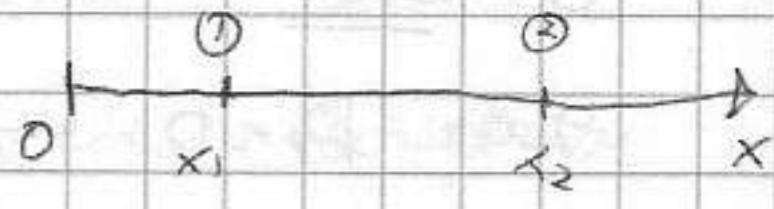
POSIZIONE DEL PUNTO  $U(P) = U(\vec{r}) = U(x,y,z)$ . Punto  $O(x,y)$ , per lo

forza pero  $\boxed{U(P) = mgy}$ . [I] =  $U(P_1) - U(P_2)$

Forza elastica.  $\vec{F} = -kx \hat{i}$

$$\int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$$

(vale in generale per elastore nel piano o nello spazio)



EV. POTENZIALE ELASTICA

$\boxed{U_{el}(P) = \frac{1}{2} k \Delta l^2}$  allung. o accor. molla (39)

Le F. per le quali si può definire una U, si chiamano FORZE CONSERVATIVE  
 (indicando con ① e ② i due stati (x,v) del sistema n) ha:

$$E_c(2) - E_c(1) = (\text{lavoro compiuto da } F) = E_p(1) - E_p(2) \quad \text{in-fin}$$

Supponiamo agisca solo F. conservative  $\rightarrow L_{1 \rightarrow 2} = E_p(1) - E_p(2)$

$E_c(2) - E_c(1) = L_{1 \rightarrow 2}$  valido in generale,  $L_{1 \rightarrow 2} = E_p(1) - E_p(2)$  solo per F. conservative (F<sub>gr.</sub> e F<sub>el.</sub>) (X+.)

$$E_c(2) + E_p(2) = E_c(1) + E_p(1)$$

Nel passaggio da ① a ② c'è questa quantità di lavoro costante

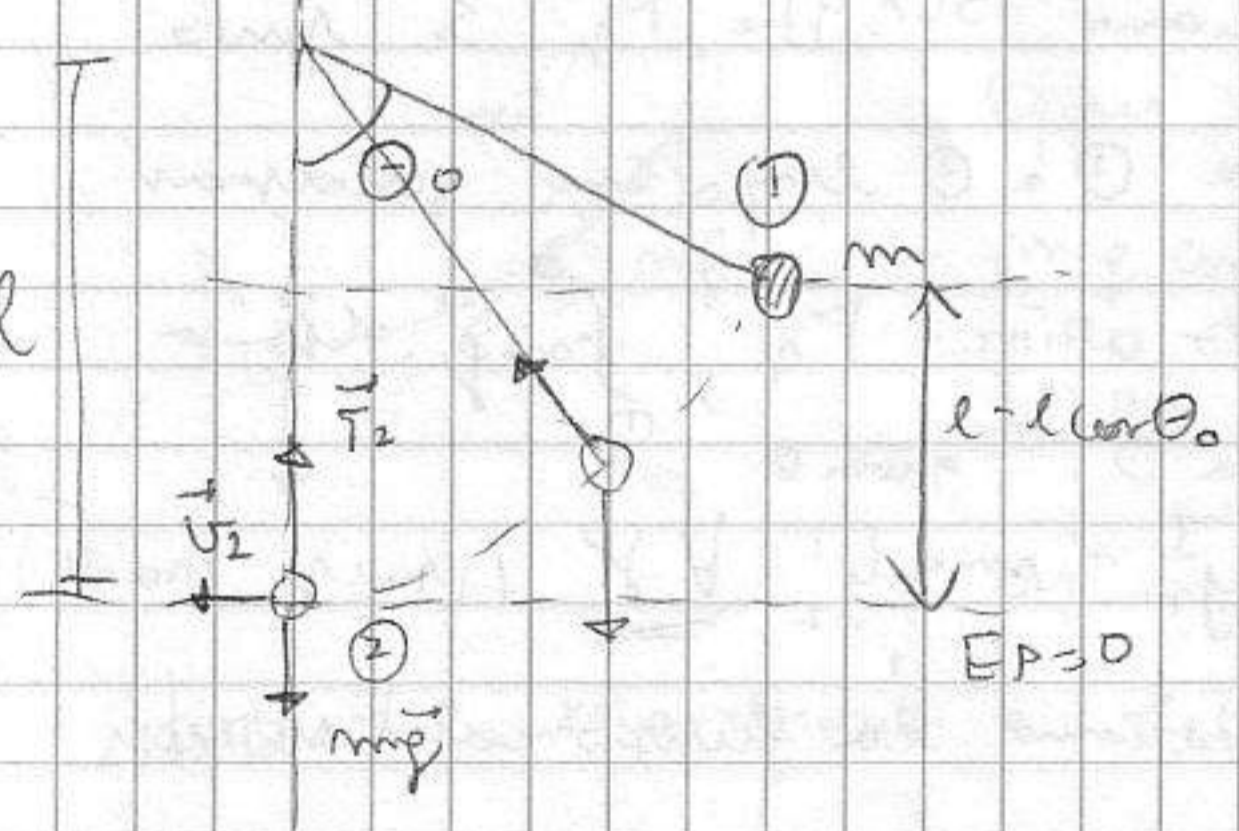
$E_M = \text{ENERGIA MECCANICA} = E_c + E_p$ . Se F. è conservativa ( $\Rightarrow$  def. E<sub>p</sub>), in

pts. mat. è rispetto a questo tipo di F. (il Lav. è compiuto da queste forze) c'è questa q. di lavoro  $\rightarrow$  PRINCIPIO di CONSERVAZIONE E. MECCANICA

$$\Delta E_M = 0$$

(La var. di E. meccanica tra i due punti è 0) - solo per F. con.

EX: Pendolo lanciato lungo da ① con v<sub>0</sub> = 0. Valgono le stesse v. nel



pts + lam. Inclinazione 2 stati, inibibile  
 ① dove pts è fermo, e ② - stato di a' intorsem  
 In ②,  $\vec{T}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}_2$ . Proiettando su  
 direzione radiale  $T_2 - mg = m \frac{v^2}{l}$   
 quindi  $\vec{T}_2 = mg + \frac{mv^2}{l}$  ( $\rightarrow$  braccetto delle  
 arco curvilinea). Per det.  $v^2$  si applicano

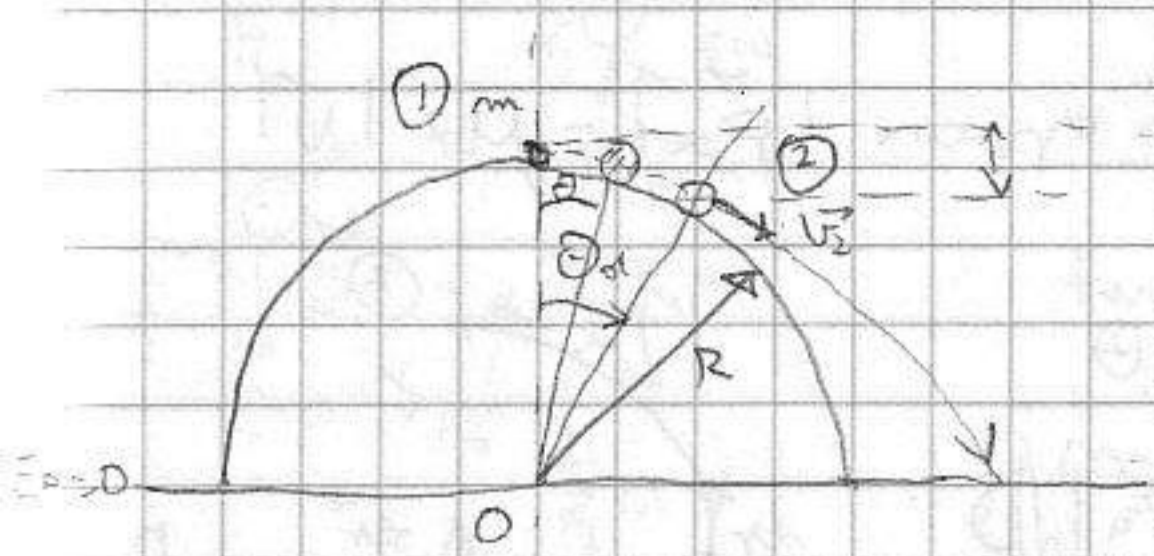
al principio di con. ( $v^2$  legato a E<sub>c</sub>). Reazione filo non compie lavoro,  
 e compiuto solo da F di c'è CONSERVATIVA  $\Rightarrow$  applico principio ( $E_M(1) = E_M(2)$ )

①  $E_M(1) = E_c(1) + E_p(1) = 0 + E_p(1) \rightarrow$  si sommano questa di sup.  
 dove E<sub>p</sub> = 0.  $\rightarrow E_p(1) = mgl(1 - \cos \theta_0)$

② c'è v<sub>2</sub>.  $E_c(2) = \frac{mv^2}{2}$ ;  $E_p(2) = 0 \Rightarrow E_M(2) = \frac{mv^2}{2}$

Applichiamo principio.  $\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos \theta_0) \rightarrow \frac{mv^2}{l} = 2mgl(1 - \cos \theta_0)$  delle F. centr.  $\Rightarrow T_2 = mg +$

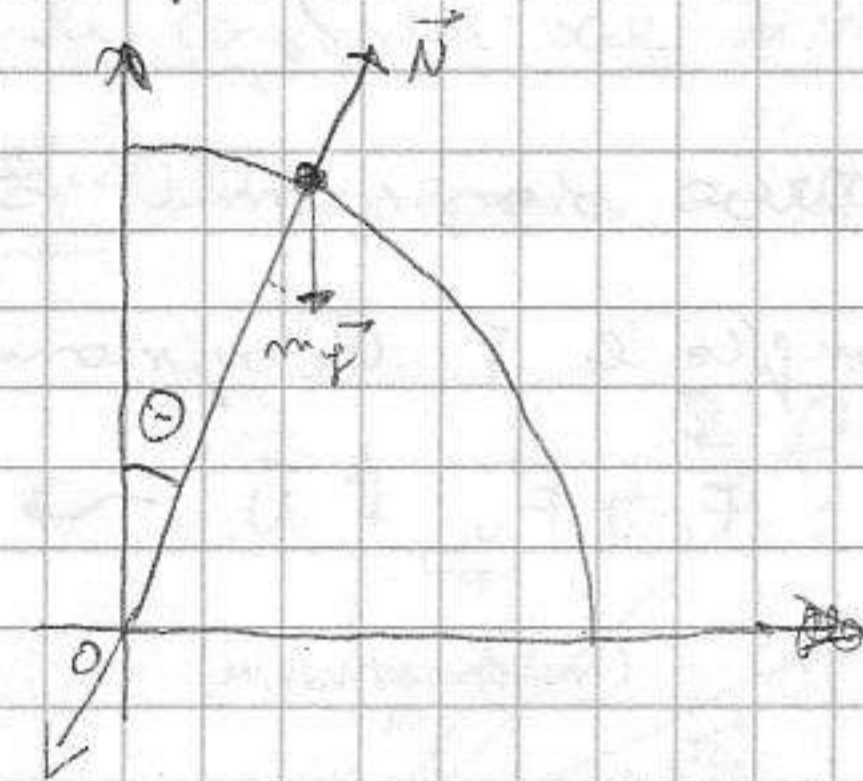
$$2mg(1 - \cos \theta_0) = mg(3 - 2\cos \theta_0)$$



C'è una semicirconferenza di raggio  $R$  e  $m$  sulla sommità; azione  $\vec{P}$  e reazione vincolare (eq. USKOBITE)

Allontaniamo  $\pi$  da per. ; inizia a muoversi fino a staccarsi, dove segue traiettoria parabolica, Det.  $\theta_d$  (angolo di stacco). Analisi forte. Sia  $\theta$  angolo tra  $\pi$  e origine.

C'è vincolo unilaterale a  $F_n$ .  $\vec{N}$  non come lavoro.  $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$ . Distacco se la componente di  $\vec{N}$ , si ha con  $\vec{N} = 0$ .



All'inizio  $\vec{N} = m\vec{g}$ . Non meno che in molte punti acquisite  $\vec{v} \Rightarrow$  parte  $F_n$  che

fornisce  $F_c$  vincente per ottenere moto circolare (inverso ad  $N$ ).  $\vec{N}$  e  $m\vec{g}$  non si sommano + equilibrio. Si ha  $-\vec{N} + mg \cos \theta = \frac{mV^2}{R}$

$N = mg \cos \theta - \frac{mV^2}{R}$ . All'aumentare di  $\theta$  si diminuisce 1 parte, e l'altra  $L_{re} \geq 0$  parte esplicita azione aumenta. Appena punto dove  $\vec{N} = 0 \Rightarrow$  vincolo non

ante azione  $m$  di  $\pi$  e c'è stato il distacco.  $\Rightarrow$  di ora soggetto a  $\vec{F}_g$  e si muove con una certa  $\vec{v}$  proseguendo con traiettoria parabolica.

① è l'inizio, ② è distacco. ;  $E_c(1) = 0 - E_p(1) = mgR$ ;  $E_c(2) = \frac{mV_2^2}{2}$

$E_p(2) = mgR \cos \theta_d \rightarrow$  imponiamo conservazione:  $mgR = \frac{mV_2^2}{2} + mgR \cos \theta_d$

$$\frac{mV_2^2}{2} = mgR(1 - \cos \theta_d) - \frac{mV_2^2}{2} = 2mgR(1 - \cos \theta_d) \quad \text{In } \theta_d \quad N = 0 \Rightarrow$$

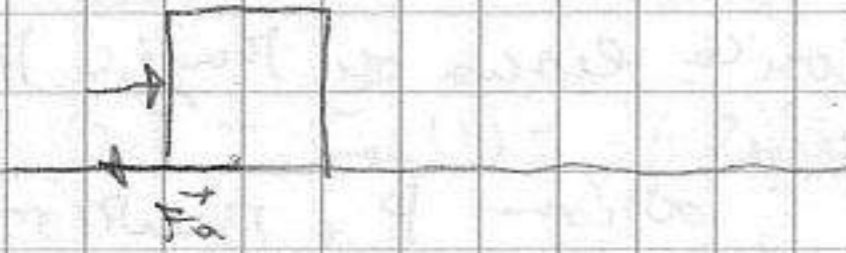
$$mg \cos \theta_d = \frac{mV_2^2}{R} \rightarrow \cancel{mg} \cos \theta_d = 2 \cancel{mg} (1 - \cos \theta_d) \rightarrow \boxed{\cos \theta_d = \frac{2}{3}}$$

Caso in cui il lavoro è compiuto anche da FORZE NON CONSERVATIVE

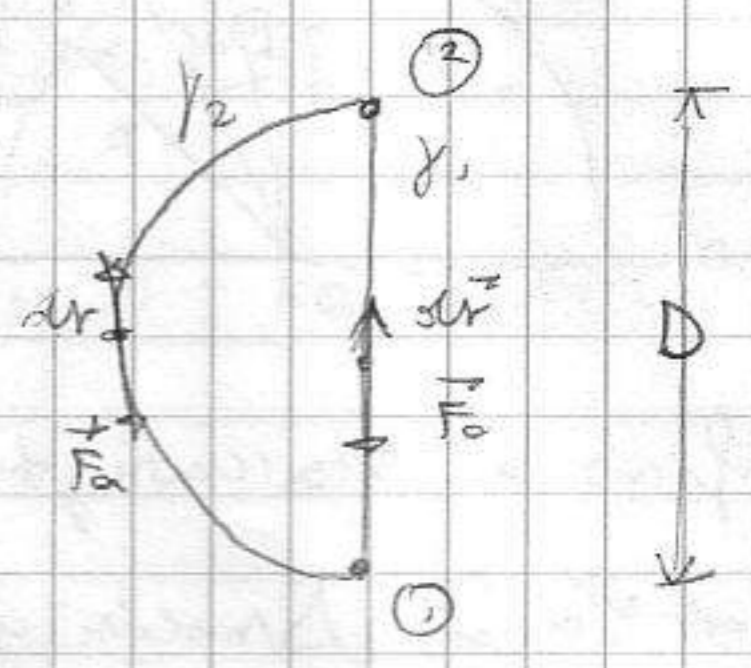
Primo:  $\Delta E_c = \int_{\text{①}}^{\text{③}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ ;  $\Delta E_{c0} \Rightarrow F_n = F_c + F_g$  (E calcolo x verificare se  $F$  conservative)

$F$  non conservative, ex DIRITTO, e / lavoro DIPENDE dal PERCORSO.

