Programma del corso di
CALCOLO II
A.A. 2004-2005

1. **Funzioni di più variabili.** Curve parametriche. Funzioni radiali e cilindriche. Topologia elementare di $\mathbb{R}^n$. Limiti di funzioni di due variabili. Derivate parziali e differenziale. Regola di derivazione della funzione composta. Equazione di Laplace e delle onde. Gradiente e derivate direzionali. Classificazione dei punti critici. Determinazione del massimo e del minimo di una funzione continua su un compatto.

2. **Campi vettoriali.** Esempi di campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Curve integrali. Campi conservativi e potenziali scalari. Campi irrotazionali. Integrali di linea di un campo vettoriale. Esempio di un campo irrotazionale non conservativo.

3. **Integrazione multipla.** Funzioni integrabili secondo Riemann. Integrali doppi su domini normali. Coordinate polari. Formula per il cambiamento di variabili. Integrali tripli. Coordinate sferiche e cilindriche.

4. **Calcolo differenziale vettoriale.** Identità contenenti gradiente, divergenza e rotore. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie. Formule di Green, teorema della divergenza e teorema di Stokes. Condizioni sufficienti per l'esistenza di un potenziale scalare e vettoriale. Applicazioni del calcolo differenziale vettoriale alla fisica.

5. **Serie.** Successioni e loro limiti. Serie numeriche e criteri di convergenza. Serie di potenze e raggio di convergenza. Integrazione e derivazione di serie di potenze. Serie di Taylor.

Tipologie

Primo esonero	**Secondo esonero**
Dominio, grafico e piano tangente	Integrali doppi
Continuità, differenziabilità	Integrali tripli
Derivata di funzioni composte	Potenziali vettoriali
Massimi e minimi su compatti	Flusso di un campo vettoriale
Potenziali scalari	Convergenza di una serie
Integrali di linea	Sviluppo di Taylor

CALCOLO 2 - INDICE APPUNTI [PERIODO I] Prof. Filippo Tolli

CALCOLO II - INFO sul CORSO - Prof. G. TOZZI - 28/02/2005 ①

RIC. Lun. 13-14 Aul. 101

LIBRO: ADAMS, CALCOLO diff 2.

A calcolo 1 studiavamo $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Qui generalizziamo

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (funzioni di più variabili $\mathbb{R}$ a valori $\mathbb{R}$)

Si pensano anche $\vec{r}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (curve parametriche in $\mathbb{R}^n$)

e anche $\vec{X}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (campi vettoriali in $\mathbb{R}^n$)

Inoltre $\vec{S}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (superfici parametriche) [in generale $n<2$]

CURVE PARAMETRICHE:

- Caso $n=2$; Def: Una curva parametrica in $\mathbb{R}^2$ è una MAPPA $\vec{r}$: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$, quindi ad un certo parametro t associa vettore $x(t), y(t)$

$t \to (x(t), y(t))$. [mappa è legge oraria particella ad es.]

Def: Una curva parametrica si dice REGOLARE se soddisfa 3 condizioni:

1) $x(t), y(t) \in C^1([a,b])$ [la derivata delle $f(t)$ è continua in $[a,b]$]

2) $\vec{T}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq 0$

3) (iniettività) Con $t_1 < t_2$, $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) \Rightarrow t_1 = a \;\; t_2 = b$

[Def: L'img. di $\vec{r}$ è detta la TRACCIA della curva (in fisica è traiettoria)]

(La traccia della curva non ha intersezioni, tranne quando $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ - curva chiusa ○), le prime 2 $\Rightarrow$ curva non ha cuspidi (è LISCIA)

Def: VERSORE TANGENTE $\left[\hat{T}(t) = \frac{\vec{T}(t)}{\|\vec{T}(t)\|} \right]$ norma (se $v = (v_1, v_2)$, $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$)

Ex: $\vec{r}_1 : [1, 4] \to \mathbb{R}^2$ e $t \to (t, 2t)$

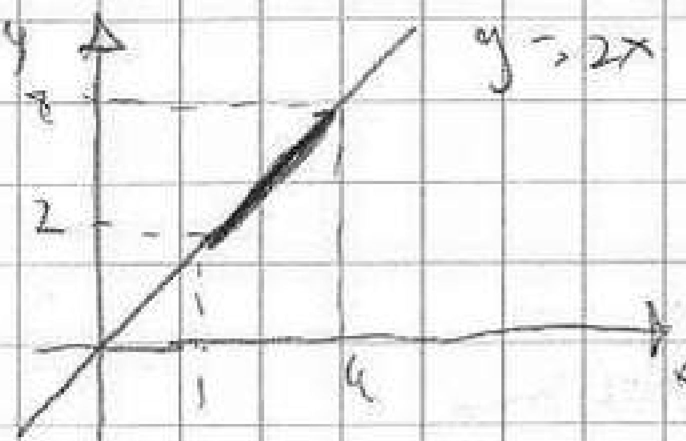
$\vec{r}_2 : [1, 2] \to \mathbb{R}^2$ e $s \to (s^2, 2s^2)$

$\vec{r}_3 : [0, \ln 4] \to \mathbb{R}^2$ e $u \to (e^u, 2e^u)$

① $\vec{T}_1(t) = (1, 2) \neq 0$, $\|\vec{T}_1(t)\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$; $\hat{T}_1(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$\vec{r}_1(t_1) = \vec{r}(t_2) \iff (t_1, 2t_1) = (t_2, 2t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$ → CURVA REGOLARE

$y(t) = 2x(t) \Rightarrow$ TRACCIA è $y = 2x$ (retta). Nel caso della particella inizia in $\vec{r}_1(a) = \vec{r}_1(1) = (1,2)$ e finisce in $\vec{r}_1(b) = \vec{r}_1(4) = (4,8)$



(2) $\vec{T}_2(r) = (2r, 4r)$; $\|\vec{T}_2(r)\| = \sqrt{4r^2 + 16r^2} = |2r|\sqrt{5}$, poiché $r \in (1,2)$ è non negativo, quindi $= 2r\sqrt{5}$; $\hat{T}_2(r) = \frac{(2r, 4r)}{2r\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$(= a\,T_1(t))$; anche qui $y(r) = 2\,x(r)$ (sempre come prima qui p.to iniziale è $(1,2)$, come prima, e p.to finale è $(4,8)$ come prima)

La differenza è - ex fisica - prima v era costante, ora v dip. da r

(3) $\vec{T}_3(u) = (e^u, 2e^u)$; $\|\vec{T}_3\| = \sqrt{e^{2u} + 4e^{2u}} = \sqrt{5e^{2u}} = e^u\sqrt{5}$;

$\hat{T}_3(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, anche qui c'è coincidenza con il primo. Quindi

anche qui $y(u) = 2\,x(u)$; p.to in. è $(1,2)$ e p.to fin. è $(4,8)$

3 curve diverse con stessa traccia.

(ex)

$\vec{r}_4 : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right] \to \mathbb{R}^2$ e associa a $\theta \to (\cos\theta, \sin\theta)$

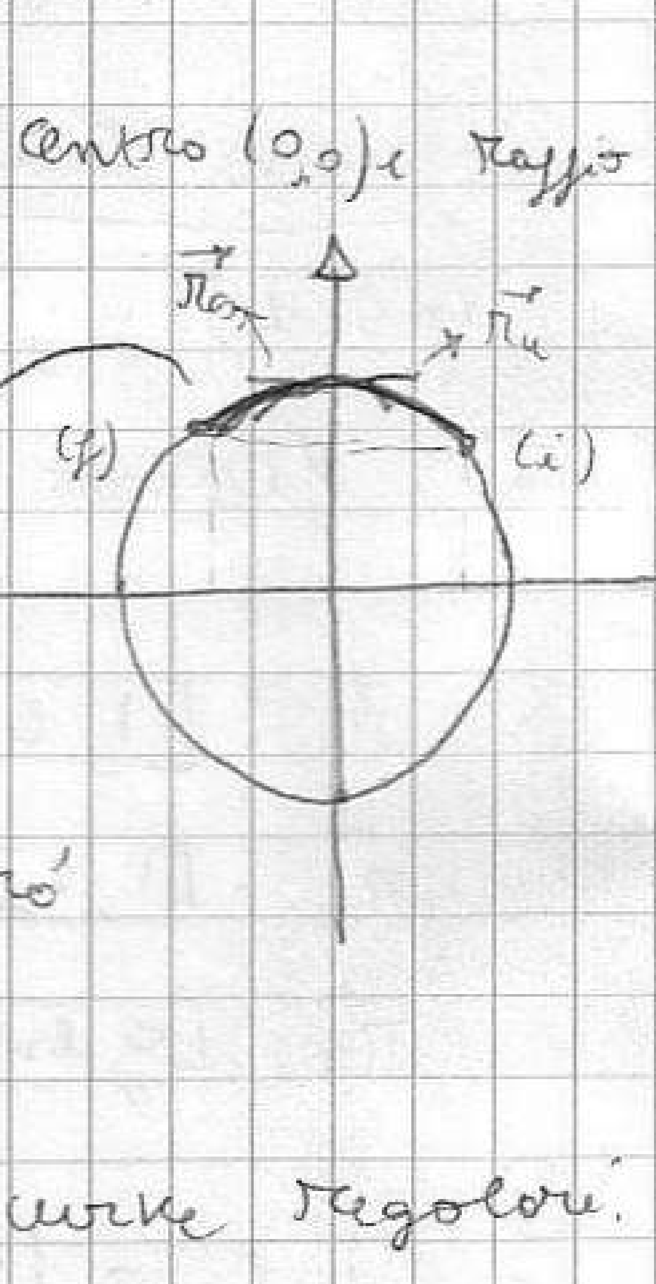
$\vec{r}_5 : \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \to \mathbb{R}^2$ e associa a $t \to (t, \sqrt{1-t^2})$

$T_4(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$; $\|\vec{T}_4(\theta)\| = 1 \to \hat{T}_4 = \vec{T}_4$

$x(\theta)^2 + y(\theta)^2 = 1 \to x^2 + y^2 = 1 \to$ eq. circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1

$\vec{r}_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\vec{r}_4\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Arco di circonferenza



[Calcolando la traccia di $\vec{r}_5$ ho

$x(t)^2 + y(t)^2 = t^2 + 1 - t^2 = 1 \Rightarrow$ $\vec{r}_4$ e $\vec{r}_5$

sulla stessa circonferenza ; $\vec{r}_{5(a)}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ - hanno però

ORIENTAZIONE OPPOSTA.

Def: $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ e $\vec{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{R}^2$ entrambe curve regolari.

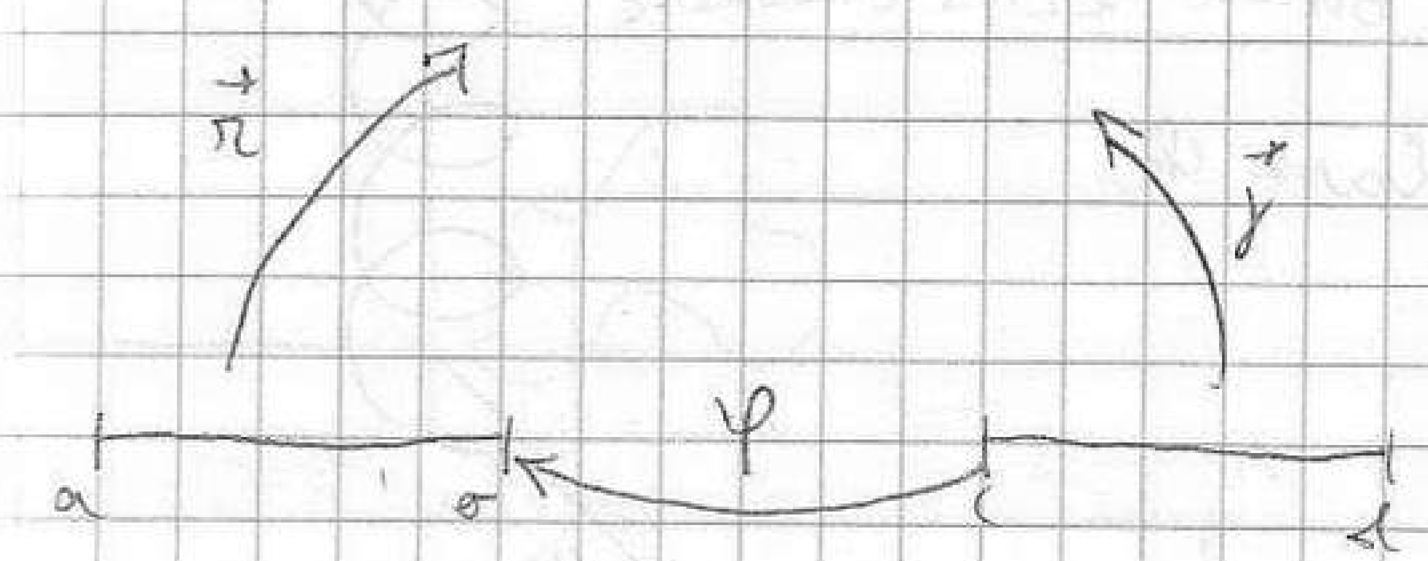
Diremo che $\vec{\gamma}$ è EQUIVALENTE a $\vec{r}$ SE $\exists$ una mappa $\varphi : [c,d] \to [a,b]$

$[\varphi \in C^1[c,d]]$

invertibile (iniett. e suriett.) di classe C_1 con $f^{-1} \in C^1([a,b])$ / $\vec{r} \circ \varphi = \vec{\gamma}$

(2)

Cons:



(dall'ex. di prima) $[a,b]=[1,4]$ e $[c,d]=[1,2]$. Cerchiamo $\varphi:[1,2]\to[1,4]$

$\vec{r}_1\circ\varphi=\vec{r}_2$. Il dominio c'è $[D\varphi = D\vec{r}_2]$. E' uguaglianza tra vettori $\Rightarrow$ le

componenti devono essere uguali. $\to \begin{cases} x_1\circ\varphi = x_2 \\ y_1\circ\varphi = y_2 \end{cases} = \begin{cases} \boxed{\varphi = x_2} \to s^2 \\ 2\varphi = y_2 \end{cases}$

quindi $\varphi(s)=s^2$. E' iniettiva

e derivabile e invertibile (ed è derivabile anche l'inv.) $\to$ accettabile. $\vec{r}_1\circ\varphi=(\varphi(s),2\varphi(s))$

$=(s^2,2s^2)$. Poiché $(s^2,2s^2)=\vec{r}_2(s)$, si ha $\boxed{\vec{r}_1\circ\varphi=\vec{r}_2}$

(dall'altro ex.)

$\vec{r}_4(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$, $\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi]$, $\vec{r}_5(t)=(t,\sqrt{1-t^2})$, $t\in[-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}]$

Dobbiamo trovare $\vec{r}_5\circ\varphi(\theta)=\vec{r}_4(\theta)$, $\varphi:[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi]\to[-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}]$

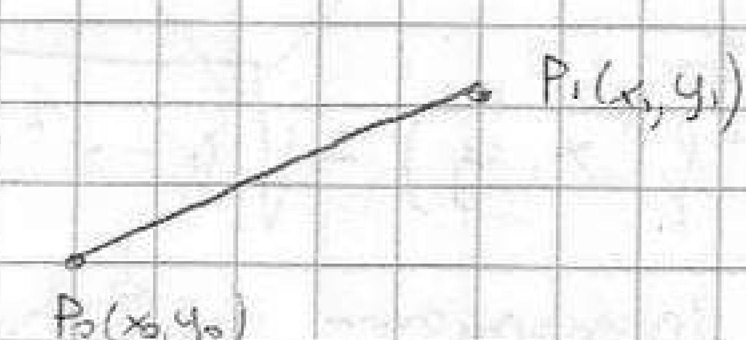
Pongo $t=\varphi(\theta)=\cos\theta$. Quindi $\vec{r}_5(\cos\theta)=(\cos\theta,\boxed{\sin\theta})$ $\to$ sempre + in I

ed è proprio $\vec{r}_4(\theta)$.

Def: Diremo che γ e $\vec{r}$, curve equivalenti, hanno la stessa ORIENTAZIONE se $\varphi'>0$

ex: (da prima), $\varphi'(\theta)=-\sin\theta$ che è <0

Ex: voglio curva che ha questa traccia.



$$\begin{cases} x(t)=x_0+t(x_1-x_0) \\ y(t)=y_0+t(y_1-y_0) \end{cases}$$ con $t\in[0,1]$. Se $t=0$, ho (x_0,y_0)

Se $t=1$, ho (x_1,y_1)

(es. numerico) $P_0=(0,0)$; $P_1=(1,1)$

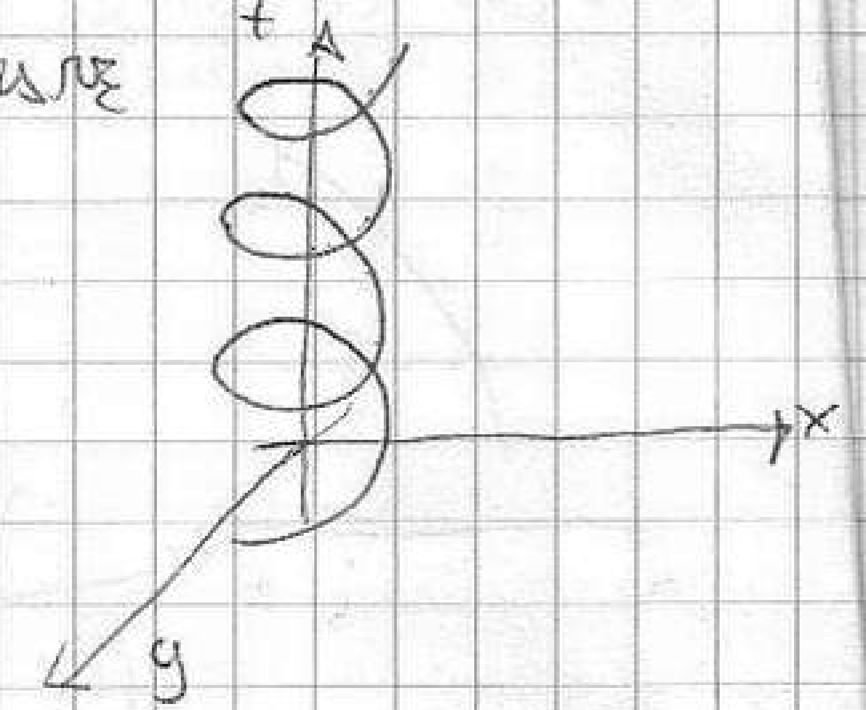
$$\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=t \end{cases}$$ Quindi $\vec{r}_1:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ è quello che $t\to(t,t)$

- GENERALIZZAZIONE al CASO n-DIMENSIONALE

$\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ quindi $t\to(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))$

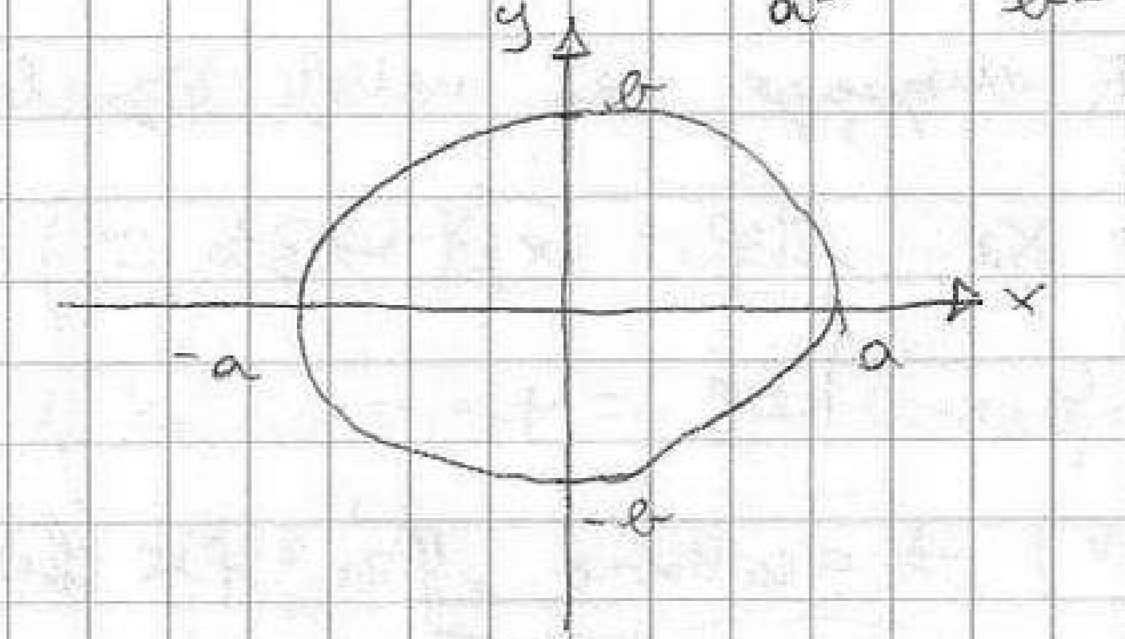
$\exists$ cond. analoghe a quelle regolari in $\mathbb{R}^2$.

Ex: $n=3$; $\vec{r}:[0,100] \to \mathbb{R}^3$; $t \to (\cos t, \sin t, t)$. Proiettando la curva su x,y ho circonferenza. Si ottiene ELICA CIRCOLARE



[posso generalizzare l'ex. di prima, basta che aggiungo $z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$]

Ex: ellisse di eq. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Vogliamo param.



$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos\theta \\ y(\theta) = b\sin\theta \end{cases} \to \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{b^2\sin^2\theta}{b^2}=1$$

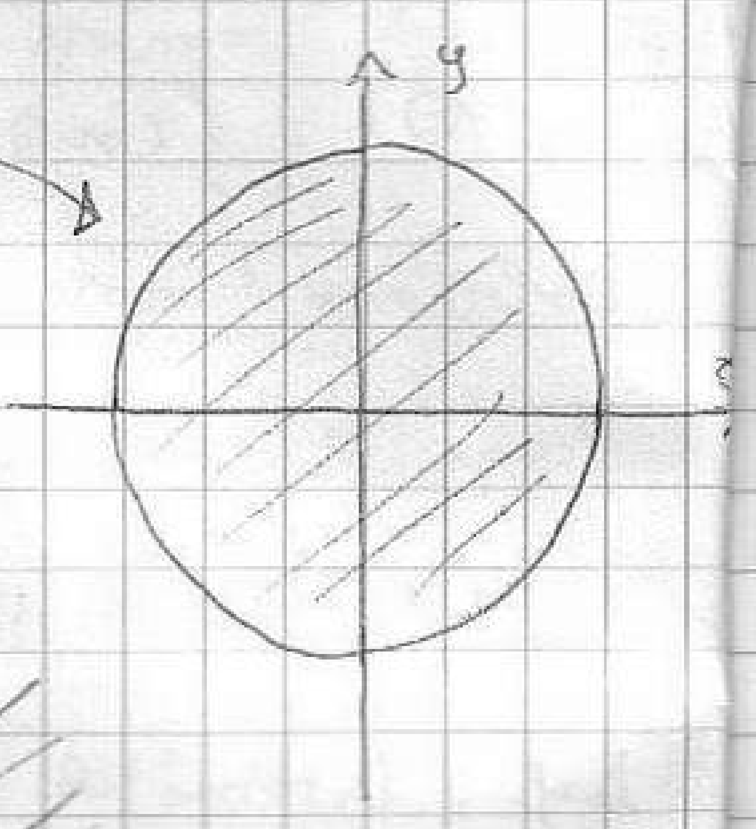
$\Downarrow$

le due $f(t)$ soddisfano condizione

02/03/2005 FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI REALI

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ex: $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Vogliamo il dominio.