Ex: Vogliamo spostare come da ① a ②  
 ② in piano con attrito. Tutto in  
 moto e si oppone  $|\vec{F}_a| = \mu N |\vec{v}|$



Se voglio lav. della sola F. attr. da ① a ②,  
 devo controllare dir. e verso.  $\int_{1,1}^{2,2} \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = -|\vec{F}_a| D$   
 (lavoro negativo). Se voglio lav. da ① a ②  
 però da 1/2  $\int_{1,1}^{2,2} \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = -|\vec{F}_a| \cdot \frac{D}{2}$ , ecc.



DIVERSO da prima.  $\Rightarrow$  non si può applicare  $\Delta E_m = 0$ .

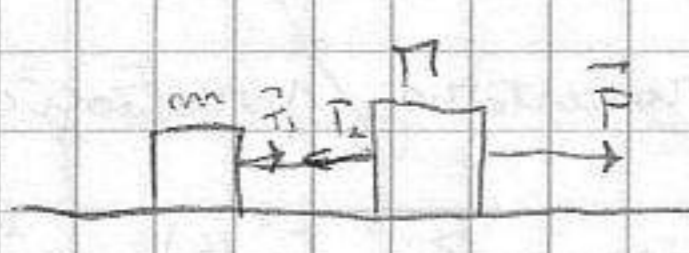
Clampato le F. di attrito (F. che non compiono lavoro, conserv. e non conserv.)  
 $\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc} + \vec{N} \rightarrow$  invariato nel Td. lavoro E.C.  $\Delta E_m = \int_{0,1}^{2,2} \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} = W$   
 (non conservative)  $\rightarrow$  TRAZIONE DEL ROLO

(gli rotoli con traiettorie rettilinee non è problema, ma  
 ad es. problema della coppia di prima era IRRESOLUBILE)

11-3-2005 (Vedi ex XIV)

$$\vec{F} = - \frac{dE_p}{dx}$$
 se la F. conservabile

17-3-2005. (meccanica in corso su 2 principi)



( $M$  è soggetto a  $\vec{F} = \vec{F}_2$ ); in ora importa  $\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$

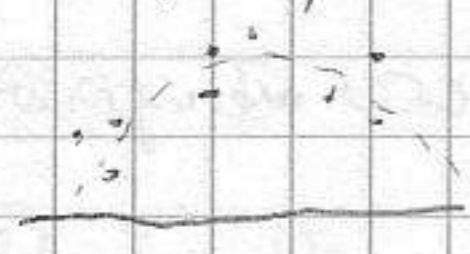
$\rightarrow$  sistema si vede agiscono  $\vec{F}, \vec{T}_1, \vec{T}_2$  (e qualcosa

di attrito) le forze quando sono viste come sistema  $\vec{T}_1, \vec{T}_2$  sono

FORZE INTERNE (al sistema),  $\vec{F}$  sono FORZE ESTERNE

SISTEMI su P. TI RASTERIZI; forze classificate in ESTERNE e INTERNE

Ex. lancio proutique di "mani legate"; forza veramente moto parabolico!  $\rightarrow$  c'è  
 un punto, una "posizione media", che effettivamente ha moto parabolico.



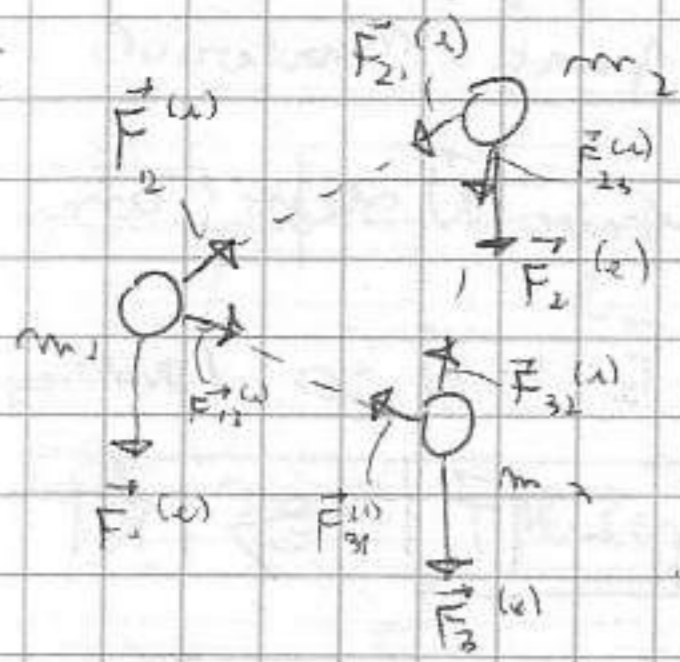
e si muove con legge determinabile con precisione,  
 senza conoscere struttura interna.

F. interne in sistema punti - sono  $\vec{T}_{opp}$  come forze di interazione

④ forze raggruppabili a coppie e - per ciascuna coppia - una F.

intorno e uguale e controlla ad un'altra.

Ex:



3 p.ti materiali che interagiscono; le loro  
x ord, e in ognuno opera lo  $\vec{F}$ . I fili sono  
teli e quindi corpi intorno ad altre leggi su Newt.

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2^{(e)} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} \\ m_3 \vec{a}_3 = \vec{F}_3^{(e)} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} \end{cases}$$

eq. moto 3 p.ti materiali, ma noi vogliamo moto sistema  $\rightarrow$  del loro movimento  $\vec{F}_i$ )

Sappiamo che  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ;  $\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}$ ;  $\vec{F}_{31} = -\vec{F}_{13}$ . Sono le componenti del N.M. su

eq.  $m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_2^{(e)} + \vec{F}_3^{(e)}$  (le altre si semplificano)

rimane somma delle forze esterne:  $\vec{F}^{(e)}$

Stendiamo N.M. sup. :  $\vec{a}_1 = \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}_1$

(lo stesso per  $\vec{a}_2 = \ddot{\vec{r}}_2$ )

$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 + m_3 \ddot{\vec{r}}_3 = \vec{F}^{(e)}$  Applico

la regola derivata; la somma derivata e derivata

della somma:  $\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3) = \vec{F}^{(e)}$

$\vec{\pi} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3$ ; Vedremo qualcosa come  $\vec{\pi} \frac{d^2}{dt^2} \vec{\pi}$  acc. di un punto scelto  
fissiamo la mano e concentrate

Definiamo  $\vec{r}^{(c)} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{M}$

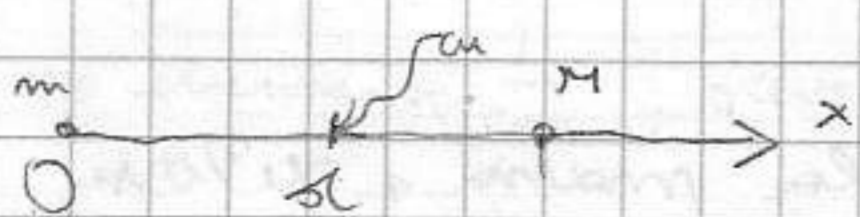
CENTRO DI MASSA

nota di "posizione media"  
 $\downarrow$   
e' posizione calcolabile  
de m'insieme come se tutto il  
 $\vec{\pi}$  del sistema e' concentrato

nel punto e come se tutte le forze agissero su quel punto.

(CORPI RIGIDI = distanze invariate tra punti materiali)

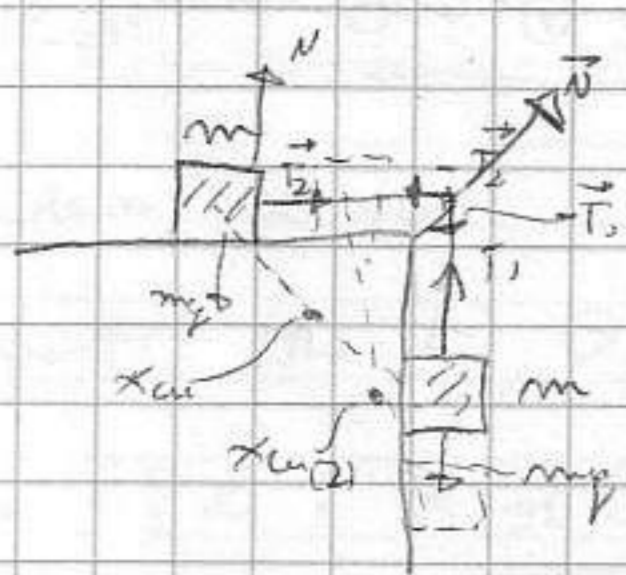
Ex: sistema di 2 punti:



$$X_{cm} = \frac{m \cdot 0 + M \cdot (d+l)}{m+M} = \frac{M}{m+M} (d+l) = \frac{d+l}{1 + \frac{m}{M}}$$

Se  $M \gg m$ ,  $X_{cm} \approx d+l$ ; se  $m \ll M$ ,  $X_{cm} \approx 0$

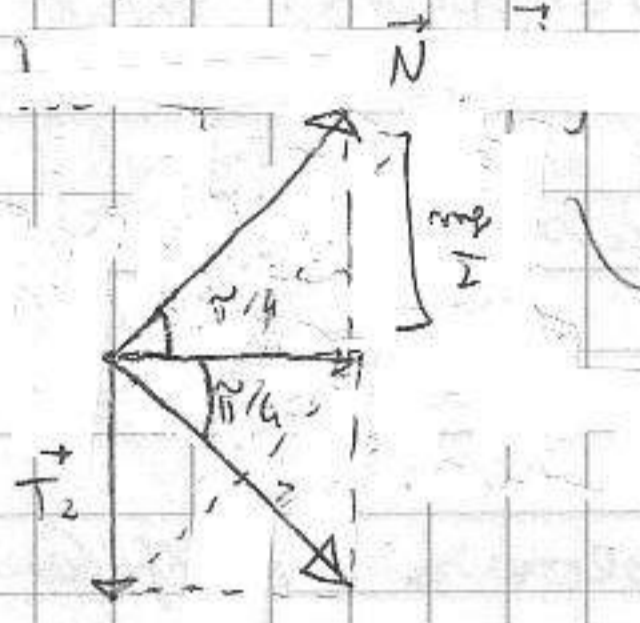
Ex:



Piano liscio, m collegato da filo inestensibile su  
m trascorrevole lungo tavolo il sistema; il corpo

2 si muove in m, vogliamo traiettoria del C.M.

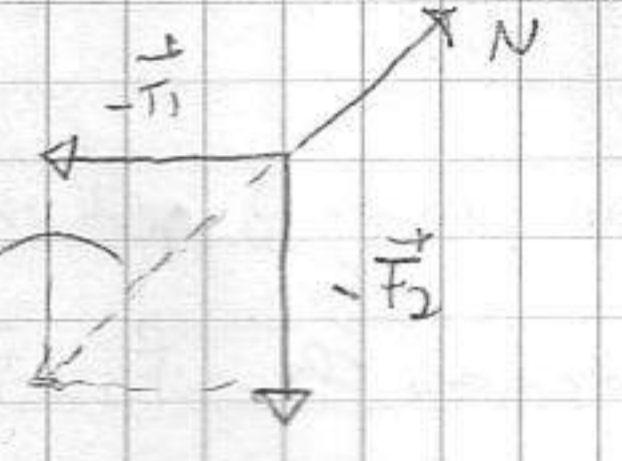
$\vec{T}_1 \neq \vec{T}_2$ . Devo considerare azione Martegno.  $(-\vec{T}_2, -\vec{T}_1)$ , vincolo. Azione filo agilo nel filo di reazione con  $\vec{N} \Rightarrow$  sistema di 3 punti materiali (1 fermo, gli altri muovono).  $F^{(e)} = mg + \vec{N}$ . Per determinare  $\vec{N}$  devo conoscere  $\vec{T}_1 = \vec{T}_2$ ;  $(|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|) \Rightarrow \vec{N}$  è diretta a  $45^\circ \rightarrow -\vec{T}_1 - \vec{T}_2 + \vec{N} = 0$  (Martegno e fermo). Accelerazione mano è uguale  $\rightarrow |\vec{T}_2| = mg - |\vec{T}_1| \Rightarrow |\vec{T}_1| = \frac{mg}{2}$



unich F. esterni

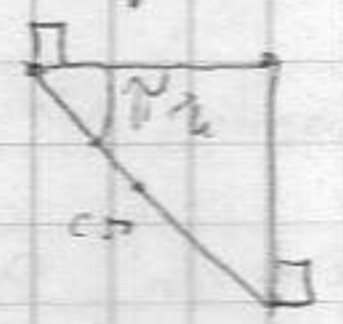
modulo di  $\vec{N}$

$$mg \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{mg}{\sqrt{2}}$$

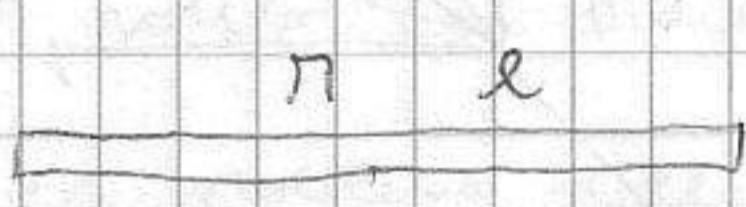


simultaneamente F. esterni e  $mg$ , costante, risulta a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   $\sin$ . a risultante  $\rightarrow$  si muove con mot. unif. accelerato

in traiettoria rettilinea inclinata di  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   $\sin$ . a risultante

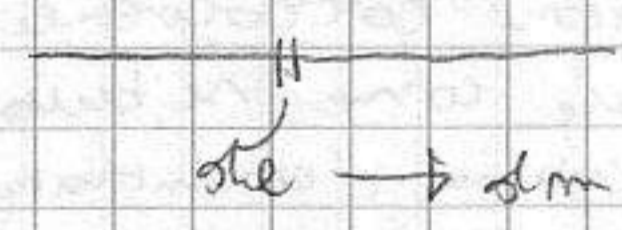


Es: barra di lunghezza  $l$  e massa  $M$ .



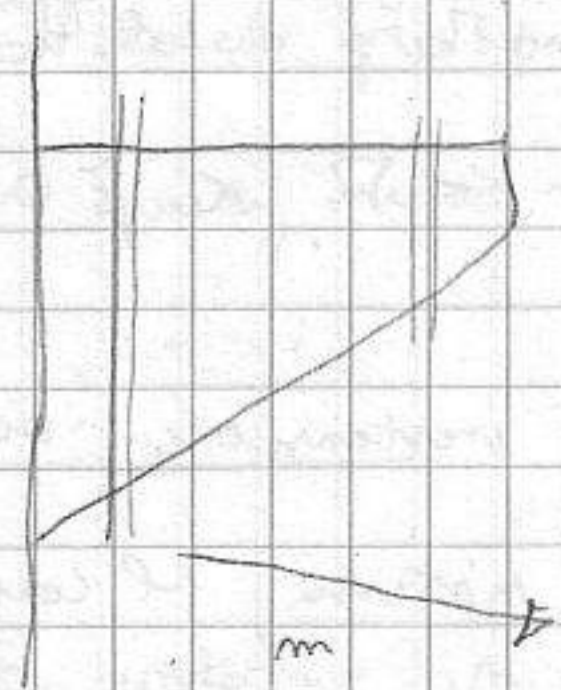
È un sistema "continuo", ovvero controllore singole molecole. Voglio p.t. di vista macroscopico.

È barra omogenea  $\rightarrow$  massa distribuita uniformemente lungo  $l$ . È struttura approssimabile a oggetto lineare (azione trasversale  $\ll$   $\sin$  a legge). Si introduce la DENSITA' di MASSA.  $\downarrow$  Penso alla barra con  $U$  elementi di lunghezza e massa  $\frac{1}{U}$ ; allora a gl. una mano  $gl_m$



la relazione è:  $dm = \rho dl$   $\rightarrow$  Densità lineare di massa

se elemento è omogeneo e costante, e nota  $M/l$ .



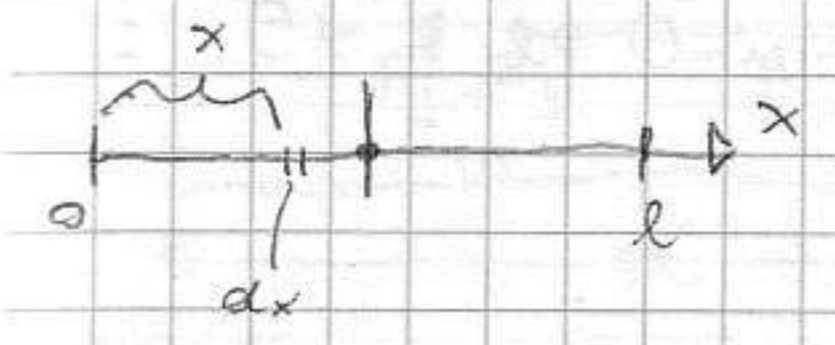
Qui a posto di  $dl$ , la massa è variabile. Schemati p.to oggetto come lineare, ma la densità è variabile.

È semplice calcolare le cc. (integrate)

Comp. int. rif. lin.;  $X_{cm} = \int \frac{1}{M} \cdot x \cdot dm = \frac{Pl}{M} \int_0^l x \cdot dx = \frac{Pl}{M} \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{l}{2}$

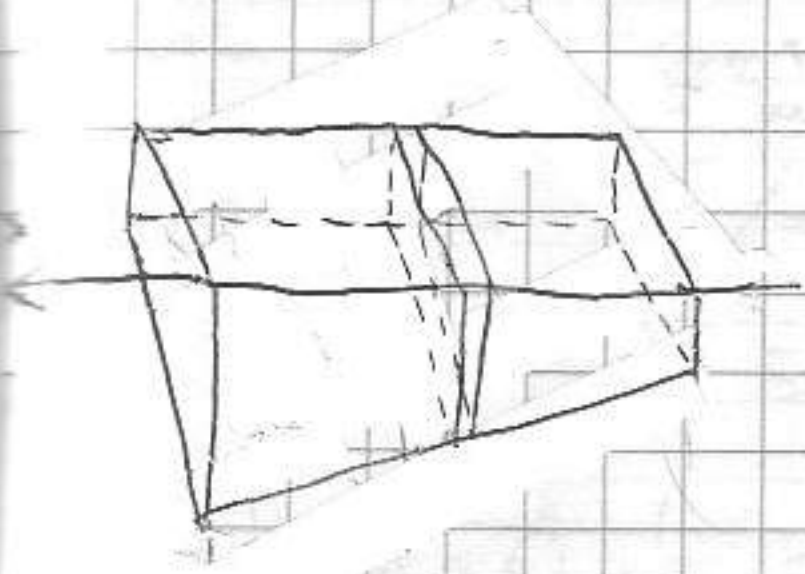
posizione dell'elemento  $\frac{1}{\infty} \rightarrow$  la sua massa

$\boxed{\frac{l}{2}}$



22-3-2005 Il centro di massa e' punto in cui si applica un vettore posizione:

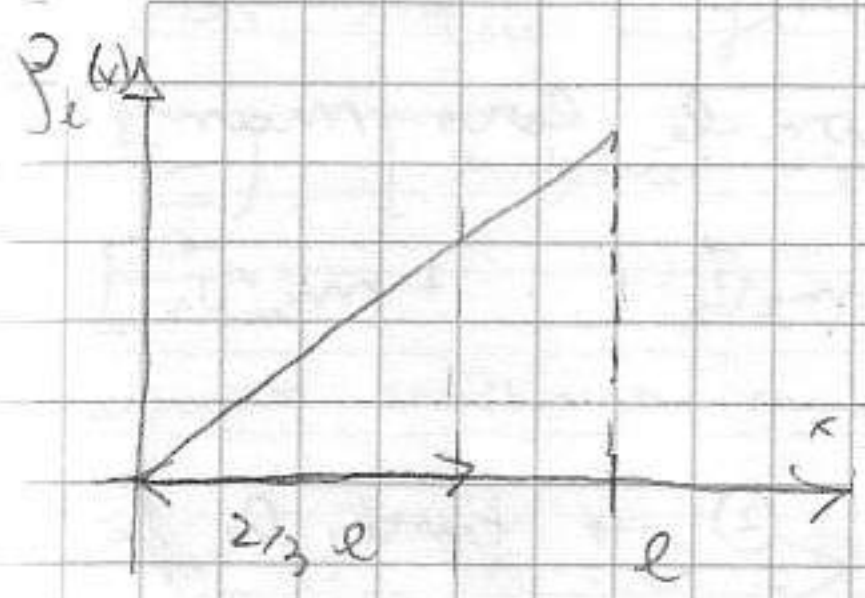
$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^n m_i \vec{r}_i$ ; ex:  $m_1 d_1 = m_2 d_2$  ; distanze masse lineari.



trovare a mo' altro:  $\rho(x) = \alpha x$ ;  $M, l$ . Det a

non solo problema,  $dm = \rho dx$ ;  $M = \int_0^l \rho dx = \alpha \int_0^l x dx = \alpha \frac{l^2}{2}$ ;  $X_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^l x \rho dx$

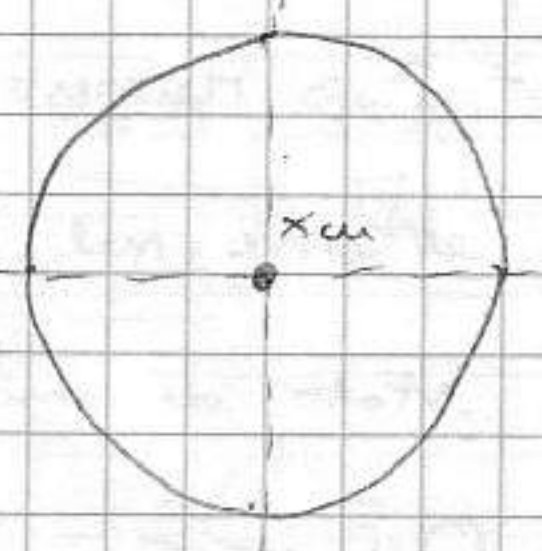
$= \frac{2}{\alpha l^2} \alpha \int_0^l x^2 dx = \frac{2}{l^2} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{2}{3} l$



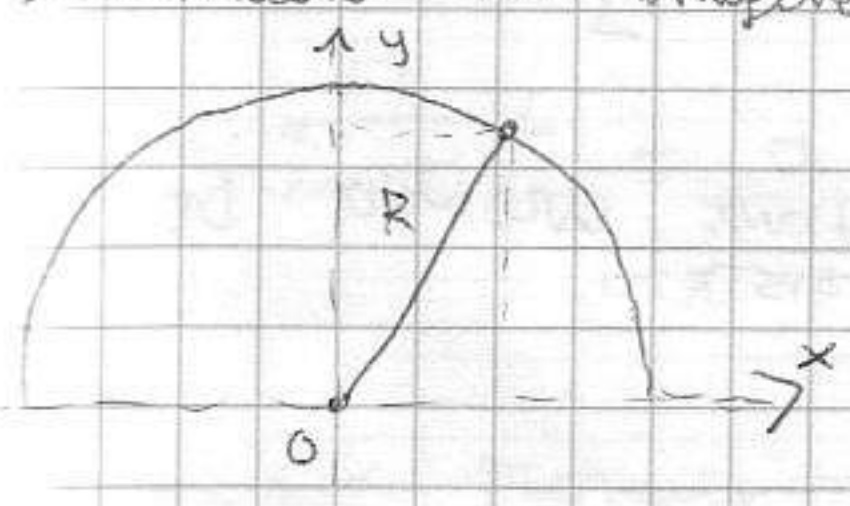
Comp. barra omogenea CIRCOLE

Se individuiamo alcuni

2 assi di simmetria della struttura, il cui e' l'intersezione di 2 assi;



Struttura non omogenea (ex semicerchio omogeneo):



Concentrati nella forma.  $\downarrow$  l'asse di simmetria  $\rightarrow$  cui e' su quell'asse.

Dobbiamo sett. solo coord. y. Si usa definizione:

$y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm$  (V punto, meno le ordinate (barrate))

dei punti (ovvero con la loro massa)

Prendo element  $\frac{1}{\infty}$ ; scio' moderno lungo

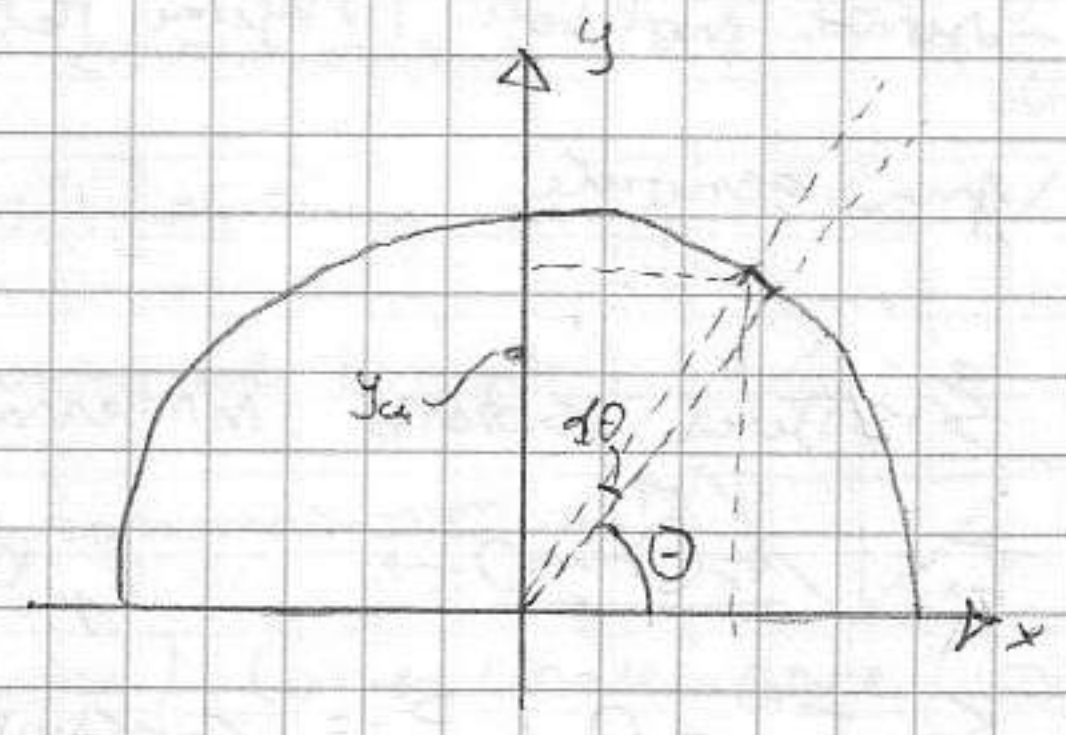
circ. ; conviene riferirsi a coordinate

polari  $[0 \leq \theta \leq \pi]$ . Nella barra M

prendo element  $x, x+dx$ ; qui facciamo

elemento tra  $\theta, \theta+d\theta$ . determino la massa dm dell'elemento;

$dm = \rho \cdot R d\theta$ ;  $\rho$  come in lega a coord. geometrica!



Poiché tratto massa è omogeneo,  $M = \rho \ell \cdot \overline{\pi R^2}^{\ell}$ ; ci manca la  $y$ :  
 (dalla figura)  $y = R \sin \theta \rightarrow y_{cm} = \frac{1}{\rho \ell \pi R} \int_0^{\pi} R \sin \theta \rho \ell R d\theta =$

$$\frac{R^2 \rho \ell}{\rho \ell \pi R} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{R}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \boxed{\frac{2}{\pi} R}$$

Eq. moto C.T.

$$\vec{F}^{(e)} = M \frac{d^2 \vec{r}_{cm}}{dt^2} = M \frac{d \vec{v}_{cm}}{dt} \quad \text{dove } \vec{v}_{cm} = \frac{d \vec{r}_{cm}}{dt}$$

forma molto utile x sistemi non soggetti a F. esterne.

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}), \quad \vec{v}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

(Velocità media pesata delle velocità dei punti con le loro masse)

Se un sistema è costante,  $\vec{F}^{(e)} = \frac{d}{dt} [m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n] \rightarrow$  (2)

- P. to ristretto:  $\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v})$ ; - SISTEMI PURI: (2)  $\rightarrow$  tutte le forze esterne sul sistema sono legate a var. temporali proprie legate a stato di moto del p.to materiale o sistema

QUANTITÀ di MOTO  $[P = m \vec{v}]$ ;  $[P = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i]$

quand'è funzionale (legata direttamente alla forza)

$$\vec{F}^{(e)} = \frac{dP}{dt}$$

$\rightarrow$  1 EQUAZIONE ASSOCIATA DEI SISTEMI

Ma la massa cambia con la velocità, e'  $\propto$ . Per  $v \approx c$  gli effetti sono notevoli (regime relativistico); non vale  $F = m \vec{a}$ , ma  $\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v})$  più generale

SISTEMA ISOLATO: sistema soggetto a F. interne (2o + p.t. mat.)

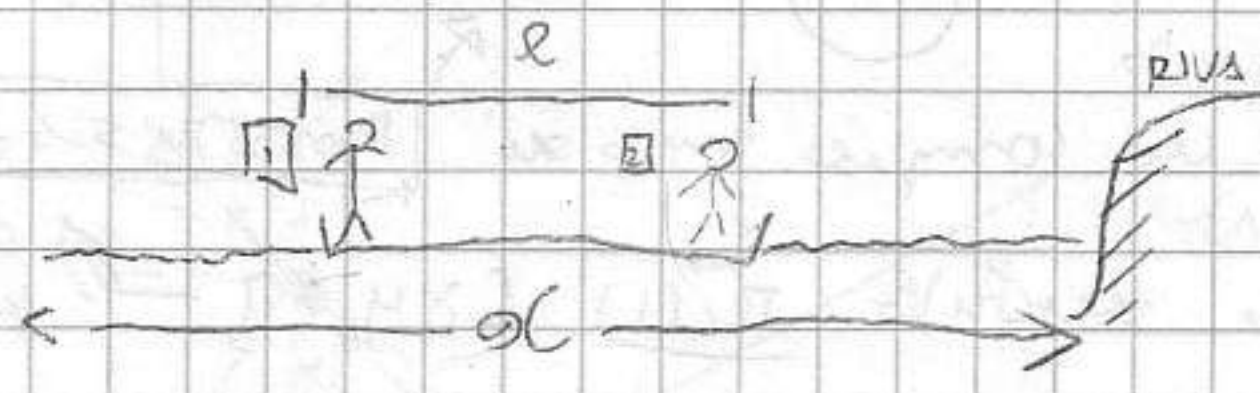
Ex:  $\leftarrow \overset{m}{O} \overset{m}{\rightarrow}$ ; Conservazione e relazioni

Se  $F^{(e)} = 0$ ,  $\vec{P} = \text{costante} \rightarrow$  PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DEL  $\vec{P}$

(46) (conseguenza matematica 2° principio din.) Valida anche in ambito relativistico (in una onda x particelle elementari)



Ex: Zattera. Vogliamo muovere verso la ruota; mi sposta verso l'altro lato



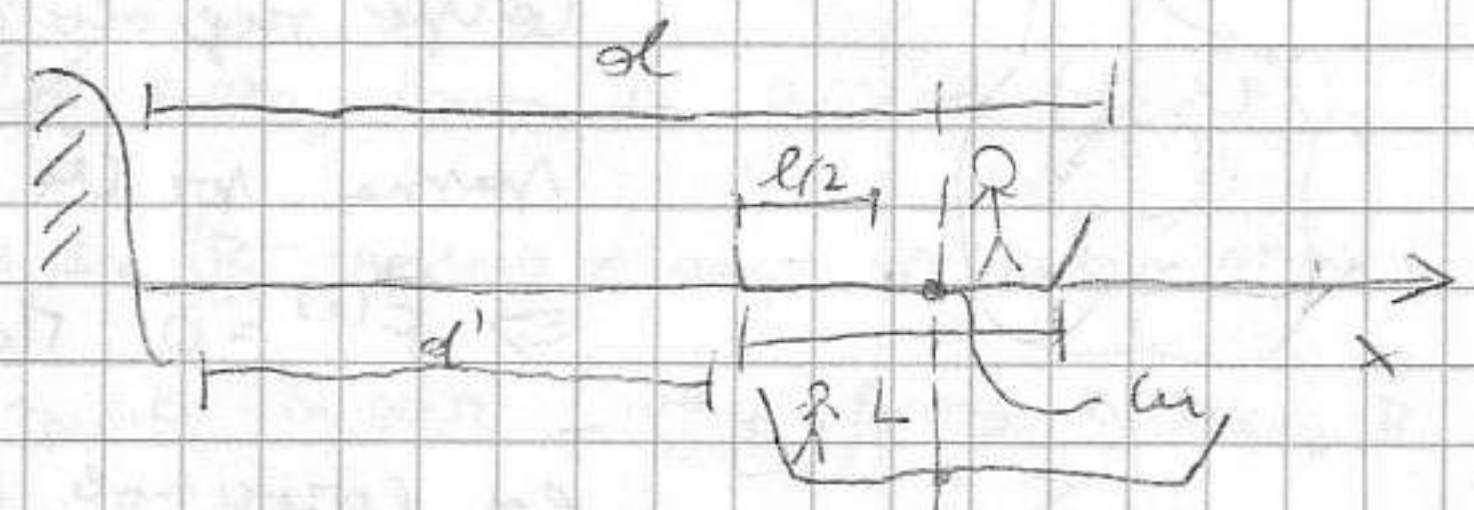
Zattera. Avviciniamo in [2] il sistema verso la ruota. Ex pu  
SISTEMA ISOLATO (noi e zattera)