$1-x^2-y^2 \geq 0$. Se faccio $1-x^2-y^2=0$ [circonferenza]



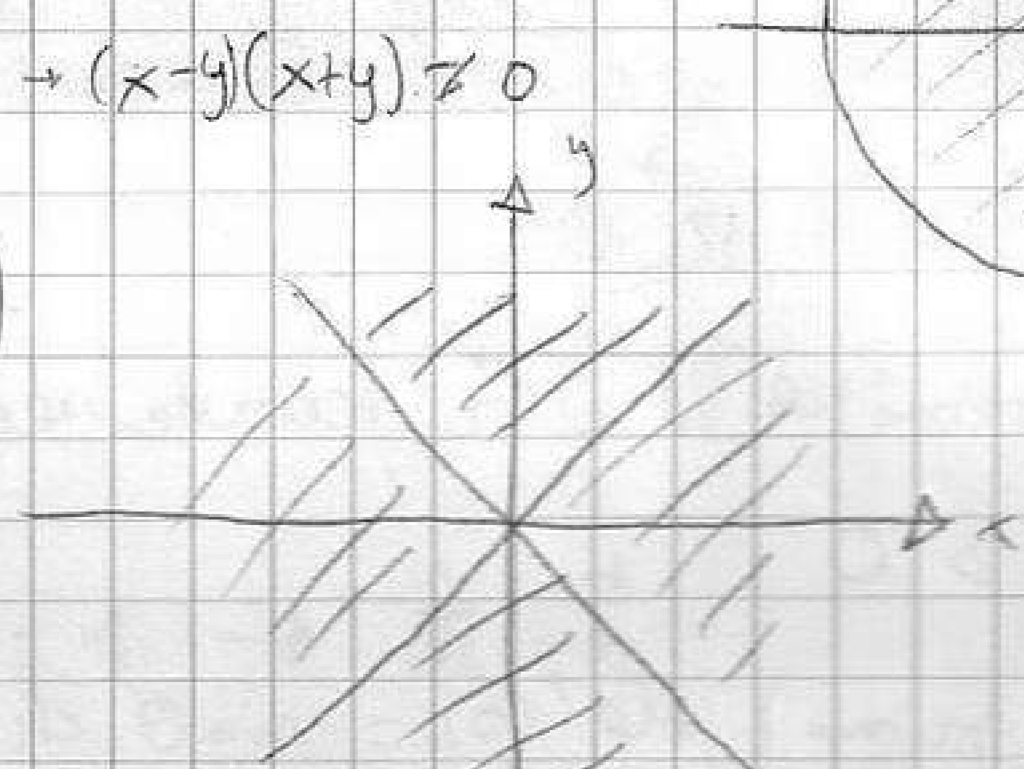
Voglio $x^2+y^2 \leq 1$ → i punti INTERNI alla circ.

Ex: $f(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2} \to x^2-y^2 \neq 0 \to (x-y)(x+y) \neq 0$

$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ → (retta bisettrice 1° e 3° / 2° e 4°)

$\Downarrow$

D = piano ESCLUSE le 2 rette



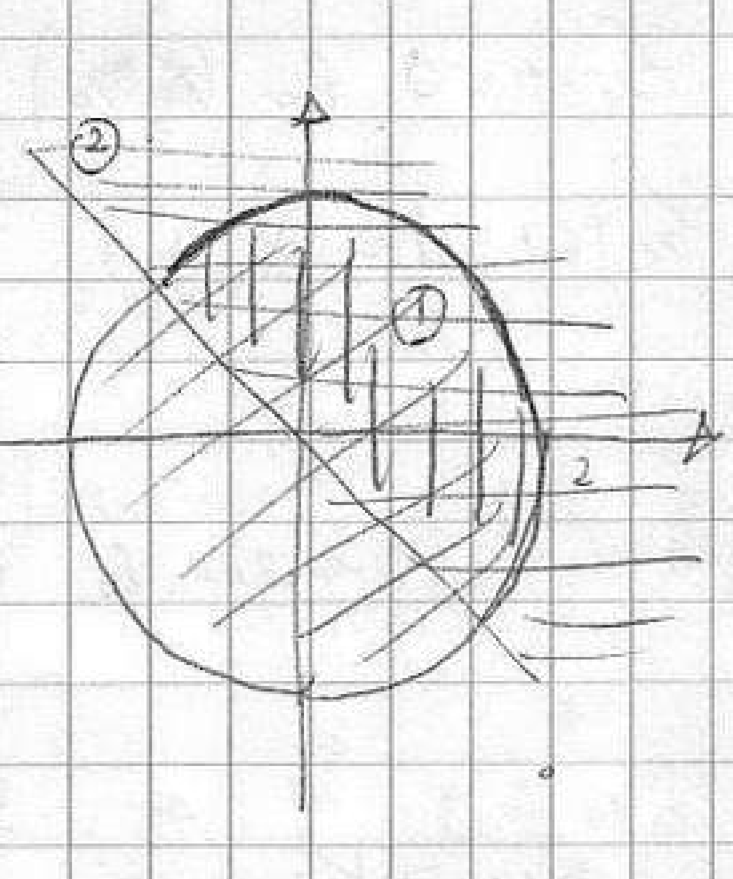
Ex:

$f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}\,\ln(x+y)$

Imponiamo

① $4-x^2-y^2 \geq 0$

② $x+y > 0$



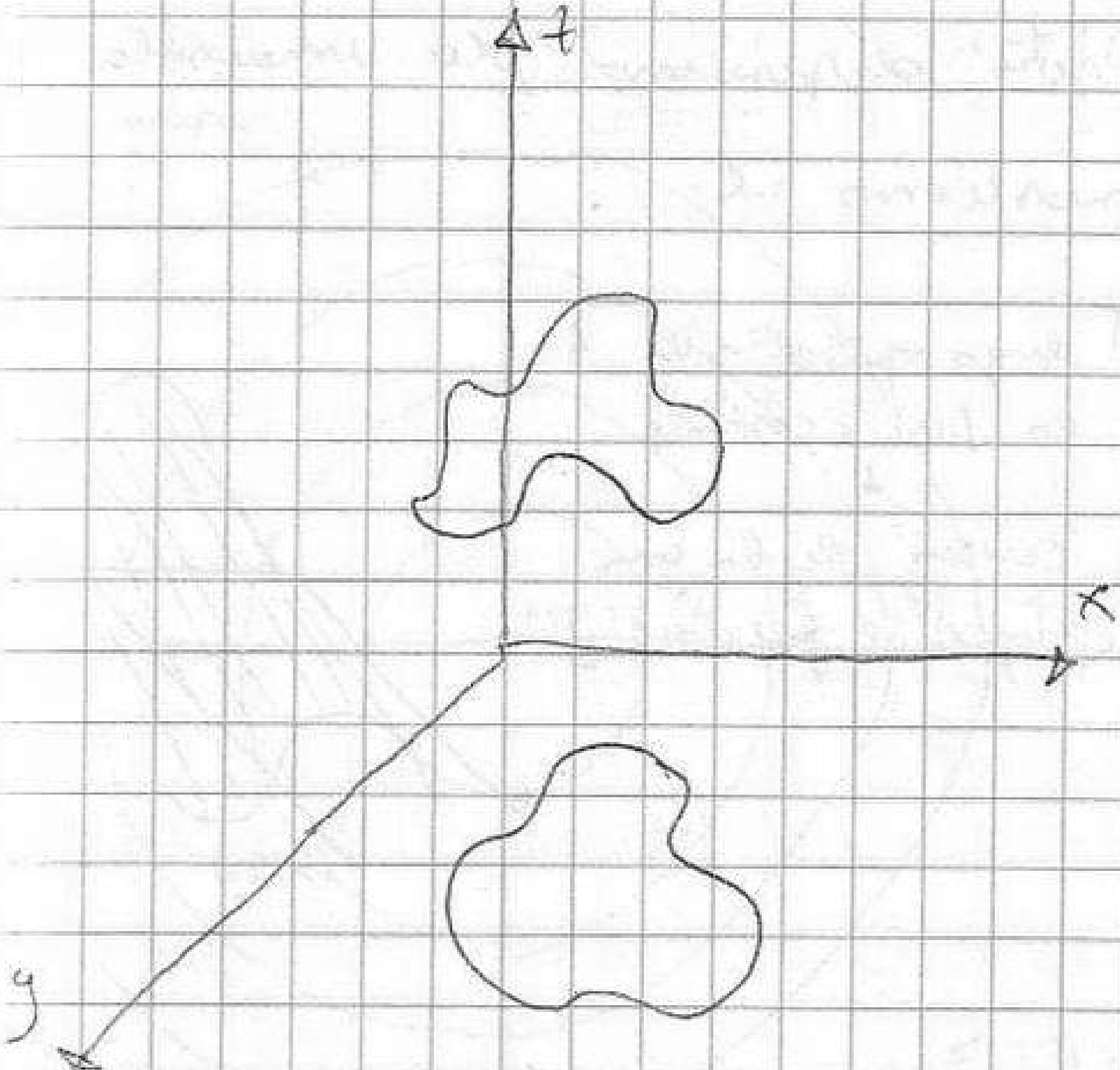
① = ///, ② $y > -x$: ≡

→ SEMICIRCONFERENZA è dominio (intersezione) [|||]

GRAFICO

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Γ_f [grafico di f] è l'insieme degli

(4) $x, y, f(x,y)$ come $(x,y) \in D \to \Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$