Tore non opporre resistenza a moto zattera. Comincio grazie a  $\vec{F}_{attr.}$  + zattera  
e me va indietro. In [2] ci troviamo a certa  $d$ . Partono a muovere zattera:

zattera ferma; cominciamo una certa forza. Deve esserci dipendenza tra  
m persona e M zattera  $\left[ \frac{m}{M} \right]$

Imp. nit. Rif. Sistema nit.

si  $\vec{P} \geq k$ ; quando siamo fermi



$\vec{P} = 0 \Rightarrow x_{cu}$  è fermo. Det.  $x_{cu}$ . Applichiamo def:  $x_{cu} = \frac{m d + M}{m + M}$

$\frac{d - \frac{L}{2}}{2}$  [ sistema opposto omogeneo ]

Quando inizia a muoversi si muove zattera, moto complesso. Etenso  $u_y$ .

isolato,  $\vec{P} = \vec{k} = 0 \Rightarrow x_{cu}$  non si muove;  $d$  uomo =  $d'$ ; lo  $d$  di  $x_{cu} =$

$$d' + \frac{L}{2}; \text{ in [2] } x_{cu} = \frac{m d' + M (d' + \frac{L}{2})}{m + M} = \frac{m d' + M (d - \frac{L}{2})}{m + M} \quad \text{II}$$

Risolvenolo  $(m + M) d' + \frac{M}{2} L = (m + M) d - \frac{M}{2} L \Rightarrow \underline{d' =}$

$$d - \frac{M}{m + M} L = d - \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} L, \quad \text{se } \frac{m}{M} \rightarrow 0, d' \approx d - \frac{L}{2}; \quad \text{se } \frac{m}{M} \rightarrow \infty, d' \approx d$$

(zattera comincia solo a noi)

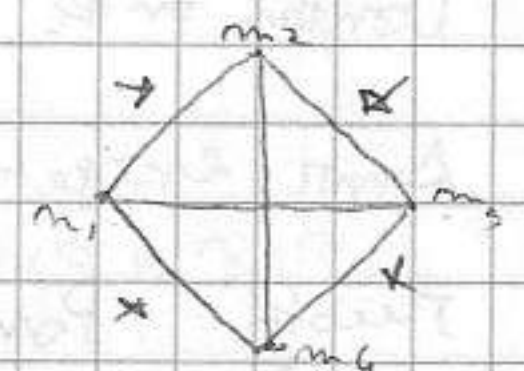
(principio propulsione a reazione)

21-3-2005 La somma delle  $F_{esterne}$  è = a ser. imp. a tempo della var. della

q. gli moto + (somma assoluta manie del sistema + corrispondenti  $v$ )  $\cdot \vec{F}^{(e)} = \frac{d}{dt} \vec{P}$

Tra i p. ti materiali c'è classe dei CORPI RIGIDI: sistema di p. ti mat /

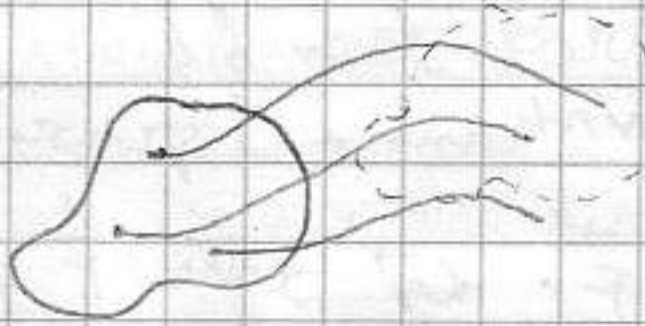
lo  $d$ . tra 2 qualsiasi punti del sistema non varia nel tempo.



- sistema INDEFORNIBILE. ( $\vec{I}$  in matrice) - approssimazione

Q. tipo di moto può fare il corpo rigido (come corollari APOSTOLI VEDIANO)

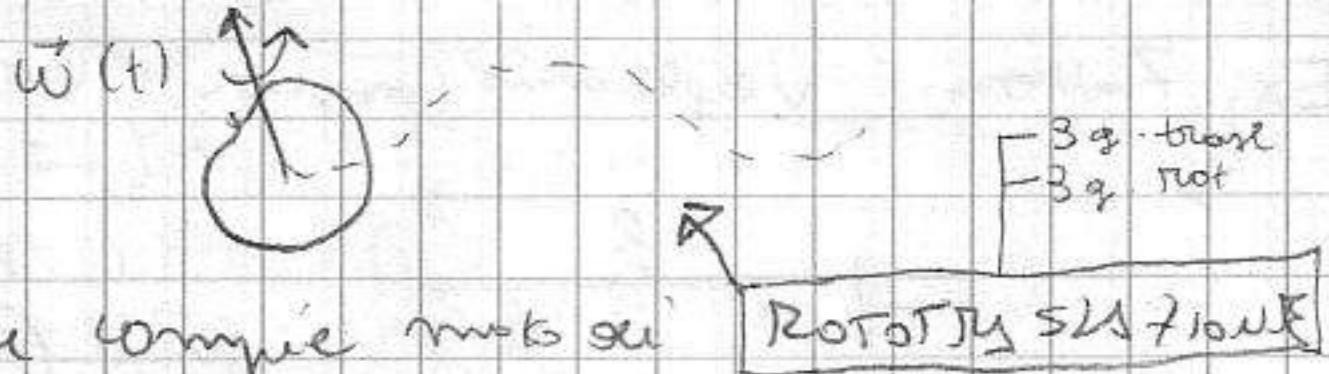
• TRASLAZIONE



Tutti i punti del sistema compiono

un'una traslazione  $\rightarrow$  Basta situazione (47)

il moto del C.M.

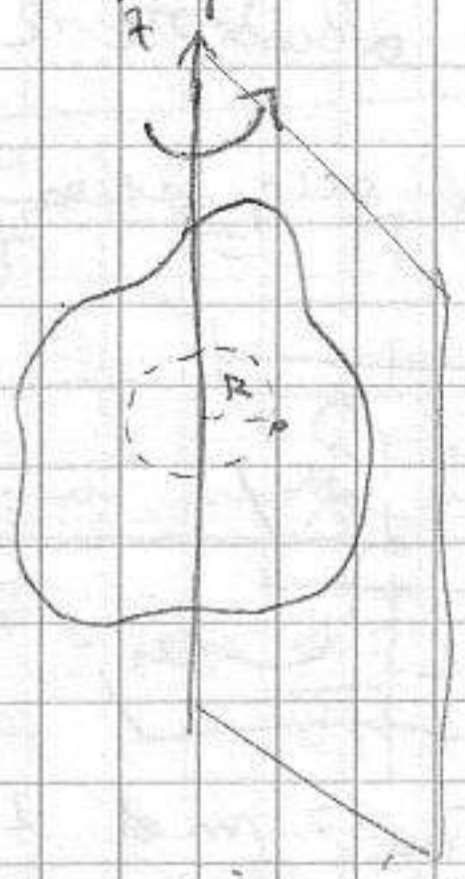


• ROTAZIONE, insieme a 1 in generale il cui compie moto di

Traduzione necessita 3 parametri > errore scritto  $\vec{r}_i(t) [x, y, z]$   $\rightarrow$  6 parametri

Per la rotazione si delle definite  $\vec{\omega}(t)$  (vettore) avente 3 gradi di libertà

Noi semplifichiamo eliminando  $T$  e ruotando intorno ad un asse fisso. - caso + semplice x corpo rigido



Bloccando l'asse, le traiettorie dei punti del

corpo rigido saranno circolari. Se un rotazione

parma per  $\omega$ ,  $\omega$  è fermo ma corpo si muove

$\Rightarrow \vec{F}(k) = 0$ . Ma il ruolo forza per rotazione + la 1

eq. cinematiche non basta per perché si riferisce

ai gradi di libertà relativi alle traslazioni + altre eq. x derivare rest.

L'unico parametro che interviene è  $\Theta$  (angolo

del moto unidimensionale). Operazioni rotazione

non sono commutative e si introducono matrici



Si possono associare dei vettori alla  $\vec{\omega}$  o vettore lungo vettore  $\hat{z}$  e la

lue componente è derivata dell'angolo risp. al tempo  $\vec{\omega} = \dot{\Theta} \hat{z}$  (simile

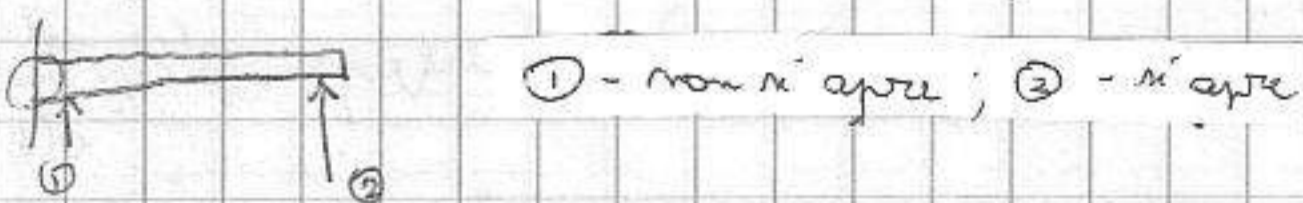
a  $\vec{v} = \dot{x} \hat{i}$  (Rotazioni FINITE non si possono derivare da vettori

(solo se si considerano  $\infty$ !)

Approccio utile a capire entità responsabile

rotazione. Non è solo la  $F$

Applica  $\vec{F}$  intorno all'asse; es: Porta



Contar anche DOVE è applicata la forza.

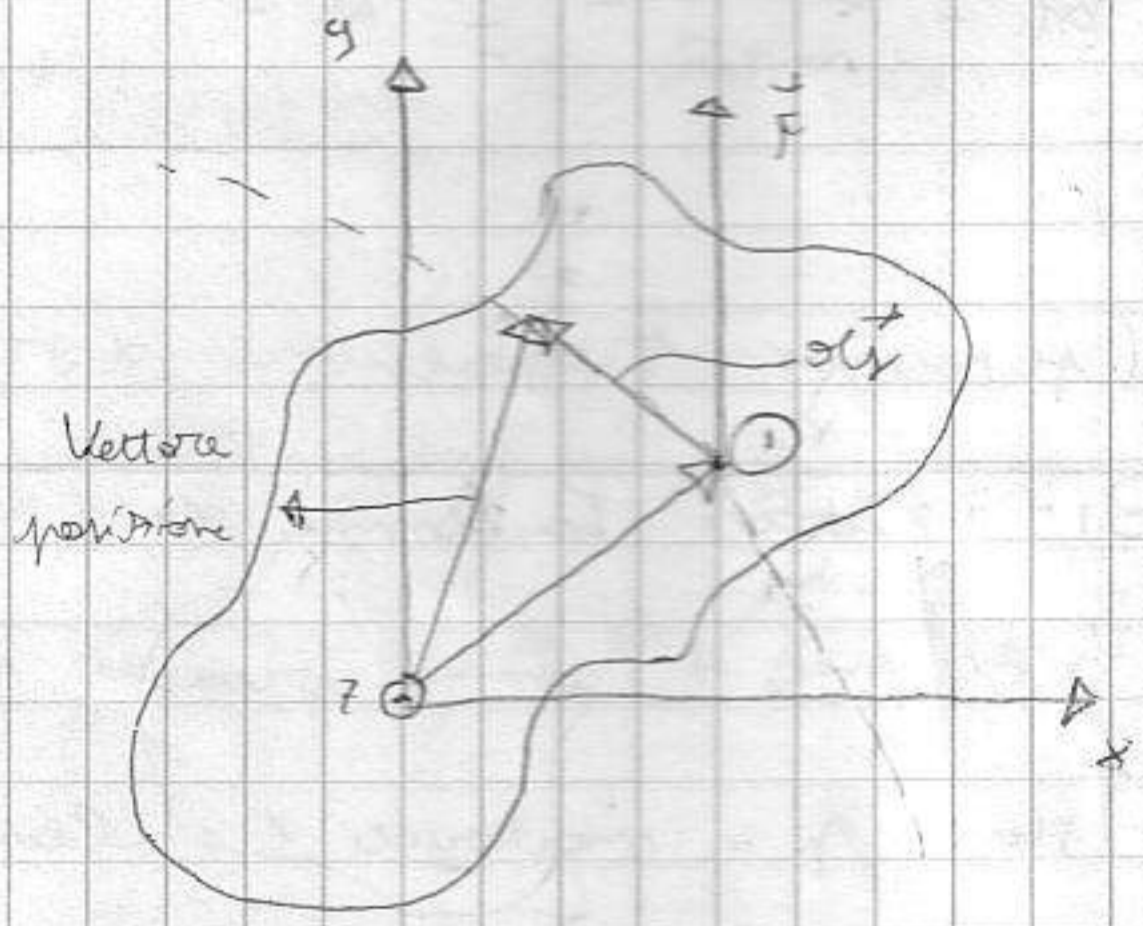
Appr. energetico. Sicuramente E non cambia. Es. applico  $F$  in  $\square$  e corpo

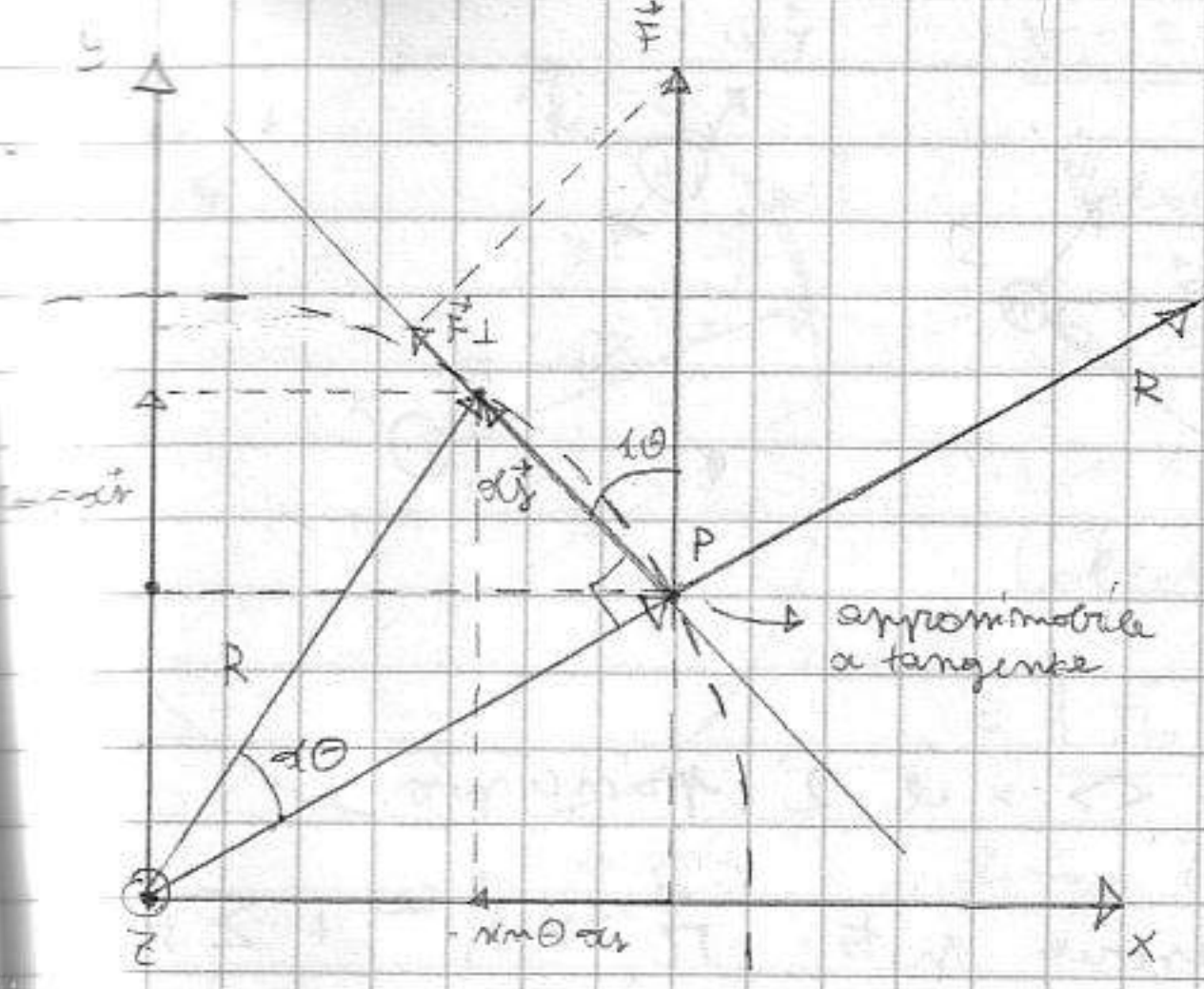
ruota. Possiamo calcolare per un  $d\Theta$  il lavoro della  $F$ .  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Per noi soprattutto sono variazioni angolari. Corpo rigido si muove di  $d\Theta$

$\Rightarrow dW = d\Theta \cdot [\ ]$  + analogo forza. Se ho insieme a 1 grado di lib. de

ruota intorno al suo asse fisso  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$  dove  $\vec{F} = \hat{i} F_x + \hat{j} F_y$





mentre le componenti di  $d\vec{r}$  sono:  $(-R \sin \theta d\theta, R \cos \theta d\theta)$

$$d\vec{r} = -\hat{i} R \sin \theta d\theta + \hat{j} R \cos \theta d\theta$$

$$dW = \underbrace{(-R \sin \theta F_x)}_{y \Delta} + \underbrace{R \cos \theta F_y}_{x \Delta} d\theta$$

$$dW = (x F_y - y F_x) d\theta$$

(Prop. rotazionale e combinazione di F. e r.p.s.)

Componente z del vettore  $(\vec{R} \times \vec{F}) =$

componente lungo z del MOMENTO della Forza, momento assiale  $(\vec{R} \times \vec{F})_z$

$\vec{R} \times \vec{F} = R F \sin \theta$  modulo componente  $\perp$  a (R-traslate x forza applicato in stesso p.to)

Per far ruotare corpo si deve dare spinta in direzione  $\perp$  a forza stessa; R e'

il BRACCIO della rotazione. MOMENTO e' prodotto vettoriale del vettore

posizione con il vettore F;  $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{C}$

Abbiamo cinematica e causa mot. Leghiamo grande R.P. tramite Newton

Incl. per ruotare corpo dobbiamo vincere inerzia, non e' la mossa

per a derivare la grandezza  $\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{v})$

Corpo che si muove intorno a z con  $\vec{\omega}$

a centro di  $\vec{C}_z$ . Prendiamo un generico  $m_i$

e vediamo le F. nel punto. Collociamo  $\mathcal{L}_i = x_i F_{yi} - y_i F_{xi}$

con F. dovuta in parte a F. esterne,

parte a F. interne.  $F_y = m_i \ddot{y}_i$  e  $F_x = m_i \ddot{x}_i$ . Quindi  $\mathcal{L}_i = m_i ($

$x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i) = \frac{d}{dt} (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i)$   $\mathcal{L}_i$  e' pus' anche momento

$$\mathcal{L}_{z,i} = \frac{d}{dt} \left( x_i \underbrace{m_i \dot{y}_i}_{P_{y,i}} - y_i \underbrace{m_i \dot{x}_i}_{P_{x,i}} \right) \rightarrow \boxed{(\vec{r}_i \times \vec{P}_i)_z} = \text{MOMENTO}$$

della QUANTITA' di moto

Se F e' dovuta sia a cause esterne che interne, nominato r.p. a r.p.s

oltre alle F. si annullano  $\mathcal{L}^{(i)} \Rightarrow$  otteniamo una grandezza che e'

il MOMENTO ASSIALE delle FORZE ESTERNE

$$\mathcal{L}_z^{(e)} = \frac{d}{dt} \boxed{\vec{L}} \rightarrow \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{P}_i)$$

(angolo q. di moto; MOMENTO ESTERNO o. r. o MOMENTO ANGOLARE)

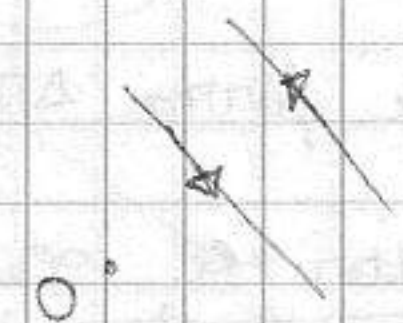
01-4-2005  $\vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$

Prendiamo un p.t.s nello spazio e supponiamo che agisca  $F$ , ne introduciamo il momento,

allora  $\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) \rightarrow$  moto  $\leftrightarrow$  x il 2° principio.

Una volta fissato  $O$  scriviamo legge per il generico p.t.s:  $\vec{\pi}_i \times \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{\pi}_i \times \vec{F}_j^{(i)}$   
 $\vec{F}_j^{(i)} = \frac{d}{dt} (\vec{\pi}_i \times \vec{p}_j)$ . Sommando, i mom. delle  $F$  interne spariscono perché sono nulla stessa scelta e sono  $\pm$  e contr. Quindi  $\sum_{i=1}^N \vec{\pi}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{\pi}_i \times \vec{p}_i$

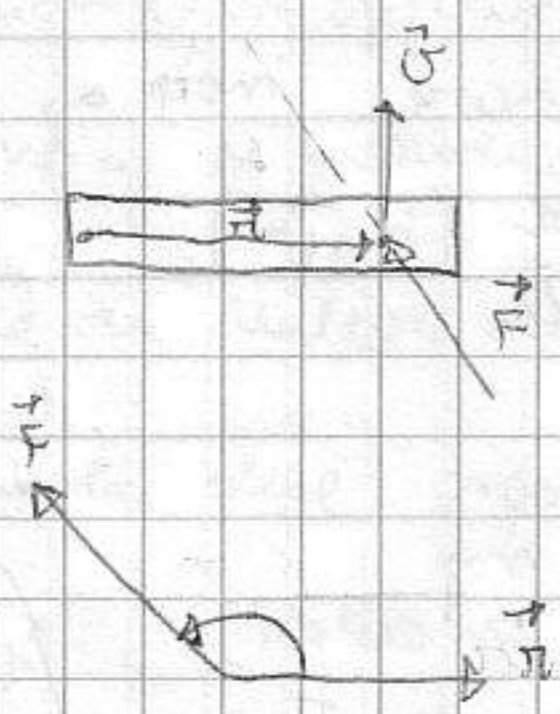
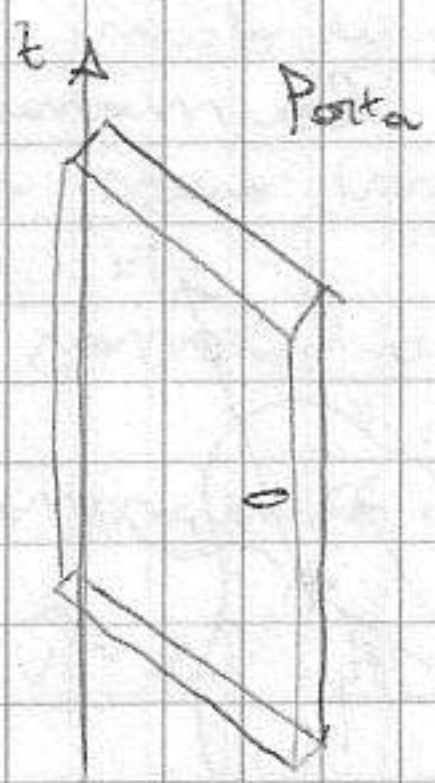
Se ho



mom. non è zero.

$\vec{L}_O^{(e)} = \frac{dL}{dt} \rightarrow$  2 Eq. associate ai SISTEMI

Il cub. rotabile piatto, anche su rotazione, per componente momento:  $L_z^{(e)}$



Prendo un p.t.s qualunque su  $z$  (ex in coordin. al p.t.s di applicazione)  
 $(\vec{r} \times \vec{F})_z$ ; il modulo è comp.  $F_n$  normale, unica causa rotazione.  
 Effetto rot. è var. della  $\vec{\omega}$ . C'è

inerzia che si oppone a rotazione e d non solo della massa, ma anche dalla sua distribuzione. Det. corpo ruotato intorno a  $z$ . Delle

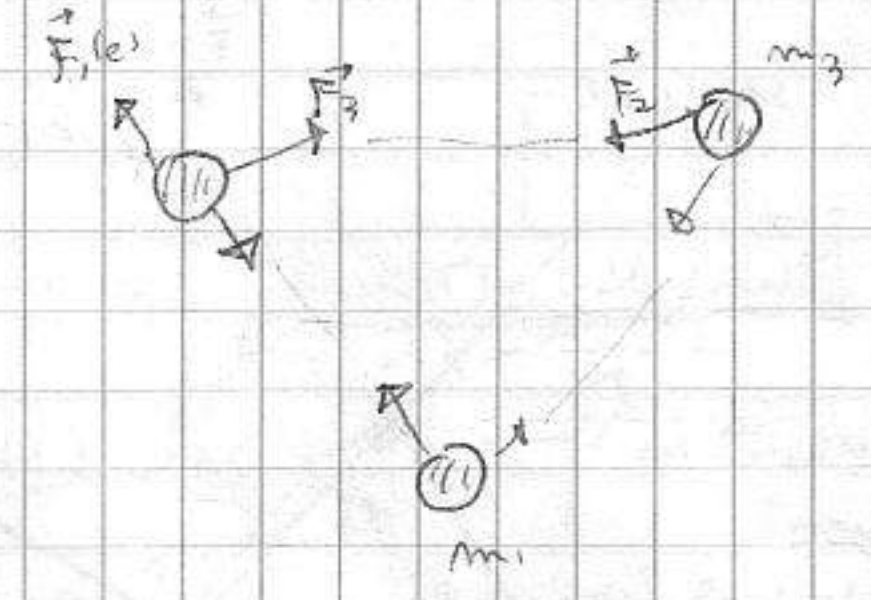
def,  $\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{\pi}_i \times \vec{p}_i$ . Quello che serve

è unicamente  $L_z^{(e)} \rightarrow$  stolla l'eq. coord. abbiamo

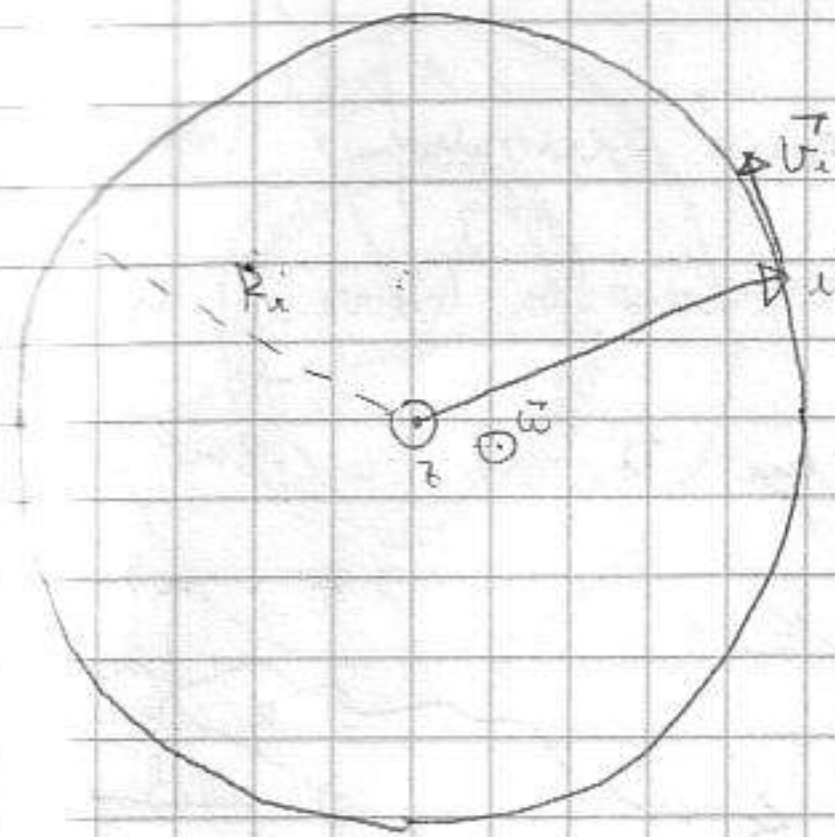
definite eq. rotazione:  $L_z^{(e)} = \frac{dL_z}{dt}$

Prendiamo un generico mi e calcoliamo  $L_z$  [corpo ruota intorno ad asse fisso  $\rightarrow$  moto rot. è definito

da  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{\theta} \hat{k}$ . Tutti i punti compiono moto circolare con stessa  $\vec{\omega}$ . Vogliamo  $\sum \vec{\pi}_i \times \vec{p}_i$  stolla intorno  $\vec{\omega}$  che è unico parametro x derivazione cinematica moti.



$\vec{L}^{(e)} = \frac{dL}{dt}$  non.  $L = \sum \vec{\pi}_i \times \vec{p}_i$



$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$R_i = |\vec{r}_i| \sin \alpha$$

Velocità  $\vec{v}$  non dipende dalla origine  $O$ ;

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i = \boxed{m_i \vec{\omega} \times \vec{r}_i} \quad \text{q. di moto diretta come velocità}$$

$$\text{Calcoliamo } \vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i; \quad |\vec{l}_i| = |\vec{r}_i| m_i |\vec{v}_i| = \underline{|\vec{r}_i| \cdot m_i \cdot \omega R_i} \quad \text{e DIPENDE da } O. \text{ Ruotandoci}$$

lungo  $Z$  cambia  $\vec{r}_i$ . Ma a noi interessa componente

$$\text{lungo } Z \rightarrow l_{i,z} = \text{proiezione su } Z = |\vec{l}_i| \sin \alpha = \omega m_i R_i |\vec{r}_i| \sin \alpha = \underline{\omega m_i R_i^2}$$

$$\text{sommando per tutti i punti } L_z = \omega \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \rightarrow \mathcal{L}_z^{(e)} = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt} (\omega \cdot \boxed{I_z})$$

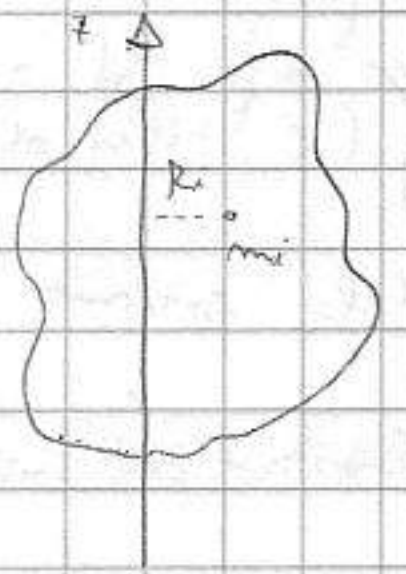
$$I_z = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \quad \text{MOMENTO DI INERZIA DEL CORPO RISPETTO A } Z$$

$$L_z = \omega \sum_{i=1}^N m_i R_i^2; \quad \text{analogo unidimensionale } F_x = \frac{d}{dt} \left( \frac{I}{m} \cdot \frac{U_x}{w} \right)$$

conosci  $m_i$ , calcola  $R_i$ , fai  $m_i R_i^2$  e somma  $\sum m_i R_i^2$

è responsabile dell'inerzia del corpo alla rotazione

Es: barra omogenea  $\pi$ ,  $l$ . Calcoliamo  $I$  rispetto ad assi per estremo ruotante.