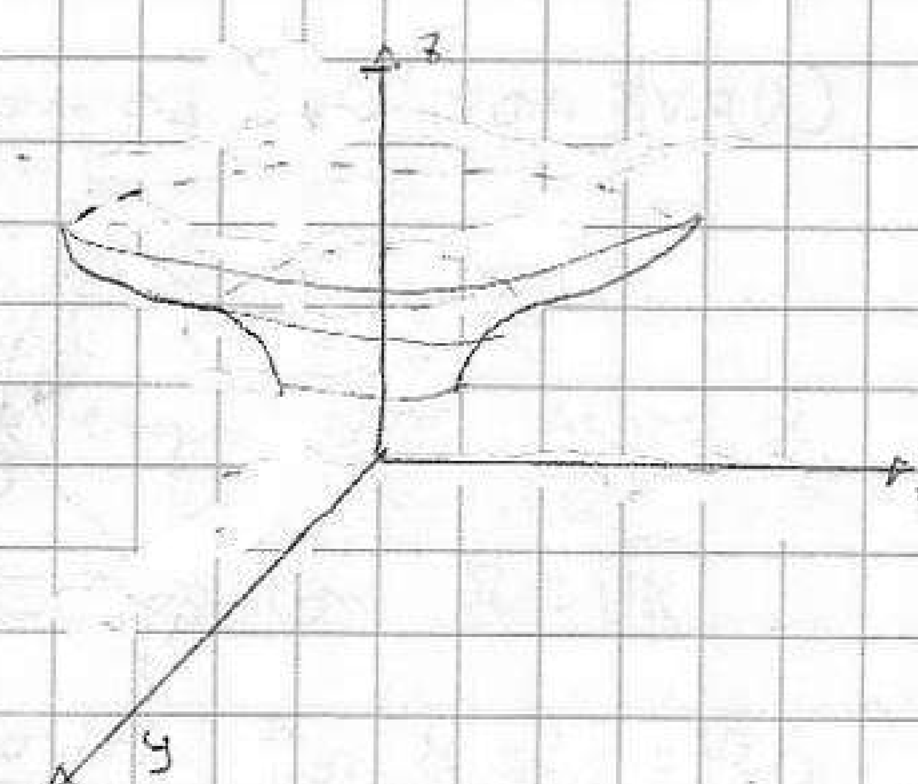
(il grafico è una certa superficie)

$\downarrow$

$\exists$ con particolari doti si può disegnare il grafico

$\downarrow$

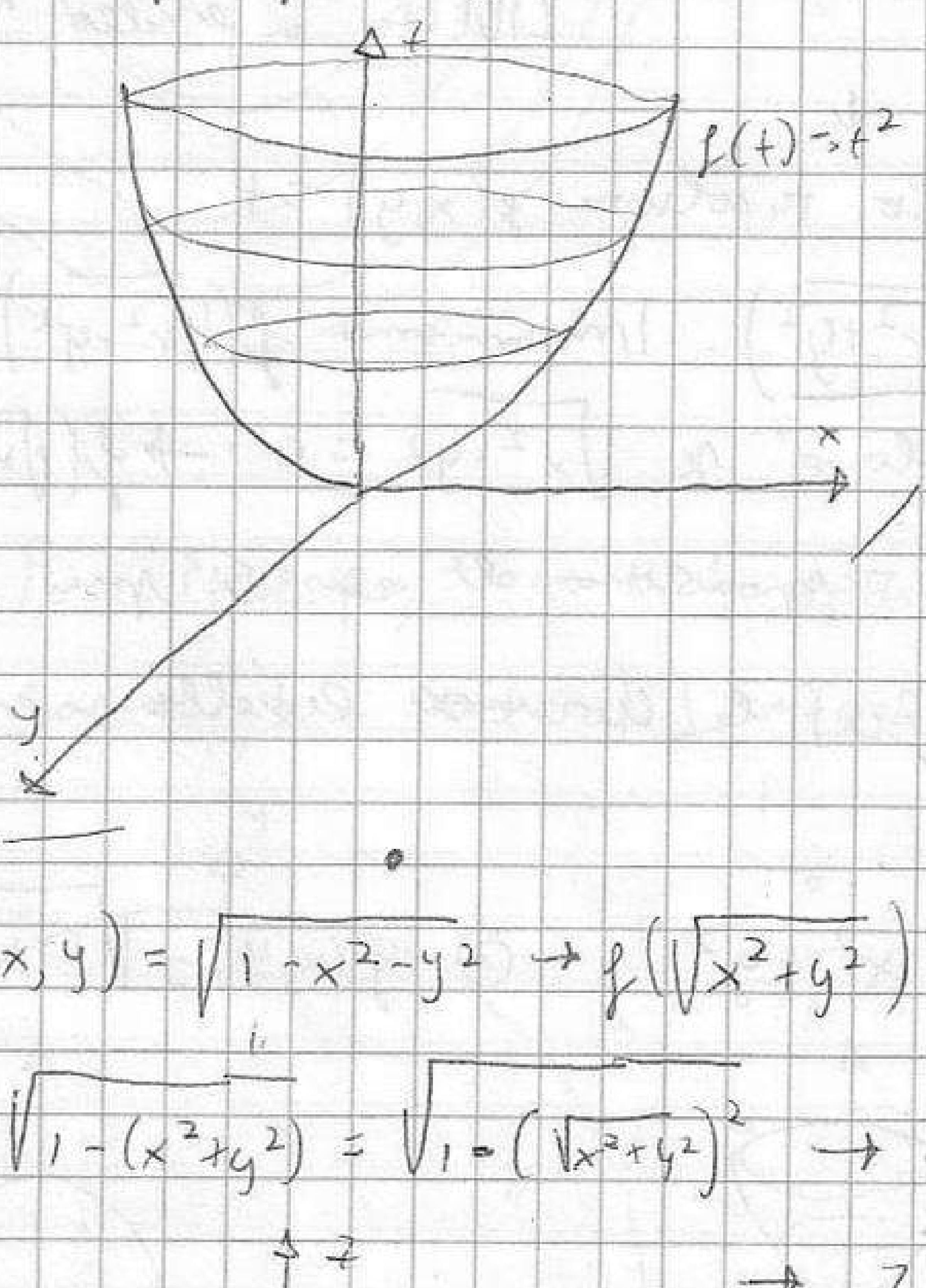
Ex: Sia $f: I \subseteq [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ e sia $g(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$; supponiamo di conoscere il grafico di f.



Il grafico di g è quello di f RUOTATO intorno all'asse z

Ex: $g(x,y) = x^2+y^2 = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \to f(t)=t^2$
(per avere uguaglianza)

Prima disegno f in $[0,+\infty)$ $\to$ ruoto il grafico e ottengo un PARABOLOIDE

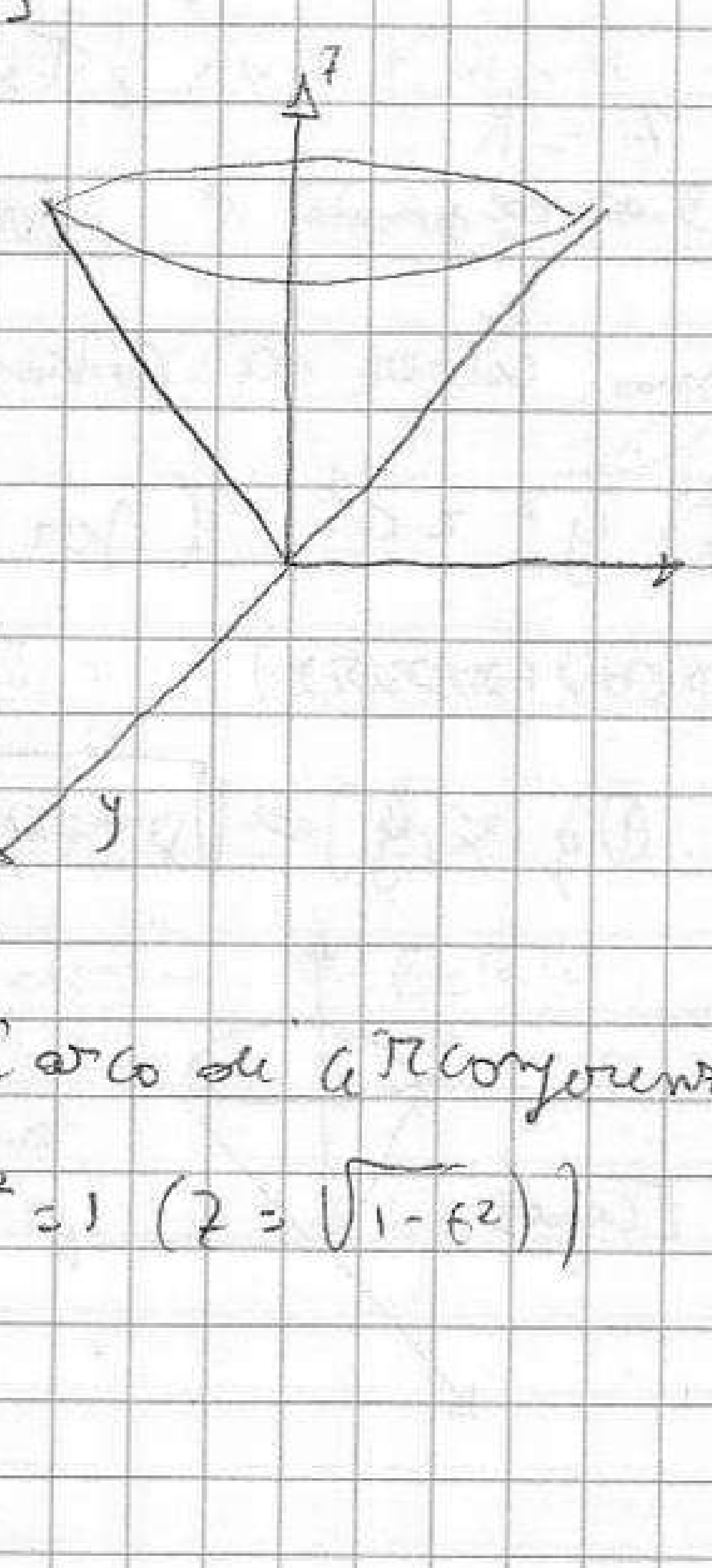


$f(t)=t^2$

Ex: $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$
$[f(t)=t]$

$\downarrow$

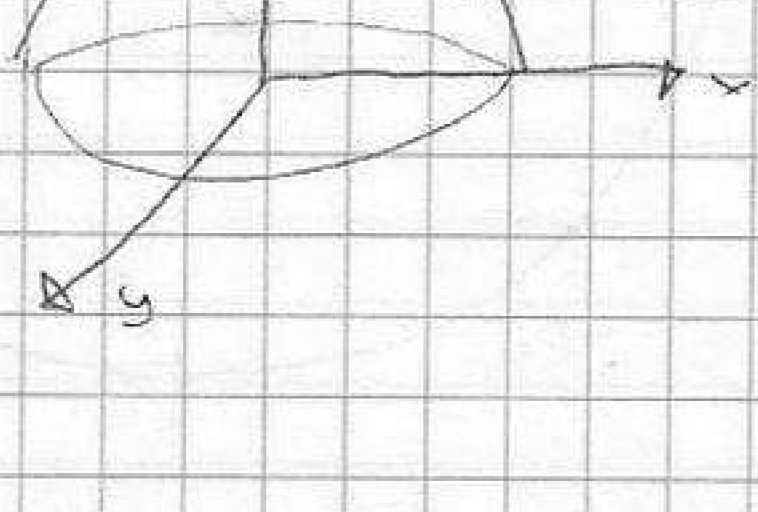
Ruoto e ottengo un cono



Ex: $g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \to f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