Essendo sistema continuo possiamo usare integrale

Prendiamo dist. ref. la  $O$  va in corrispondenza asse

rotazione. Prendiamo elemento  $dx$  con  $dm = \rho dx$  [ $\rho = \pi(l)$ ]

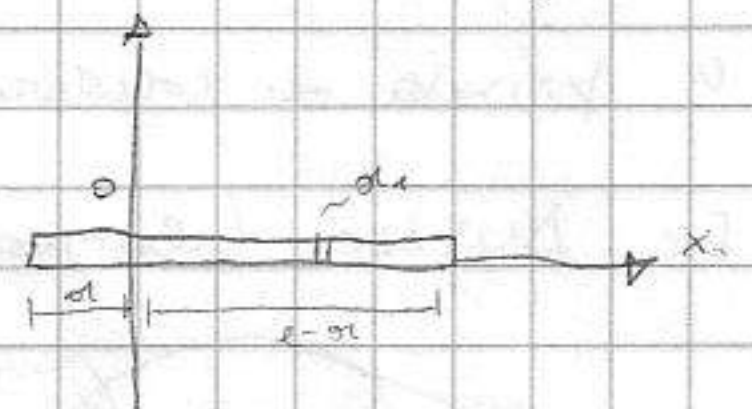
$$\text{Calcoliamo } \sum_{i=1}^{\text{cont.}} m_i R_i^2 = \int_{\text{corpo}} x^2 dm \rightarrow \rho \int_0^l x^2 dx = \frac{\rho l^3}{3} =$$

$$\frac{\pi l^3}{3} \quad \text{Come sempre } I \text{ su camera assi!}$$

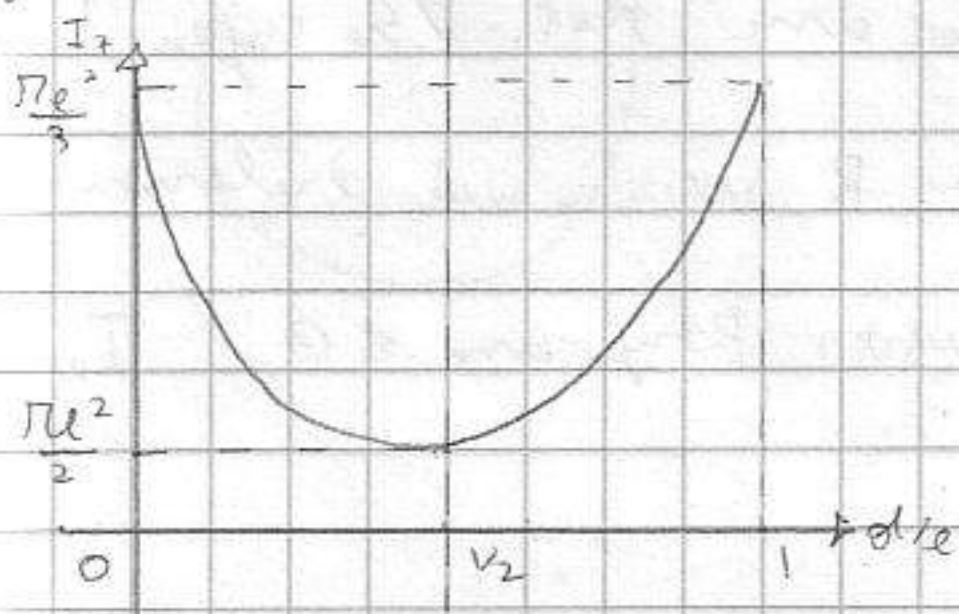
$$I_z = \rho \int_{-d}^{l-d} x^2 dx = \frac{\rho l}{3} [(l-d)^3 - (-d)^3] = \frac{\rho l}{3} [l^3 - d^3 +$$

$$+ 3ld^2 - 3l^2d + d^3] = \frac{\rho l^3}{3} \left[ 1 + 3\left(\frac{d}{l}\right)^2 - 3\left(\frac{d}{l}\right) \right] = \frac{\pi l^2}{3} \left[ 1 + 3\left(\frac{d}{l}\right)^2 - 3\left(\frac{d}{l}\right) + \right.$$

$\left. - 3\left(\frac{d}{l}\right) \right]$ . Come varia  $I$  rispetto a posizione assi!



grafichiamo  $I$  rispetto a  $d/l$ . Andamento parabolico, il minimo è in  $d/l = 1/2$ ,



$$\text{dove } I = \frac{\pi l^2}{12}$$

Spostando l'asse di rotazione verso centro massa,

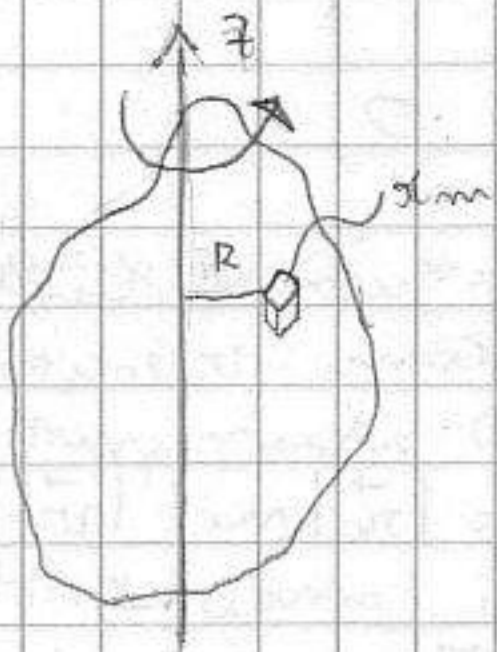
$I$  cresce e risulta simmetricamente; il min coincide

con il centro di massa  $\rightarrow$  non è un caso. Si dim. da,

prendendo  $Z$ , il  $\pi l^2$  di  $I$  è SEMPRE ottenuto facendo passare  $Z$  per  $R_{cm}$ . (51)

05-06-2005

$$I_z^{(e)} = I_z(\omega) \text{ [in questo caso parallelo]}$$



In caso generale por. angolare non si può scegliere Vettore (non possono scegliere rotazione),  $I_z$  - momento di inerzia. Prendi  $dm$ , calcoli la distanza da asse ( $R$ ), poi  $R^2 dm$  e fai somma  $\int R^2 dm$ , supponiamo di conoscere  $I_z$  e

un'altro asse // a  $z$  con distanza  $d$

$I_d$  e' mom. inerzia rispetto asse // a  $z$ . Facciamo un

int. sup. [0 nel  $cm$ , asse  $z$  verso asse rispetto al quale calcoliamo]  $I_{cm} = \int R^2 dm$

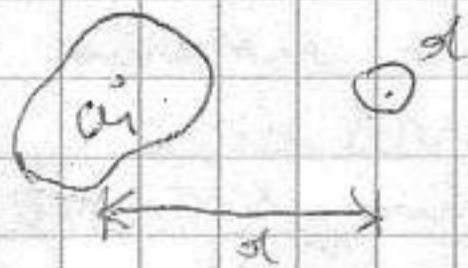
in questo int sup =  $\int (x^2 + y^2) dm$ , Per calcolare  $I_d$  prendo  $R' = \int R'^2 dm$ ,

=  $\int (x'^2 + y'^2) dm$  dove  $x', y'$  sono coord. rispetto ad altro int sup che e' il baricentro del primo in  $d$ ;  $y' = y$  e  $x' = x - d$ ; ho  $\int [(x-d)^2 + y^2] dm = I_d =$

$$\int [x^2 + d^2 - 2xd + y^2] dm = \underbrace{\int (x^2 + y^2) dm}_{I_{cm}} + \underbrace{d^2 \int dm}_{(\text{massa totale}) \cdot d^2} - 2d \int x dm \rightarrow$$

$$+ \left[ \frac{1}{R} \int x dm \right] \text{ e' aritmo CM. - nell'origine, dove } x=0$$

$I_d$  come in tutti i momenti e  
 $cm \rightarrow \pi d^2$ , solo zero'



Momento di inerzia rispetto ad asse distante  $d$  da  $I_{cm}$

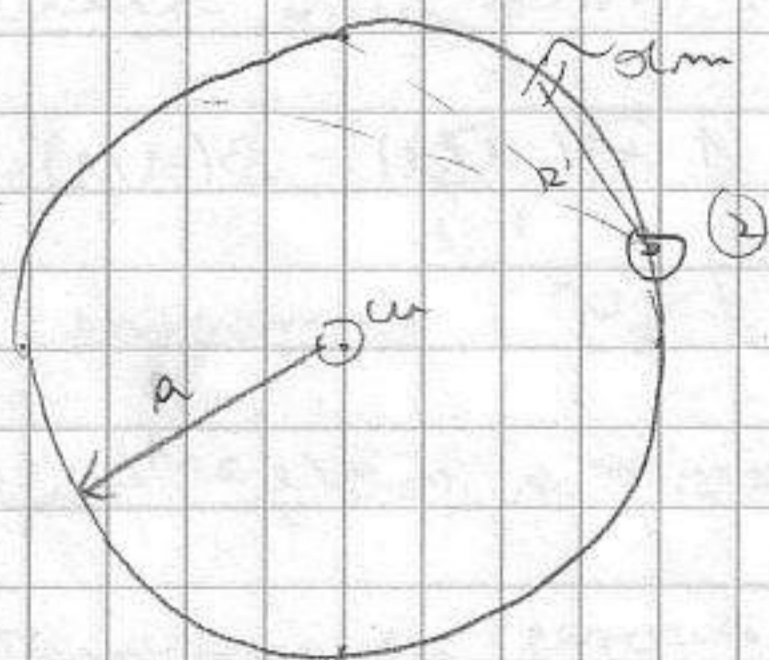
$$I_d = I_{cm} + \pi d^2$$

appena tenere di' visibile come e' distribuita massa  $\rightarrow$  appioppo  $I_{cm}$  (con // a  $z$  per  $cm$ )

$\rightarrow$  TEOREMA DEGLI ASSI // [HUYGENS-STEINER]  $\rightarrow I_{cm}$  ha ruolo speciale, poiche

e' permette di calcolare qualunque  $I$  rispetto a qualsiasi asse // a  $z$  per  $cm$ .

Ex: Disco (lavora omogeneo di massa  $\pi R^2$  di raggio  $R$ ). Quanto vale  $I_{cm}$ !



Prendiamo  $dm$  (aninfilabile a  $r$ , to mat.) con dist =  $a$  ( $R$ )

$$\rightarrow R \text{ e' costante x tutti elementi: } I_z = \int R^2 dm = \pi R^2$$

mom. inerzia e' quantita' intrinsecamente legata ad una distribuzione. massa intorno ad asse rot. / Se voglio  $I$  rispetto

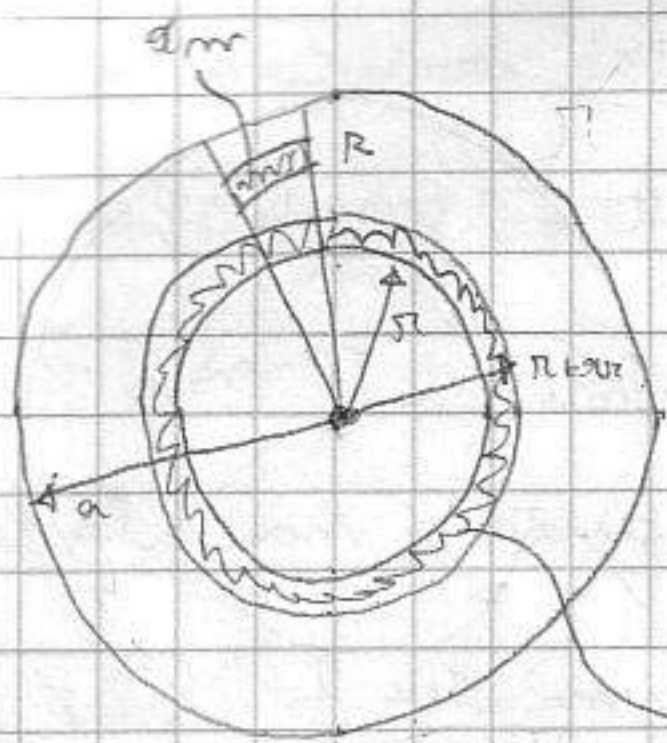
ad asse per lavoro anello.  $R'$  varia con  $e$  elemento,

difficile applicare nel. superiore. Con th. assi // e BAUSE: Pongo asse  $z$  @;  $I_z =$

$$\pi a^2 + \pi a^2 = 2\pi a^2$$

Ex: Disco omogeneo con  $cm$   $\pi$  e  $R$  anello

②  $I_{anello} < I_{anello} \rightarrow$  Stato de' massa ora sul lavoro  $\rightarrow$  va verso centro  $\rightarrow$  diminuisce (a parte di  $\pi, R$ )



Consideriamo una dm su SUPERFICIE.  $\rho = \frac{M}{V}$  (densità)

int. sviluppo. Pensare questo come insieme di tanti anelli

concentrici con spessore  $\delta r$  - considerato come un anello

tra  $r$  e  $r + \delta r$ .  $r$  è variabile che va da 0 ad  $a$ .

$dI = dm \cdot r^2$  → massa anello tra  $r, r + \delta r$ . Introduciamo

densità di massa SUPERFICIALE (quinta dim.)

$$\rho_s = \frac{\rho}{\delta a}$$

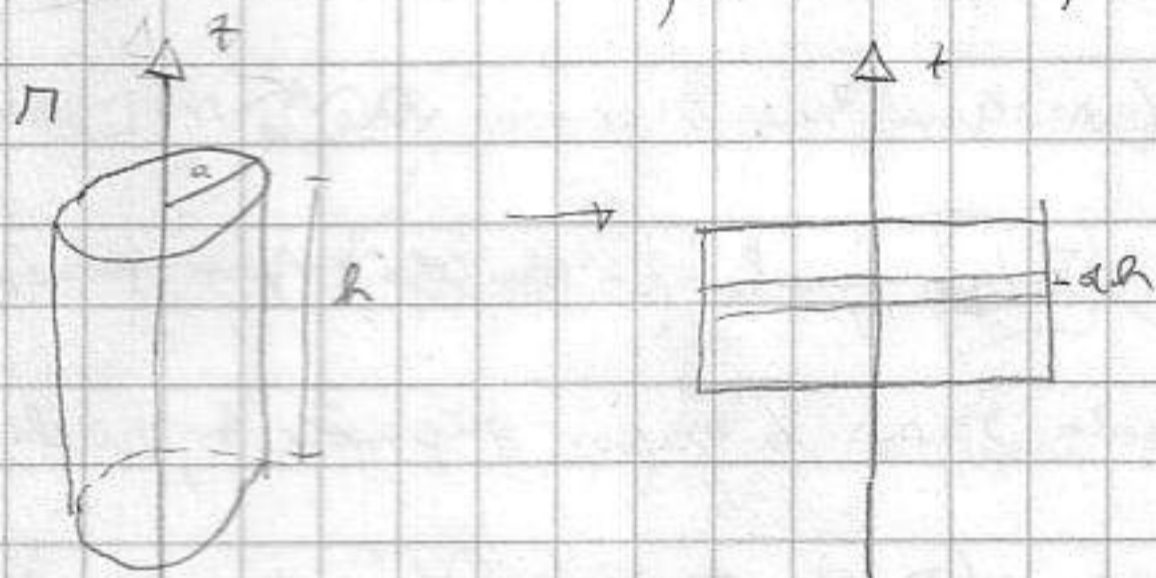
→  $dm = \rho_s \cdot \tilde{A} \left[ (\pi(r+\delta r)^2) - \pi^2 \right]$  area corona circolare =  $\frac{\rho}{a^2} \left[ \pi^2 + 2\pi r \delta r + \pi \delta r^2 - \pi^2 \right]$

→ Immagina  $\delta r$  che va a 0 [q. infinitesima] →  $(\delta r)^2$  è  $\propto$  di ordine superiore → trascurabile

→  $dI = \frac{2\rho}{a^2} \pi r^3 \delta r$ , sommiamo il cont. degli anelli:  $I_{anello} = \frac{2\rho}{a^2} \int_0^a \pi r^3 \delta r =$

$\frac{2M}{a^2} \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^2}{2} \rightarrow$  lo stesso dell' $I_z$  anello

Ex: cilindro con  $\pi$ ,  $l$ ,  $a$ , altezza  $h$ , massa  $M$ . Pensare cilindro come serie di dischi di

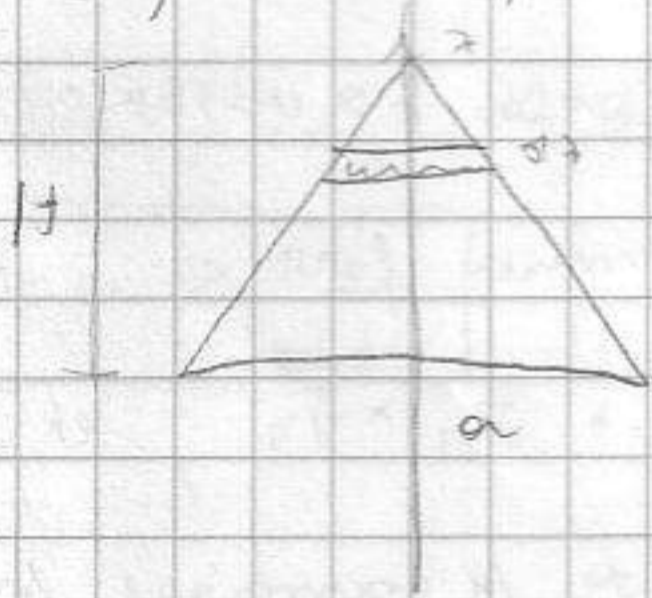


spessore  $\delta r$ , massa  $dm$  e altezza  $dh$

$dI = \int dm \cdot \frac{a^2}{2} \sim \text{cost.} = \frac{\pi a^2}{2}$

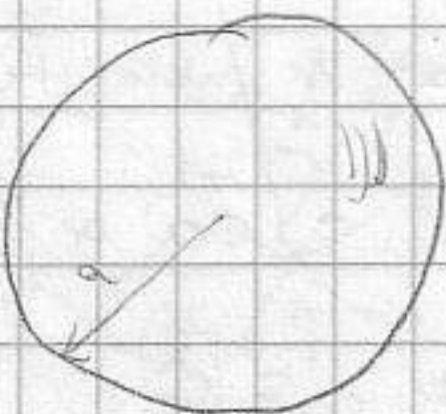
lo stesso per il giro

Ex: cono, massa  $M$ , altezza  $h$ , base  $a$

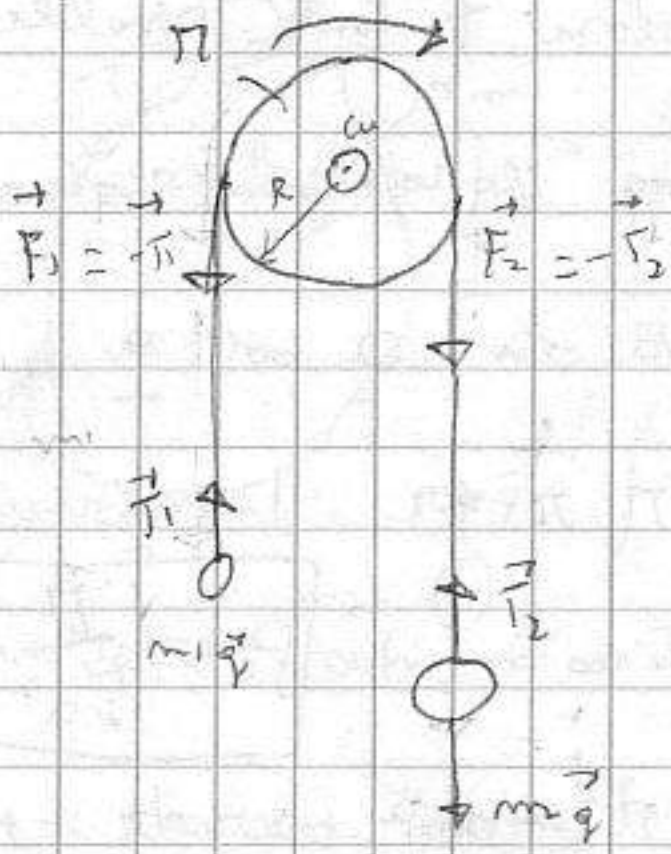


Calcolo  
in

Ex: SFERA PIENA, raggio  $a$ , massa  $M$  [ $I = \frac{2}{5} M a^2$ ]



PROBLEMA di FISICA MODIFICATA; man mano che passano tramite carrucola su manna



$I$  e raggio  $R$  di rulli. Tensioni  $m_1$  (tramite filo) (altrimenti da errore rotazionale moto filo (carrucola).  $T_1 - m_1 g = m_1 a$

e  $m_2 g - T_2 = m_2 a$ , carrucola fissa e non la  $m_1$

quasi trascurabile. Se ruota intorno ad un asse fisso tale  $\gamma^{(e)} \neq 0$

[  $F_P$  punto su cui  $\rightarrow$  la braccio nullo, e l'è anche usato. Vincolosa ]

$\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  fanno ruotare carrucola  $\Rightarrow$  non  $\neq$ ; tensione non

$m_1$  trasmette integralmente, ma cambia (cambia gravità od altro) stabile) sist.

suif. con rot. entrante.  $\gamma^{(e)} = T_2 R - T_1 R = I \ddot{\theta}$  risolvere sistema: ( $a_1 = a_2$ )

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_2 R - T_1 R = I \ddot{\theta} \end{cases}$$

Dobbiamo trovare legame tra  $a$  e  $\ddot{\theta}$ . Prendere punto su

loro filo in carrucola, ogni punto  $m$  muove con certa

$a$ . Non si deve rompere  $\rightarrow$  velocità manna  $\Rightarrow$   $a$  è quella carrucola  $\Rightarrow a = \ddot{\theta} R$

Cond. di moto rotazionale.  $\rightarrow T_2 R - T_1 R = I \cdot \frac{a}{R}$  (sistema 3eq, 3inc);  $\text{vale } (m_2 - m_1) g =$

$(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}) a \rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} g$   $\frac{\pi}{2}$ ; la carrucola, per non muoversi

"meno"  $\pi/2$ , quindi accelerazione è piccola sempre a capo superiore, perché si aff.

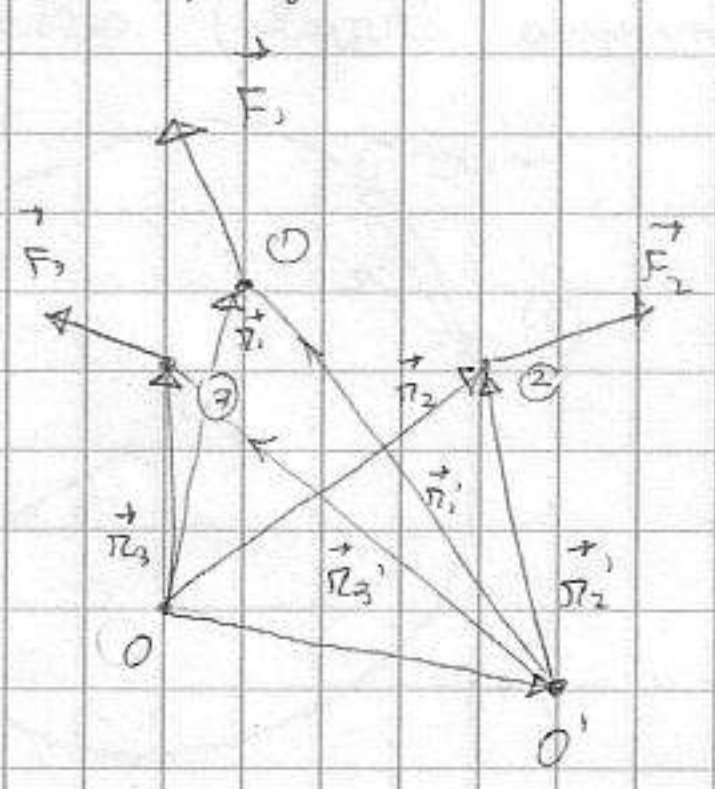
dei due per non far ruotare carrucola. (ruota grazie a  $\gamma^{(e)}$  tramite altris)

06-4-2005, EQUILIBRIO DEI CORPI RIGIDI - centro di massa è fisso, non c'è rotazione

al centro,  $\vec{F}$  e  $\vec{\tau} = 0$  nel tempo.  $\rightarrow \vec{F}^{(e)} = 0, \vec{\tau}_0^{(e)} = 0 \rightarrow$  COND. EQUILIBRIO ma

non basta, infatti anche non conde è scelta zero per momenti forze.

Ex:  $\vec{\tau}_0^{(e)} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$ , ex per



in certo  $\theta$  e  $\Rightarrow$ . Chiamare  $m$  centro il polo

Chiamare vettori posizione;  $\vec{\tau}_0^{(e)} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 +$

$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$ , ma si nota che  $\vec{r}_i =$

$\vec{r}_i = \vec{OO}' \rightarrow \vec{\tau}_0^{(e)} = \vec{\tau}_0^{(e)} - \vec{OO}' \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)$

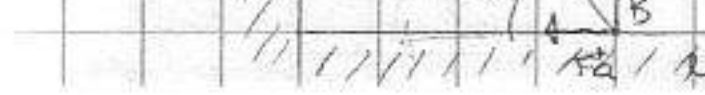
$\vec{\tau}_0^{(e)}$  ha valore indipendente dal polo solo se somma forze è  $\vec{0} \Rightarrow$

COMPLETA libertà nella scelta dei momenti nell'equilibrio.

Ex: Data omogenea  $M$ , è appoggiata a parete liscia e su

piano con attrito per. Se  $d >$  certo valore ottimo non

c'è equilibrio. Quanti sono i valori  $d$  ottimali?





Corpo soggetto a forze zero in cui alle reazioni vincolari: a spinta e pavimento. Nella

parte  $\vec{N} \perp (\vec{R}_A)$  - in B oltre a  $\vec{N}_B$  c'è attrito  $\vec{F}_a$ . Impostiamo cond. equilibrio

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = 0 \rightarrow \vec{R}_A + \vec{P} + \vec{N}_B + \vec{F}_a = 0 & \text{Scegliamo} \\ \vec{M}^{(e)} = 0 \end{cases}$$

non rif. quindi scomponiamo

eq. vettoriali lungo  $x$   $R_A = F_a$ , lungo  $y$   $P = N_B$

Dobbiamo det  $R_A = F_a$ , manca 1 eq. Impostiamo

annullamento momento. Scegliamo il polo. (Scegliamo

che non modifica  $\vec{r}^{(e)}$  perché  $\vec{F}^{(e)} = 0$ ). Conviene

scegliere punto dove passano + forze. (F agiscono

solo nel piano, quindi scegliamo solo 1 componente  $\rightarrow$  Collociamo l'impulso a  $7 \Rightarrow$

eq. vettoriali sul vettore scelto, modulo momento angolare. Non F. zero: F.P. tenuto a

forza su una asta in un punto arbitrario (P+) e il braccio è distanza B e asta per P  $\rightarrow$

$\gamma(P) = P \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha$ , man. in A - fa rotazione asta in un punto; braccio e distanza nulla;

gli altri zero = 0 perché passano per B  $\rightarrow P \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha - R_A \cdot l \sin \alpha = 0$ ,  $R_A =$

$\frac{P}{2} \tan \alpha \rightarrow F_a = R_A = \frac{P}{2 \tan \alpha}$  comparazione sistema / Come det. d) Se asta è

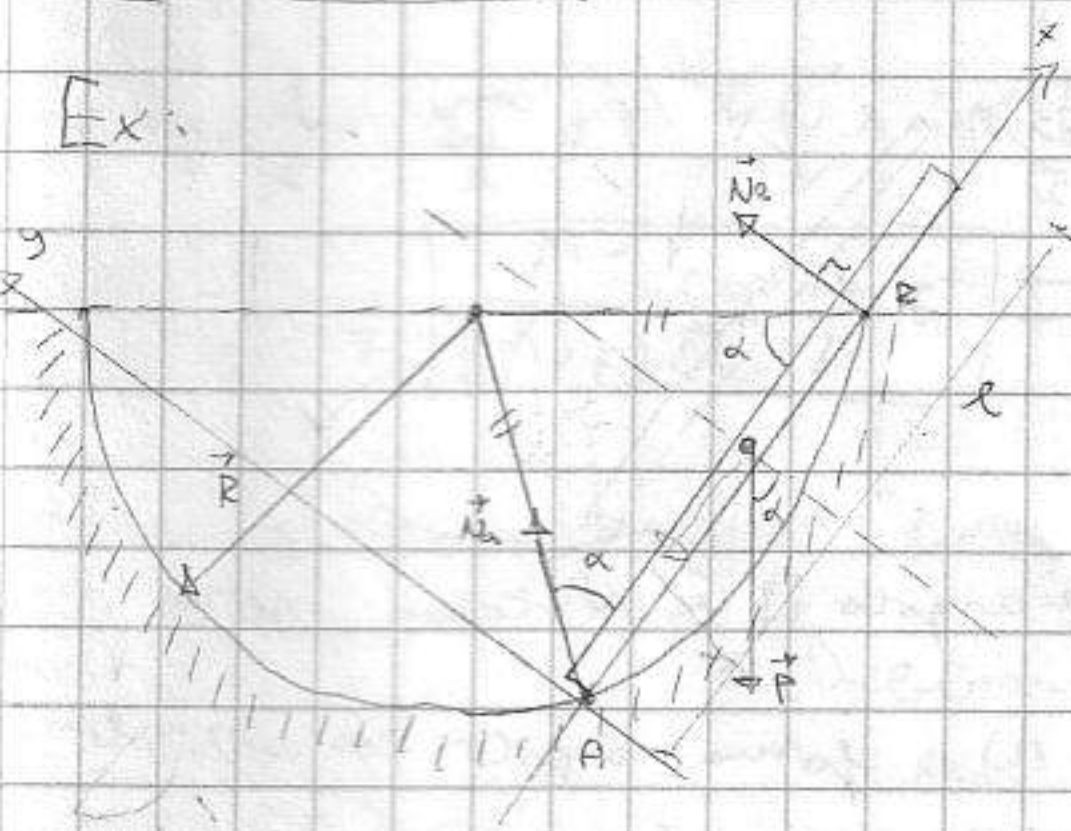
in eq. no quindi devono essere le reazioni vincolari dove c'è attrito.

$$\begin{cases} N_B = P \\ F_a \text{ esplicita forza } \mu \leq F_{max} \text{ ammissibile di attrito sua componente } \perp \text{ e} \\ F_a = \frac{P}{2 \tan \alpha} \end{cases}$$

da  $\mu \leq \frac{F_a}{N_B} \Rightarrow \boxed{F_a \leq \mu N_B}$  sostituendo:  $\frac{P}{2 \tan \alpha} \leq \mu P \Rightarrow$

$$\boxed{\tan \alpha \geq \frac{1}{2\mu}}$$

Ex:



Coppa sferica la linea con raggio R. Prendi la curva

tangente e appoggiata sulla coppa. Qual è la

posizione di equilibrio. Voglio di simp. a por. eq.