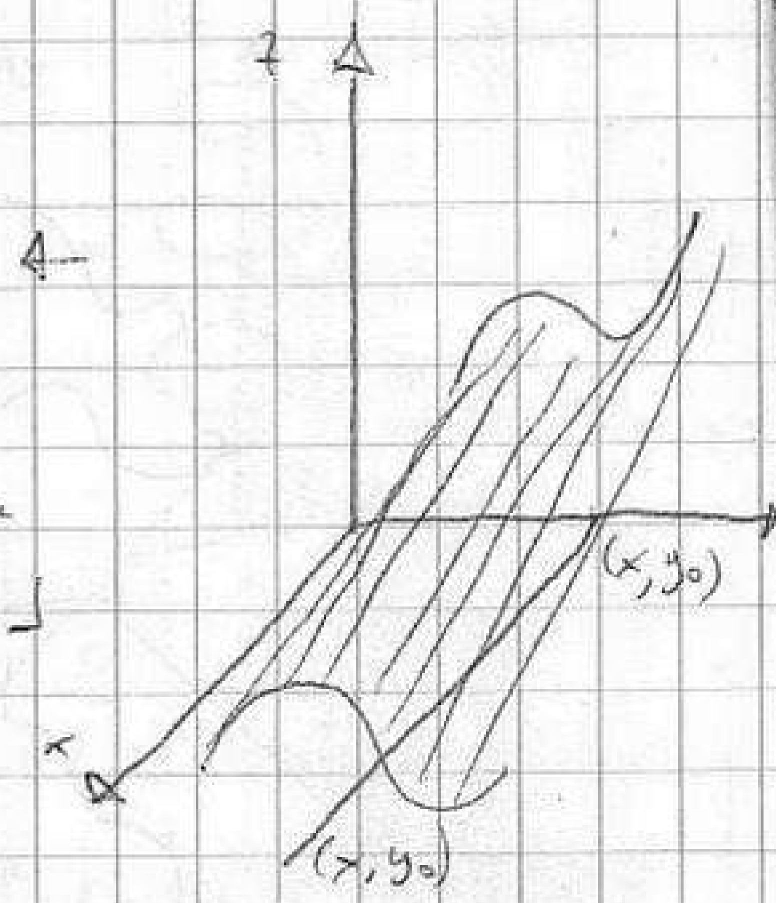
$$\sqrt{1-(x^2+y^2)} = \sqrt{1-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} \to f(t) = \sqrt{1-t^2} \quad \text{(arco di circonferenza)}$$

$$\to z^2+t^2 = 1-t^2+t^2 = 1 \quad \left(z=\sqrt{1-t^2}\right)$$



FUNZIONI CILINDRICHE (f di 2 variabili che però dipendono da una sola)
↓
(grafici cilindrici) Sia $g(x,y) = f(y)$ e conosciamo il grafico di f, vogliamo grafico di g.
Se considero $(x, \boxed{y_0})$ → p.to fisso → retta
$g(x, y_0) = f(y_0)$ ⟹ lungo la retta la funzione è costante ⟹ grafico è "cilindro" costituito da serie di rette

[lungo quelle rette la $f(x)$ è costante
↓
"cilindro" che ha come profilo il grafico di f]



CURVE DI LIVELLO

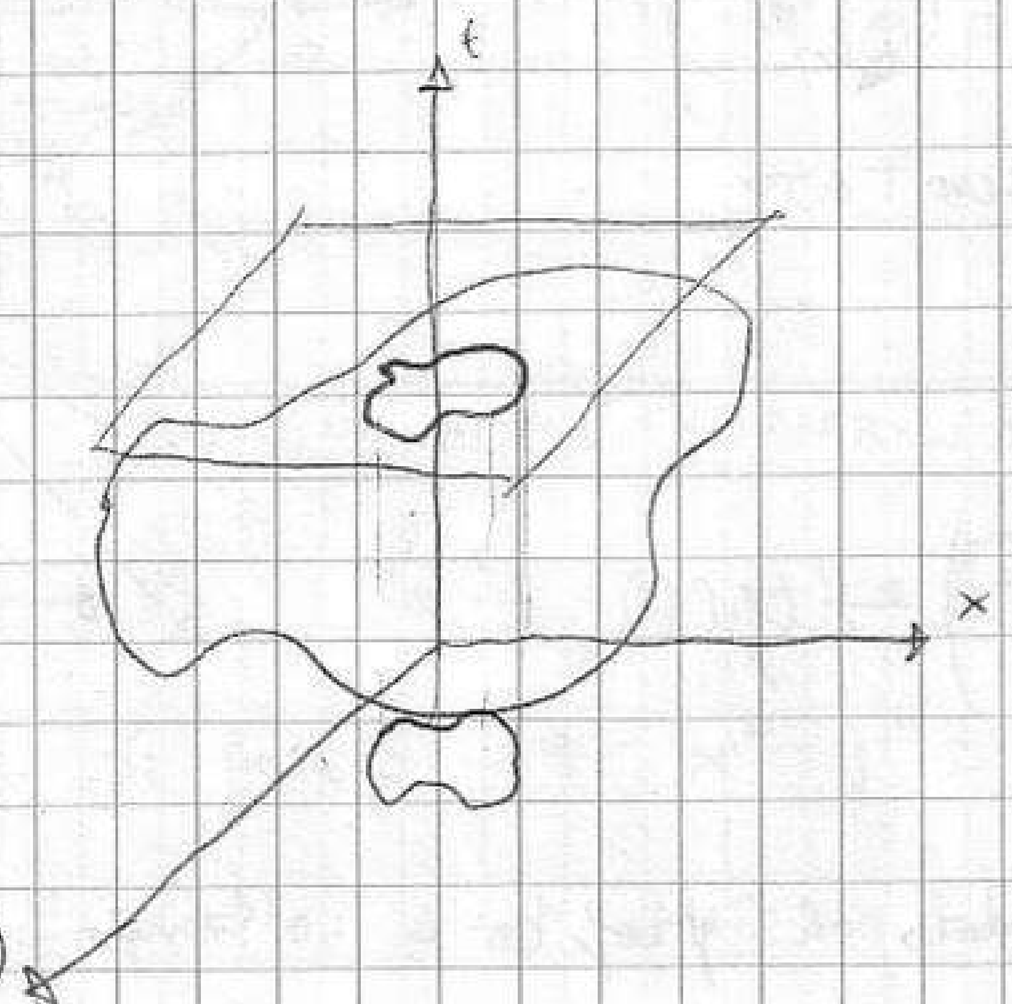


grafico è una certa S. Prendiamo intersecare S con piani paralleli a x, y → ottengo CURVE
↓
La proiezione della curva su x, y è CURVA di LIVELLO a livello k ($z = k$)

↓

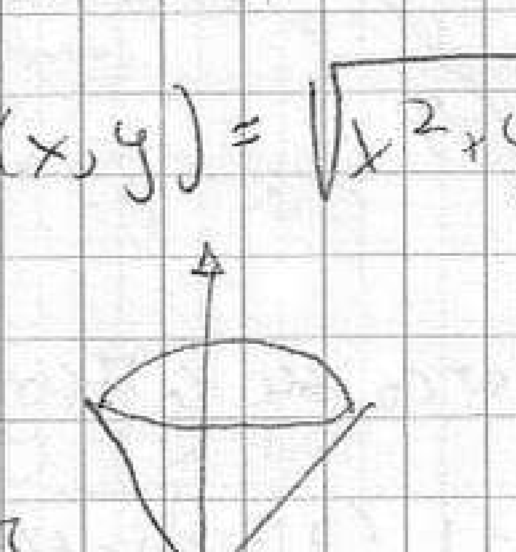
$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = k \end{cases}$$
(int. col piano)

Per avere int. devo risolvere $g(x,y) = k$

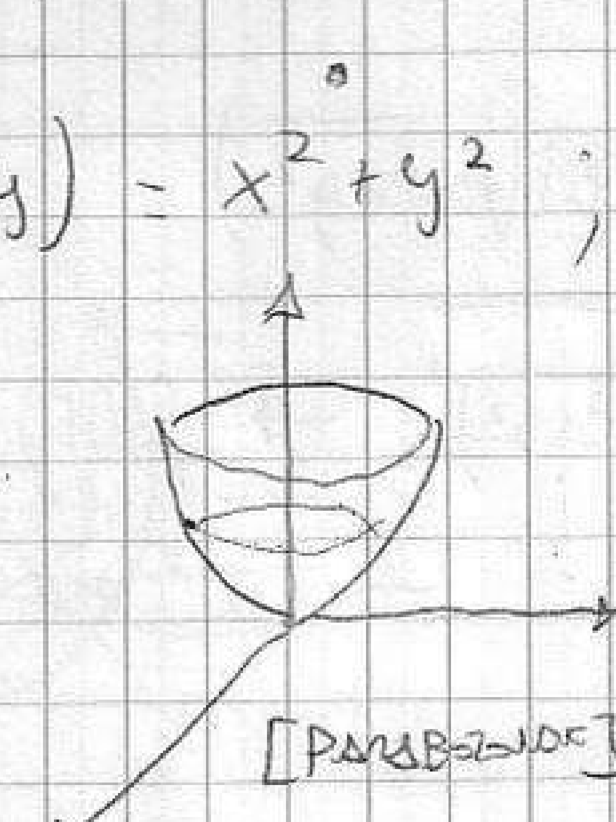
Ex: $g(x,y) = f\left(\underline{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. Imponiamo $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = k$ (sia costante) → lo è se $\sqrt{x^2+y^2} = c$ → $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(c)$

Sono curve di livello i punti che rispondono all'eq. Si può scrivere $x^2 + y^2 = c^2$ (per questo tipo di $f(x)$ le curve di livello sono delle CIRCONFERENZE)

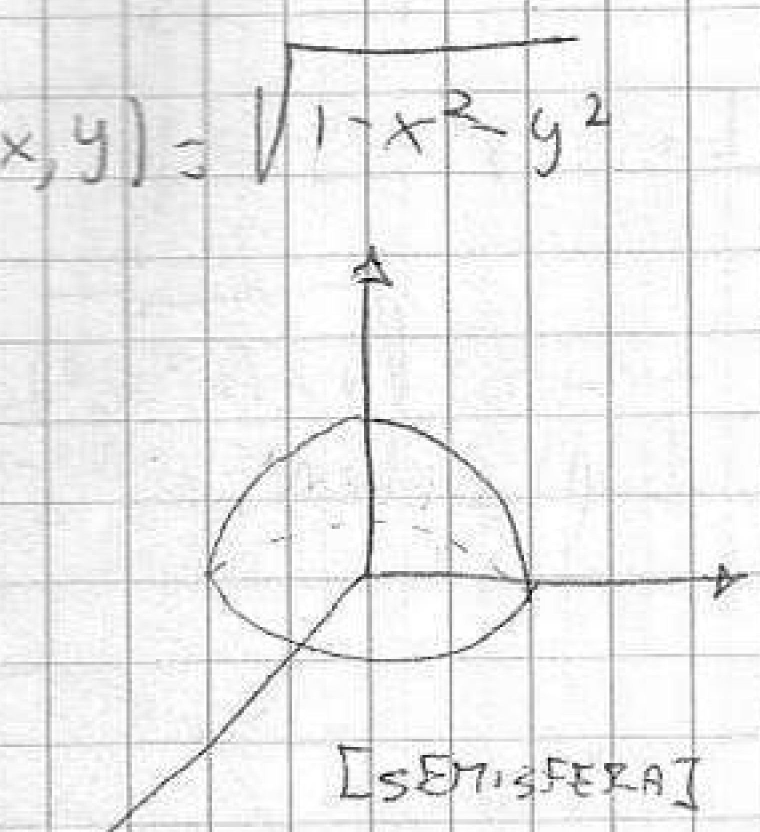
Ex: ① $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; ② $g(x,y) = x^2+y^2$; ③ $g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$



[CONO]



[PARABOLOIDE]



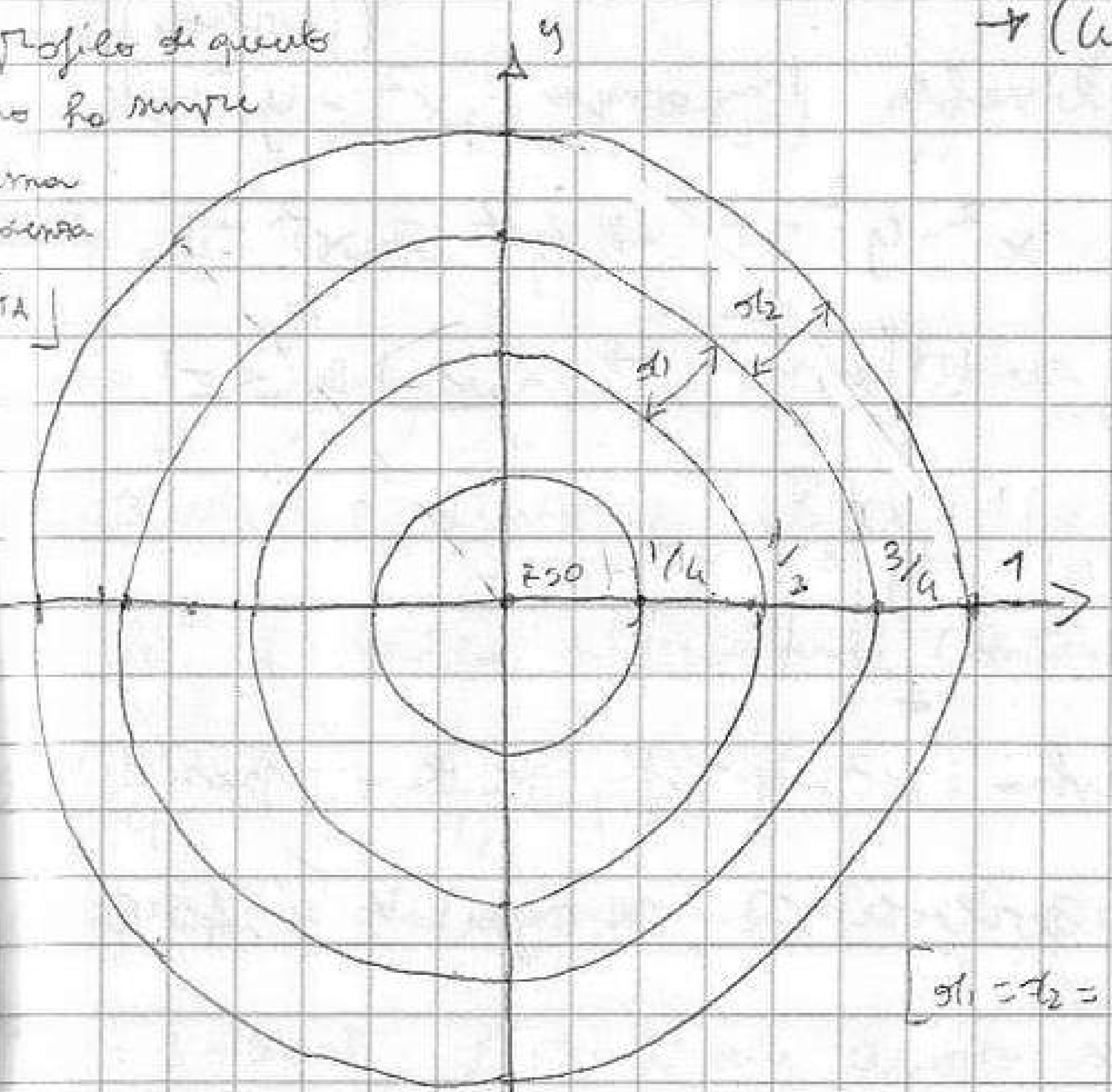
[SEMISFERA]

↓

Prendiamo 4 valori di k.
(intersezioni col piano z)
③

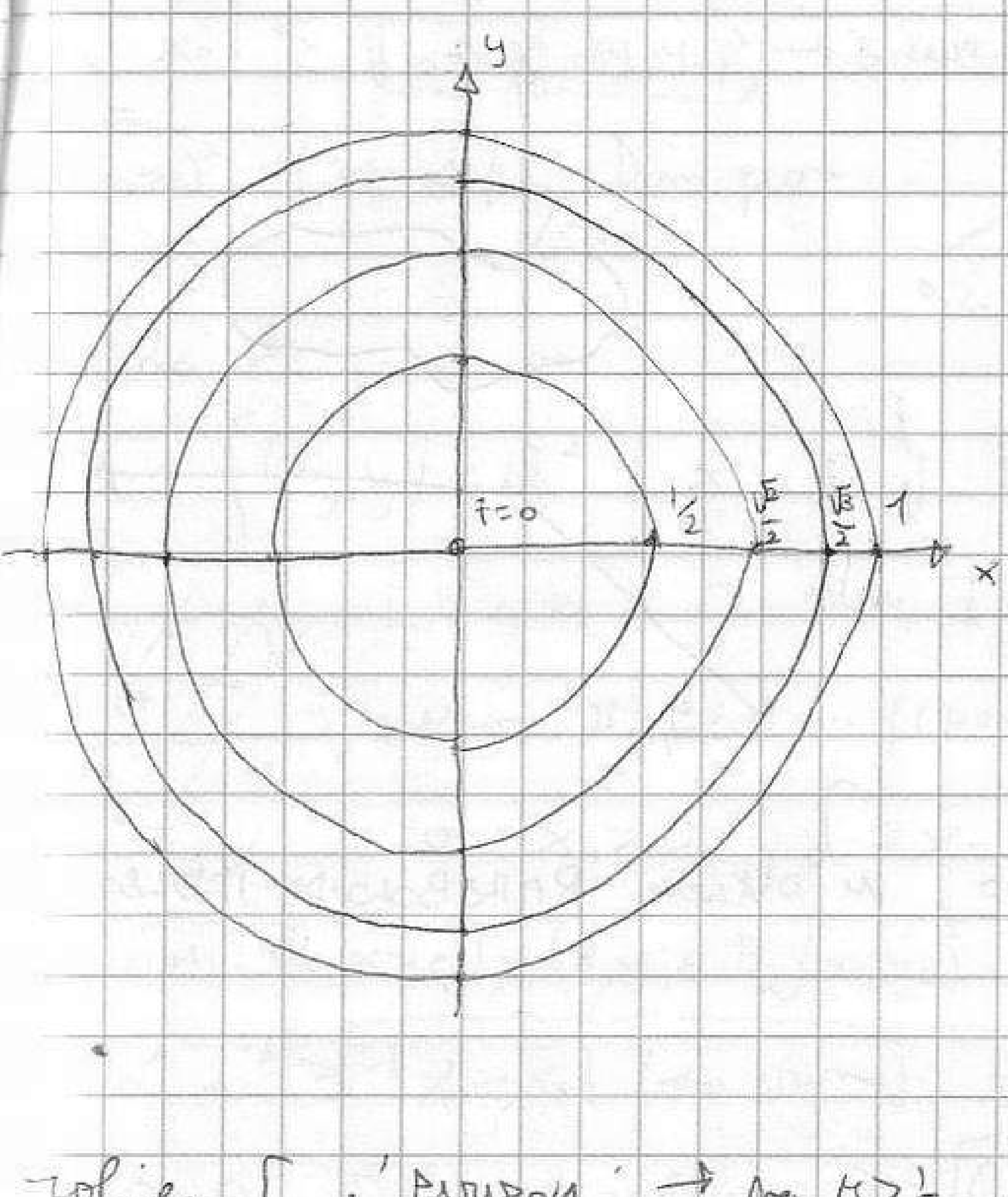
$$z = k \begin{cases} z = 1 \\ z = 3/4 \\ z = 1/2 \\ z = 1/4 \\ z = 0 \end{cases}$$

[Profilo di questo cono ho sempre stessa pendenza = RETTA]



→ (curve di liv.)

① Interseco cono con piano. Se è al livello 1, ottengo CIRCONFERENZA / $\sqrt{x^2+y^2}=k$ ⇒ $x^2+y^2=k^2$ → circ. di raggio $=1$; con $k=3/4$ ho circonf. di $r=3/4$, $k=1/2$ ... $k=1/4$ etc. → distanza tra circonferenze è UGUALE (sono equispaziati) ← [$d_1=d_2=\dots d_n$]

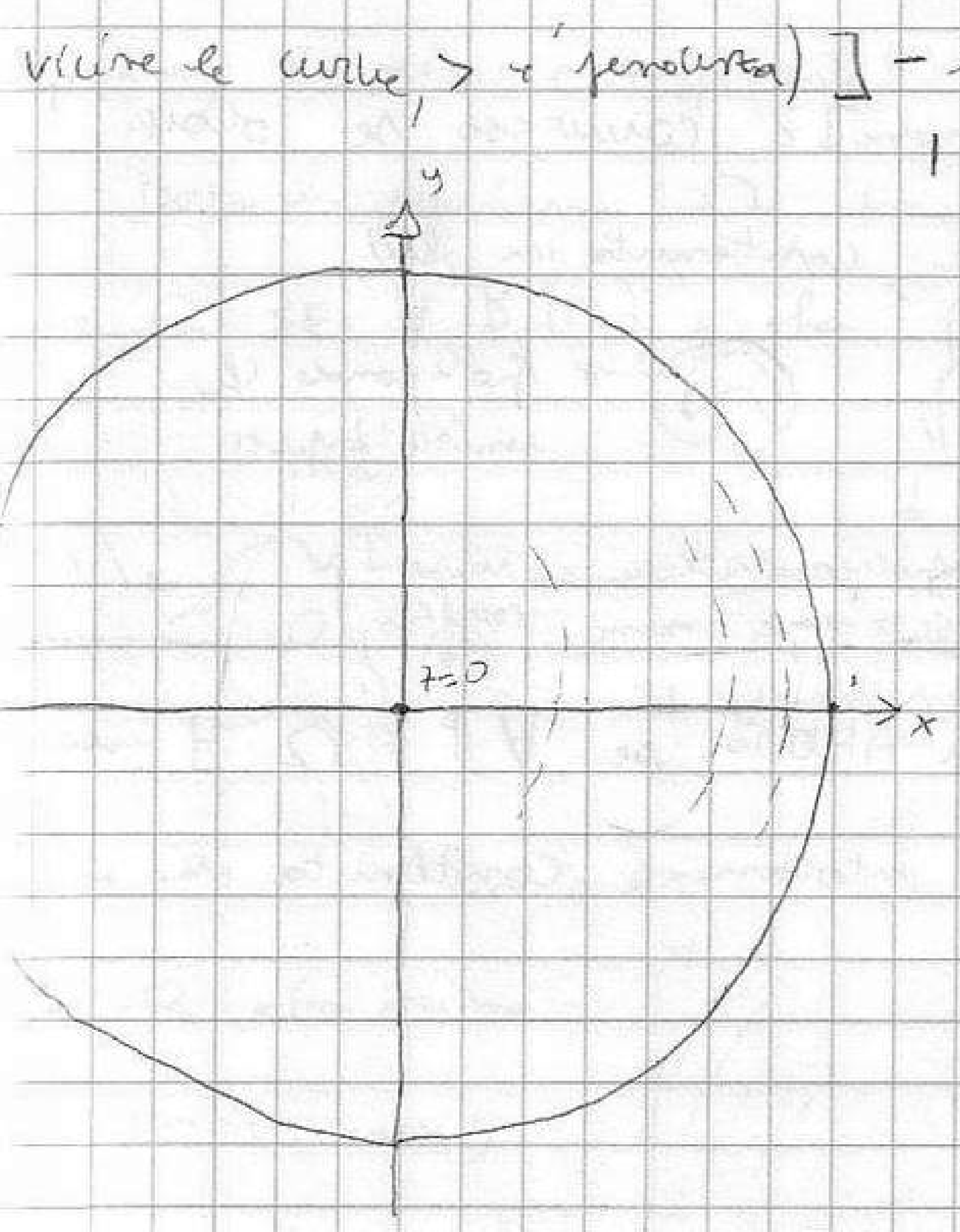


② Qui ottengo circ. sempre di centro (0,0) ma con $r=\sqrt{k}$. $k=1$ è invariato; per $k=3/4 = \sqrt{3}/2 \cong 0{,}86$. Prima era 0,75 (per $k=3/4$) ⇒ circ. sono molto + vicine a quella + grande, per $k=\frac{1}{2}$, $r\cong 0{,}7$, $k=\frac{1}{4}$, $r=0{,}5$ → è + distanziato.