Immaginiamo forze, F. zero, reazioni in A,  $\vec{N}_A$  diretta verso

centro sfera; Reazioni in B ortog. alla curva, perché

c'è appoggio di impalcatura rotazione (e' altro era vincolo diverso), Impostiamo equilibrio:

$$\vec{N}_A + \vec{P} + \vec{N}_B = 0, \vec{N}_A \text{ e } \vec{P} \text{ formano } \Delta \text{ isoscele; } N_B \perp \vec{P}, \text{ Prendiamo lungo det. curva:}$$

$$N_A \cos \alpha - P \sin \alpha = 0 \quad [N_{Bx} = 0]; \quad N_A \sin \alpha - P \cos \alpha + N_B = 0 \quad \text{quindi } N_B = P \tan \alpha$$

Scegliamo  $\vec{r}^{(e)}$  (verso com.  $\perp$  F. su st. la forza,  $\Rightarrow$  F. x braccio). Forza peso: (55)

$\vec{T}(\vec{P}) = -\frac{1}{2} P \cos \alpha$ , momento elicoidale che quello di  $N_B \Rightarrow -\frac{P \ell \cos \alpha}{2} + N_B \cdot 2R = 0$   
 $\vec{AB}$  uguale alla d. Per determinarla si può considerare il tri. innescato  $AB = 2R \cos \alpha$

$N_A \cos \alpha = P \sin \alpha$ ,  $N_A \sin \alpha + N_B = P \cos \alpha$ ,  $P \frac{\ell}{2} \cos \alpha = 2 N_B R \cos \alpha$ , sist. 3  
 eq. e 3 inc. ;  $N_B = \frac{P \ell}{4R}$ . Sostituzione:  $N_A \cos \alpha = P \sin \alpha$ ,  $N_A \sin \alpha = P \cos \alpha -$

$N_B = P \left( \cos \alpha - \frac{\ell}{4R} \right)$ ,  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \frac{\ell}{4R}}$   $\rightarrow$  eq. di P. sbarra, momento solo  
 rapporto  $\ell$  e  $R$   $\rightarrow \cos \alpha \left( \cos \alpha - \frac{\ell}{4R} \right) = \sin^2 \alpha \rightarrow$

$$\cos^2 \alpha - \frac{\ell}{4R} \cos \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \rightarrow 2 \cos^2 \alpha - \frac{\ell}{4R} \cos \alpha - 1 = 0 \rightarrow 2x^2 - \frac{\ell}{4R} x - 1 = 0$$

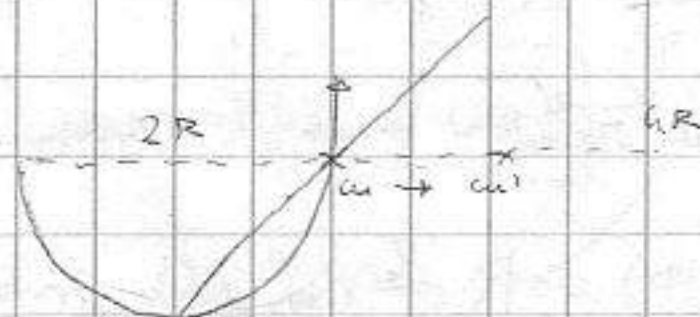
$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell}{8R} \pm \sqrt{\left(\frac{\ell}{8R}\right)^2 + 2} \right] = \cos \alpha \leq 1 \rightarrow \text{risolta eq. " - " } \text{perch\u00e9 per IP. } \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Chiamiamo  $\frac{\ell}{8R} = x$ ,  $x + \sqrt{x^2 + 2} \leq 2$  -  $\sqrt{x^2 + 2} \leq 2 - x$  ( $2 - x > 0 \sim x < 2$  in forza per

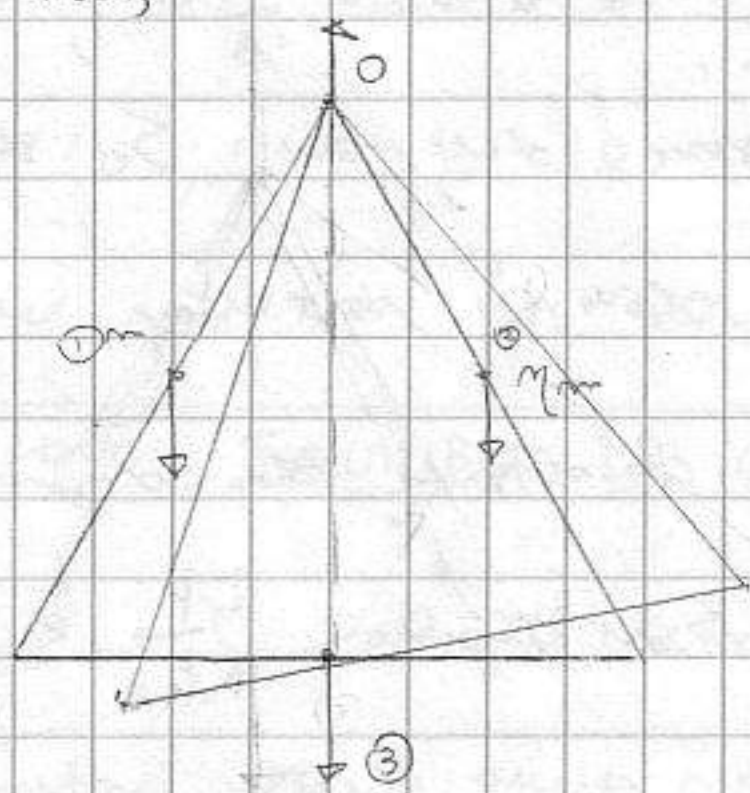
elevare al quadrato):  $x^2 + 2 \leq (2 - x)^2$ ,  $x^2 + 2 \leq x^2 + 4 - 4x \rightarrow 4x \leq 2 \rightarrow \boxed{x \leq \frac{1}{2}}$

$\rightarrow \frac{\ell}{4R} \leq 1 \rightarrow \ell \leq 4R$ ; Se  $\ell > 4R$ , ce sistema

Va FUORI, cambia il problema.



97-4-2005



Imponiamo  $\begin{cases} \vec{F}^{(1)} = 0 \\ \vec{T}^{(1)} = 0 \end{cases}$  - Verifica colta

Vogliamo  $\vec{T}^{(2)}$ ; il braccio

è  $a \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$ ,  $\vec{T}^{(2)} = -\eta \vec{P}$

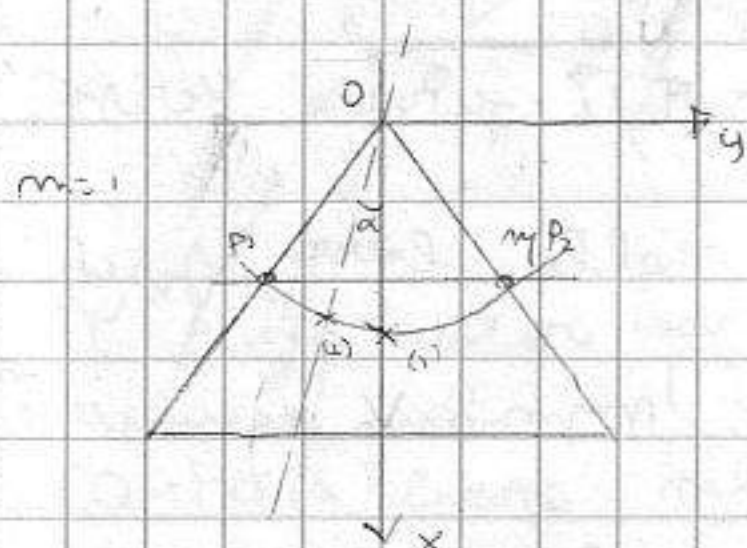
$a \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$ ,  $\vec{T}^{(3)} = -P \vec{OO'}$   $\sin \alpha$

( $\vec{OO'} = a\sqrt{3}$ ) Somma momenti = 0.  $P \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) -$

$$\eta P a \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - P \vec{OO'} \sin \alpha = 0 \rightarrow a \left( \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) - \eta \left( \frac{a \cos \alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} a \sin \alpha \right) = 0$$

$$2\sqrt{3} \sin \alpha = 0; \cos \alpha (1 - \eta) = \sqrt{3} \sin \alpha (2 + \eta + 1) \rightarrow \boxed{\tan \alpha = \frac{1 - \eta}{\sqrt{3}(3 + \eta)}}$$

(metodo alternativo per l'eq.)



← Centro massa nel contenitore triangolo. Se sistema perso

non è simmetrico e spartato (2) e forma angolo con verticale

Det. cu.; coordinate  $\eta$  a matrici  $P_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $P_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$P_3 = (\sqrt{3}, 0), \quad x_{cu} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \eta + \sqrt{3}}{2 + \eta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{3 + \eta}{2 + \eta}$$

$$y_{cu} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \eta + 0}{2 + \eta} = \frac{-1}{2} \frac{1 - \eta}{2 + \eta}$$

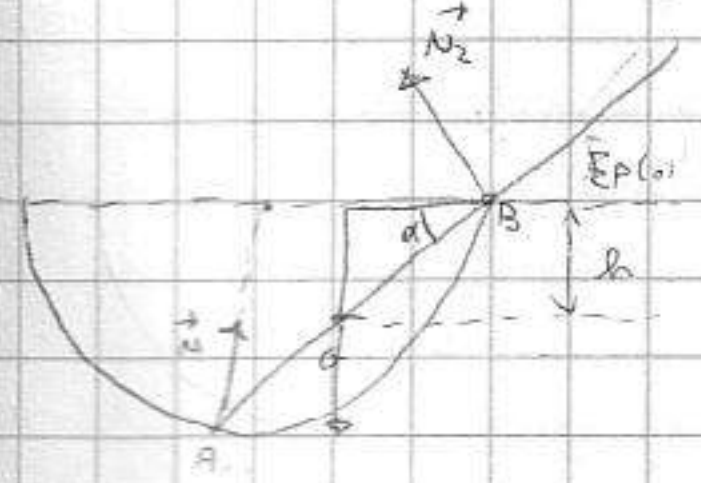
Se colloca il sistema di rot.  $\tan \alpha = \frac{y_{cu}}{x_{cu}}$

$$\frac{1-m}{2(2+m)} \cdot \frac{2(2+m)}{\sqrt{3}(3+m)} = \frac{1-m}{\sqrt{3}(3+m)}$$

→ stesso angolo di prima con opposto <math>\leftrightarrow</math>

Perché i due angoli sono uguali? Quando triangolo in pos. (1) e poi lo ruotano, il cui si riporta con circonferenza. Quando corpo è in eq. (2)  $U_2$  è verticale, quota del  $U_2$  è nel  $\pi_{UV}$  dove c'è  $\pi_{UV}$ .  $E_P$  (prov.),  $\vec{N}$  non compie lavoro;  $\pi F$  che compie lavoro non conservabile, ma out  $E_P$  cerca il  $\pi_{UV} = \pi_{UX}$  dello  $E_P$ .

Calcoli si semplificano.



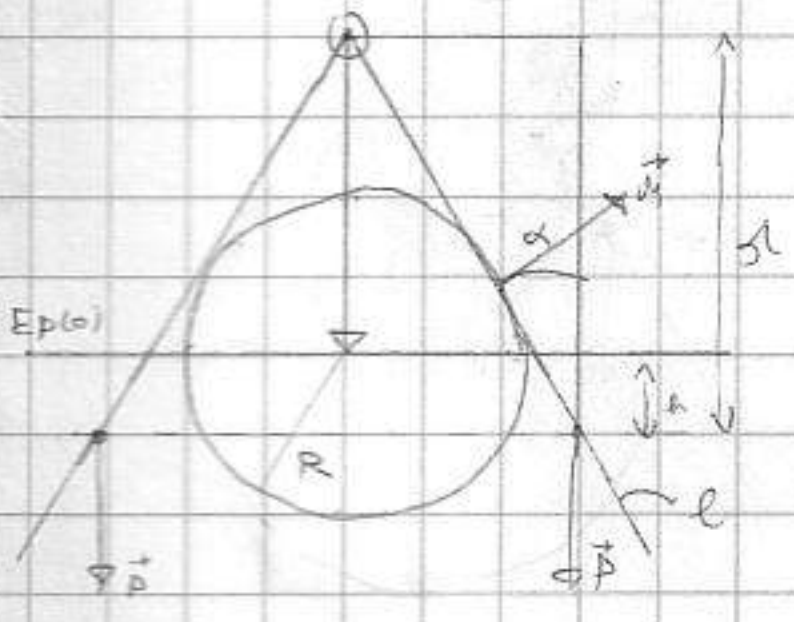
Rivoluzione non compie lavoro. Prolungamento config. generica e calcolo  $E_P(\alpha)$ .  $E_P(\alpha) = -m g h(\alpha)$ ,  $h = \overline{AB} \sin \alpha$ ;  $\overline{AB} = \sqrt{R^2 - d^2}$  (o  $\overline{AB} = 2R \cos \alpha$ ) si vuole quota  $h$ ;  $h(\alpha) = (2R \cos \alpha - \frac{l}{2}) \sin \alpha$ .

$\sin \alpha = R \sin \alpha - \frac{l}{2} \sin \alpha$ ;  $E_P = -m g (R \sin \alpha - \frac{l}{2} \sin \alpha)$ . Dobbiamo imporre

il minimo/nessuno di  $E_P$ :  $\frac{\partial E_P}{\partial \alpha} = 0 \dots \frac{\partial E_P}{\partial \alpha} \propto 2R \cos 2\alpha - \frac{l}{2} \cot \alpha = 0$

$[\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1] \rightsquigarrow 2\cos^2 \alpha - \frac{l}{4R} \cot \alpha - 1 = 0$  → stesso equaz. dell'equilibrio

Prendi una bottiglia con a collo sfilacciatore (2 aste comuni da cerniera)

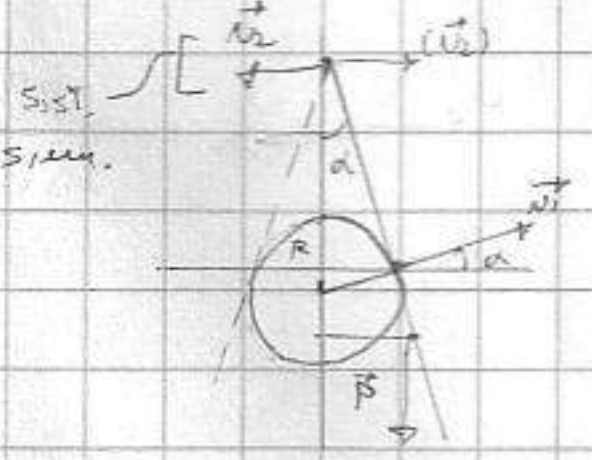


Det. eq. sistema [configurazione simmetrica] cosa accade in cerniera? A noi serve solo  $\alpha$ . Dobbiamo trovare il min.  $E_P(\alpha)$ ; e' 2 quello di 1 stile 2 corde a simmetria. Det. quota,  $E_P(\alpha)$  siamo per centro. Collociamo q. vertice

e togliamo  $d$ ;  $d = \frac{R}{\sin \alpha}$ ;  $h = \frac{l}{2} \cos \alpha$ ;  $h(\alpha) = \frac{R}{\sin \alpha} - \frac{l}{2} \cos \alpha$ ; basta imporre

$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = 0 \rightarrow -\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} R + \frac{l}{2R} \sin \alpha = 0 \rightsquigarrow \frac{l}{2R} \sin^3 \alpha = \cos \alpha$  - eq. trascendente

Min. problema cercando forze;



Dobbiamo capire dir. F. in cerniera. E' da capire/trasmissione → barre delle reattive  $F = l$  opposte dell'altra, orient. x simmetria.

Det.  $\alpha$  con formule equilibrio.  $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{P} = 0$  Proiettiamo

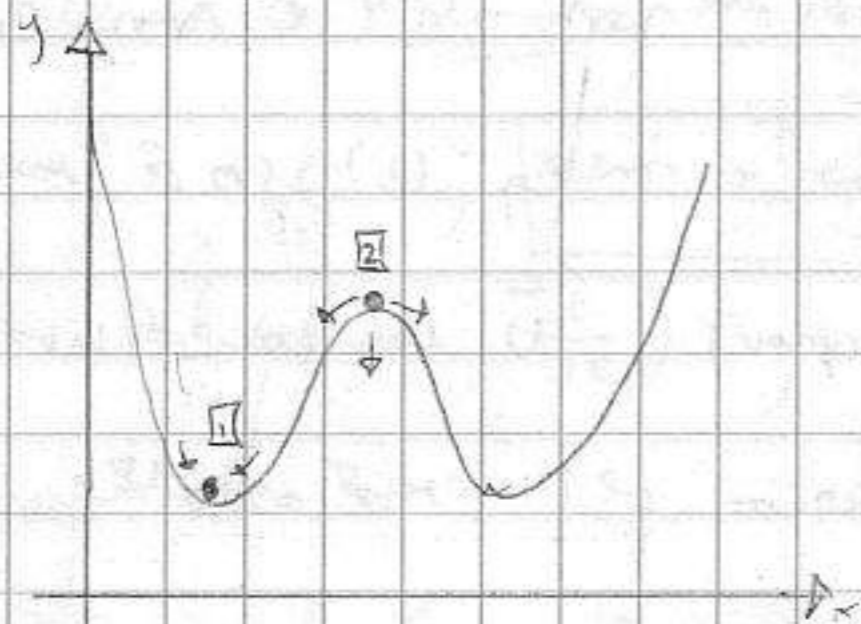
sistema assi;  $N_1 \sin \alpha = P$ . Verso  $N_2$  Tira, altrimenti non c'è equilibrio → verso

di  $N_2$  è opposto:  $N_2 = N_1 \cos \alpha$  Polo momento e cerniera; momenti:  $N_1 \frac{R}{\sin \alpha} =$


$P \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha$  Sostituiamo:  $\frac{P}{\sin \alpha} \cdot \frac{R}{\sin \alpha} = P \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha$  (57)

$$N_s = \frac{P}{\text{mm}^2} \cdot \frac{d}{\text{mm}} \cdot R \frac{\text{Cord} d}{\text{mm}^2} = \frac{d}{2} \cdot \text{mm} d \rightsquigarrow \boxed{\text{Cord} d = \frac{1}{2R} \text{mm}^3 d} \quad \text{---} \text{Area di spina}$$

La mt. di equilibrio corrisponde a min. energetico.



[1] è EQUILIBRIO STABILE (come quello del oscillatore armonico, o levata molla) Se mi sposto  $F \rightarrow$  riparte indietro in eq.

[2] è EQ. INSTABILE (con piccolo spostamento corpo parte  
equilibrato) [EP. e' pos in 2] 

Per trovare pos. equilibrio basta derivare e annullarla