↓

Le circ. con $k>\frac{1}{2}$ sono + vicine a quella + grande. Si capisce dal profilo [è PARABOLA, → per $k>\frac{1}{2}$ pendenza è > di quella della retta — vicine le curve, > è pendenza)] — linee di livello + vicine

1/2



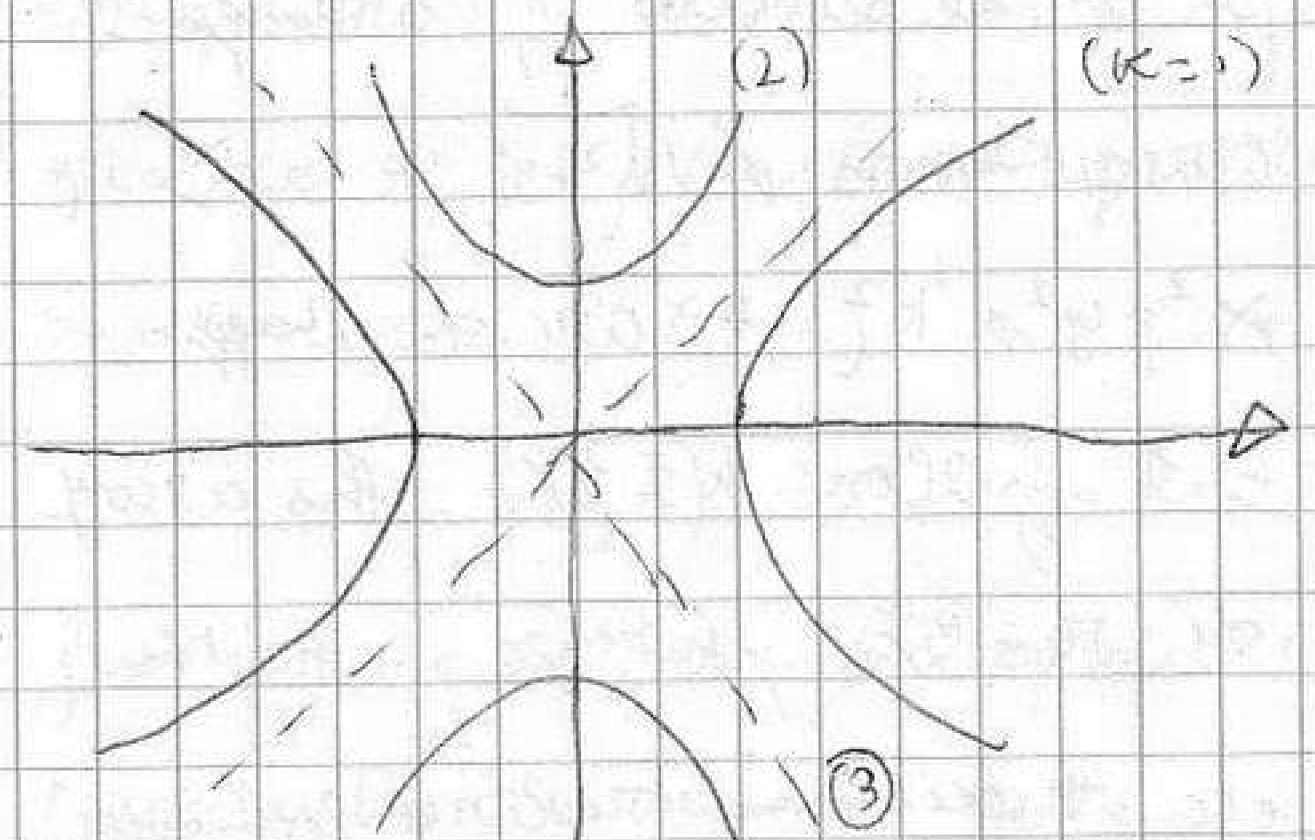
③ Anche qui circ. di centro (0,0).

↓

> pendenza verso la fine (+ [concentrate] vicine agli estremi, dilatate all'interno

Ex:

$z = f(x,y) = x^2 - y^2$ Voglio curve livello. Impongo $x^2 - y^2 = K$ (iperboli)



Ex: $x^2 - y^2 = 1 \to y^2 = x^2 - 1$

$y = \pm\sqrt{x^2-1} \to \underline{x \geq 1}$ e $\underline{x \leq -1}$

Ex (2): $y^2 = x^2 + 1$

Se ho $x^2 - y^2 = K$, se K è positivo ho iperbole ①, se negativo l'iperbole ②

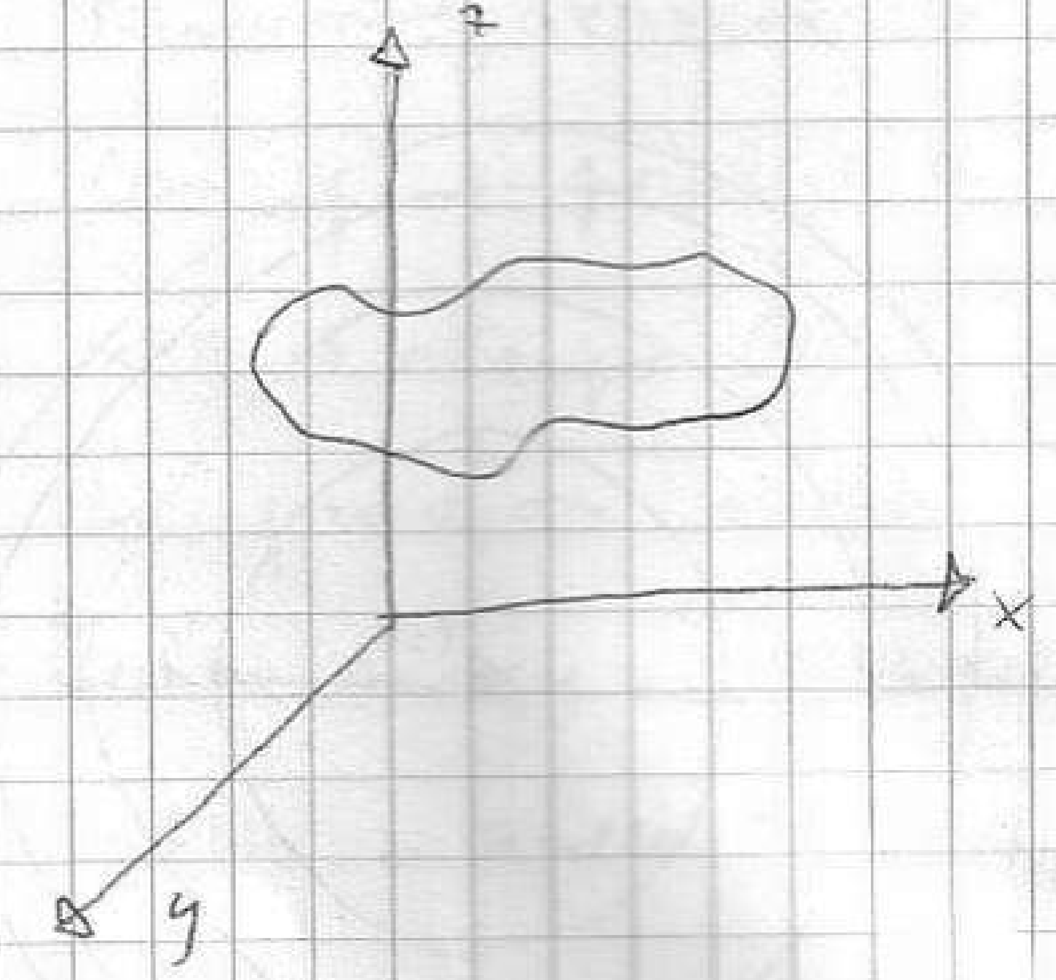
Se $K = 0$ ho le due rette ③.

Poniamo una delle due variabili $= 0$.

Se pongo $x = 0$ ho intersezione profilo con piano $\Rightarrow$ sezione curva. Ottengo

$\underline{z = -y^2}$, se $y = 0$ ho $\underline{z = x^2}$,

se $z = K$ ho IPERBOLI $\to$ mettiamo insieme le info.

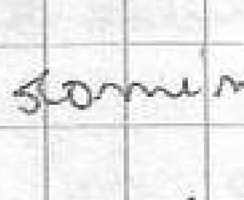
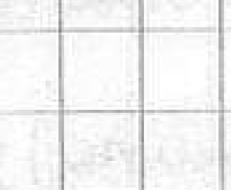


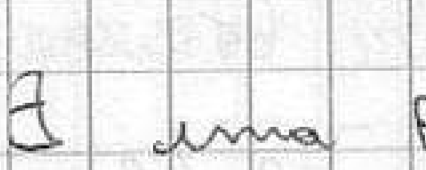
($K > 0$)

($K < 0$) $\to$ (vedi esercizio (78); si ottiene PARABOLOIDE IPERBOLICO)

(restrizioni sui domini)

- INSIEME CONNESSO (PER ARCHI) Ω [insieme] è CONNESSO se dati $P_1, P_2 \in \Omega$, $\exists$ una POLIGONALE che li unisce, contenuta in Ω

Ex: disco  $\to$ questa pol. unisce 2 punti,  $\to$ poligonale che unisce 2 punti $\to$ SI

 $\to$ l'unione di questi insiemi NON È CONNESSA (poligonale deve uscire dagli insiemi $\to$ NON È CONNESSO) $\to$ NO

- INSIEME APERTO: un insieme Ω si dice APERTO se $\forall P \in \Omega$ $\exists$ una PALLA aperta di centro P e raggio δ interamente contenuta in Ω

$B_\delta(P_0) = \{ P \in \mathbb{R}^2 \,/\, d(P, P_0) < \delta \}$ (P_0: CENTRO, δ: RAGGIO)

Se $P=(x,y)$ e $P_0(x_0,y_0)$, la $d(P,P_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ [disco di raggio δ e di centro P_0]

Preso qualunque punto, devo trovare una palla INTERAMENTE CONTENUTA al dentro, $B_\delta(x)=(x-\delta,x+\delta)$ È aperto perché $\exists$ palla interamente contenuta. Ex: $(0,1)$ e $x=\frac{1}{10}$

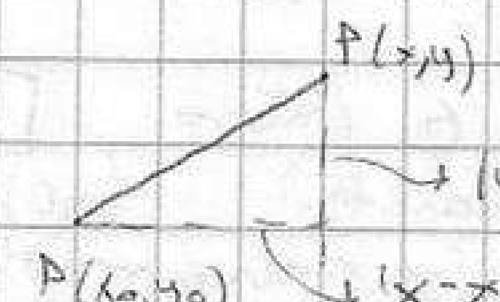
Se $\frac{1}{4}$ $\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{4},\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\right)\not\subset(0,1)$, ma $\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{100},\frac{1}{10}+\frac{1}{100}\right)\subset(0,1) \Rightarrow$ INT. APERTO

$[0,1]$ non è ins. aperto $\rightarrow (0-\delta,0+\delta)\not\subset[0,1]$

04-3-2005 (Ω si dice aperto se $\forall P_0\in\Omega\ \exists B_\delta(P_0)\subseteq\Omega$) (Vedi def. palla δ)

$|x-x_0|\le \boxed{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \rightarrow$ sicur. $\ge \sqrt{(x-x_0)^2+0}$ (termini entrambi positivi)

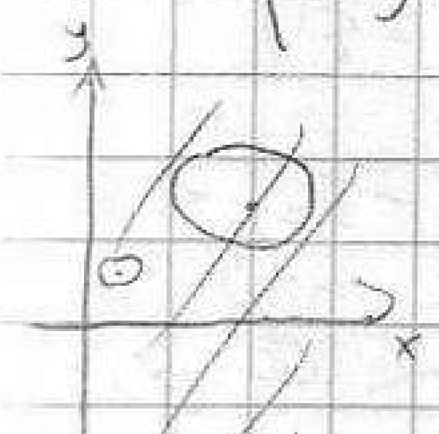
$\sqrt{(x-x_0)^2}=|x-x_0|$; Dim geom.



$\rightarrow$ tr. rettangolo e ipotenusa è più lunga di un cateto

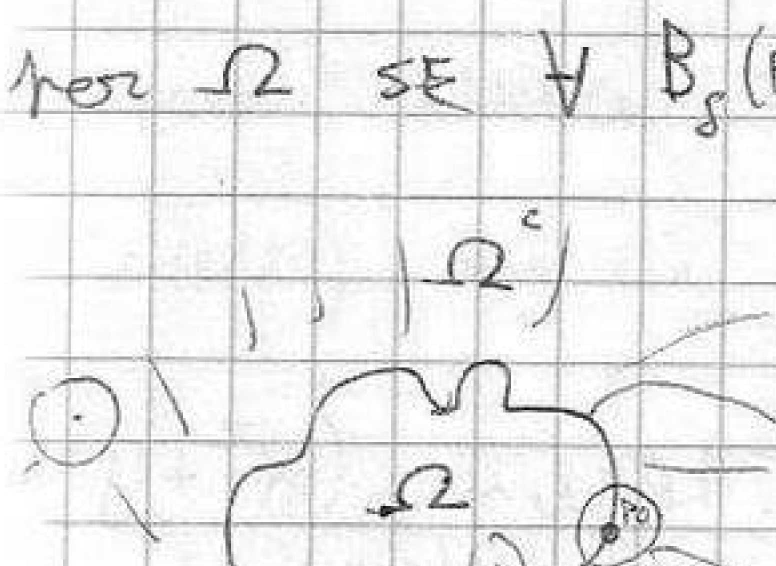
Si ha che

$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}$ Dim che è un INSIEME APERTO.



[$\forall$ p.to $\in\Omega$ deve $\exists$ una PALLA CONTENUTA in Ω]. Quale deve essere R. palla in f(PUNTO) $\rightarrow \delta=f(P)$. Prendiamo $P(x_0,y_0)\in\Omega$ con $x_0>0$. $\delta=x_0$ ad ex. Se $(x,y)\in B_{x_0}(x_0,y_0)$ allora (x,y) tra (cioè che $x>0$); $(x,y)\in B_{x_0}(x_0,y_0)$ cioè $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<x_0$. Ma so che ciò è $\ge |x-x_0|$ (da prima) $\Rightarrow |x-x_0|<x_0 \rightarrow -x_0<x-x_0<x_0 \Rightarrow$ $\underline{x>0}$. È ciò che volevo. $\Rightarrow \boxed{(x,y)\in\Omega}$ (poiché il discorso era per 1 p.to generico, la dim. è sufficiente)

Def: Dato un insieme Ω, un p.to $P_0\in\mathbb{R}^2$ è detto un punto di FRONTIERA per Ω SE $\forall B_\delta(P_0)$ si ha:
$$\begin{cases} B_\delta(P_0)\cap\Omega\neq\emptyset \\ B_\delta(P_0)\cap\Omega^c\neq\emptyset \end{cases}$$
[Ω^c = insieme COMPLEMENTARE]



$\rightarrow$ "bordo insieme" = FRONTIERA di Ω

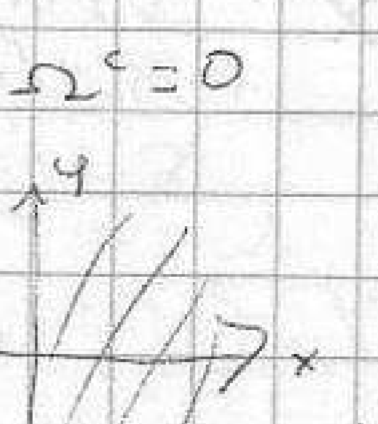
$\rightarrow$ questa palla ha int. sia con Ω che con Ω^c

int. con $\Omega = 0$

int. con $\Omega^c = 0$

Ex: [Ω dim. prima:

P.ti frontiera = asse y



Un insieme è aperto $\Longleftrightarrow$ NON contiene p.ti di FRONTIERA ($\forall$ p.to deve $\exists$ B interamente contenuto in $\Omega \Rightarrow \nexists$ int con Ω^c).

Def. Un insieme è detto CHIUSO se contiene tutti i punti della sua frontiera $\Longleftrightarrow \Omega^c$ è APERTO

Ex: $\tilde{\Omega} = \{(x,y) \mid x \geq 0\}$ → è CHIUSO perché CONTIENE la frontiera $(x=0)$

$\left(\Omega^{(1)} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}\right.$ " ") . [LIMITE DI UNA $f(x,y)$]

Sia Ω insieme aperto e sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ e $(x_0,y_0) \in \Omega$. Diremo che

- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ se $\left[\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ / \ \text{se} \ 0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \right.$ allora $\left. |f(x,y) - l| < \varepsilon \right]$

Preso un qualunque intorno di l, $\exists$ $B(x_0,y_0)$ / se $x,y \in$ palla ed è $\neq x_0,y_0$, allora $f(x,y) \in$ intorno. [Intorno per $f(x)$, solo che prima era palla unidimensionale]

(x_0,y_0) (x,y)

Ex: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$ - consideriamo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to x$. Dalla def: $\forall \varepsilon > 0$ (scelgo $\delta = \varepsilon$).

Prendo $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \overset{\delta}{\varepsilon}$ → se questo è vero, $|f(x,y) - x_0| < \varepsilon$

$|f(x,y) - x_0| = |x - x_0| \leq \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \varepsilon$. Ho dim che x,y $\in$ palla e quindi $f(x,y) - l < \varepsilon$.

TH. (OPERAZIONI SUI LIMITI).

Siano $f,g: \Omega \to \mathbb{R}$ e sia $(x_0,y_0) \in \Omega$. Supponiamo $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ e che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = m$. Allora si ha che

- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f(x,y) + g(x,y)\right) = l+m$; - $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f(x,y) \cdot g(x,y)\right) = l \cdot m$;

- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f(x,y)/g(x,y)\right) = \frac{l}{m}$ (con $m \neq 0$)

Ex: $\left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0\right]$. Dim che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4+1}$. Il $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x^2+y^2) =$

$\overset{①}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}} x^2 + \overset{②}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}} y^2 = \left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x \overset{①}{\cdot} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x\right) + \left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y \overset{②}{\cdot} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y\right) = \underline{x_0^2 + y_0^2}$

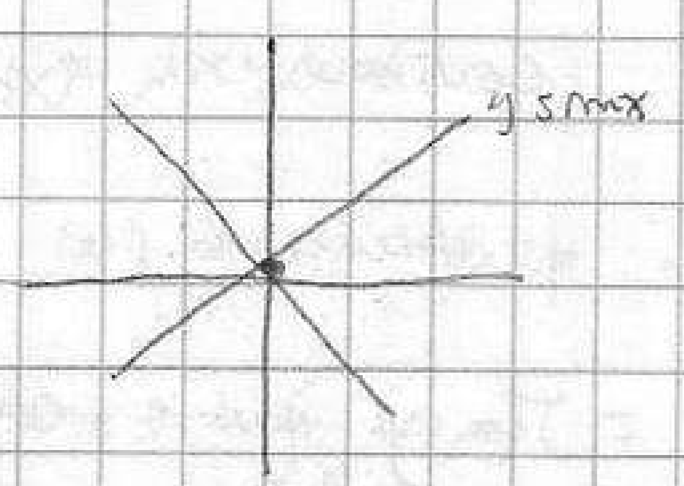
$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x^4+y^4+1) = x_0^4+y_0^4+1$, quindi $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4+1} = \frac{x_0^2+y_0^2}{x_0^4+y_0^4+1}$

[TH]
Sia $F: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in I e sia $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$. Con $g(x,y) = F(f(x,y))$ (l'immagine di f è contenuta in I). Allora $\underline{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = F(l)}$

Ex: $g(x,y) = \sin(x^2+y^2)$. Vogliamo $g(x,y) = F\circ f$; $F(t) = \sin(t)$ e $f(x,y) = x^2+y^2$. Se voglio $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \sin(x_0^2+y_0^2)$

[TH] (Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$)
Per le $f(x,y)$:

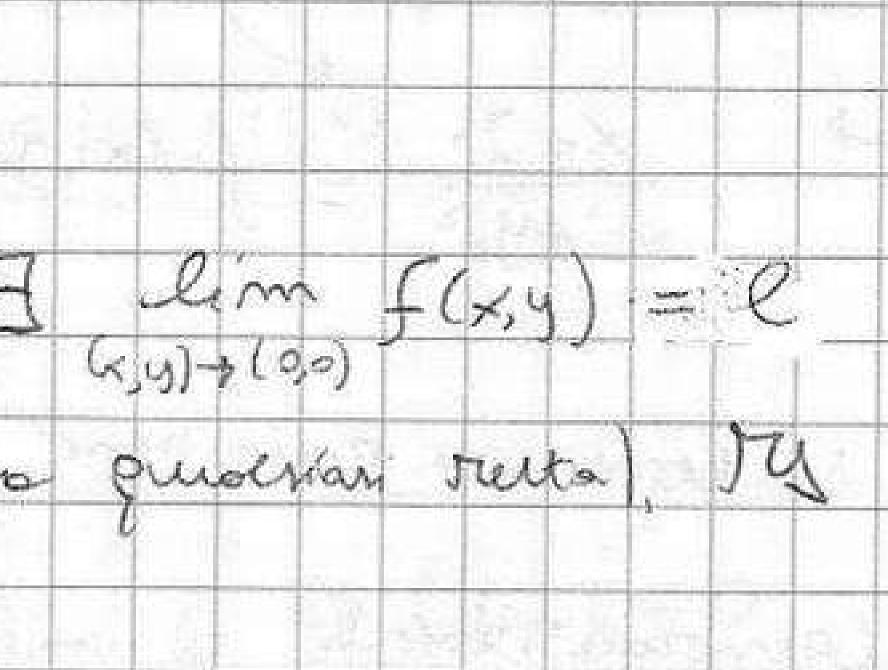
Ex: $(x_0,y_0)=(0,0)$ Studiare il lim (definire il comportamento nell'$I(P)$). Ci poniamo a ridurre alla 1 dimensione.



Considero la restrizione $g_m(x) = f(x, mx)$. Se $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$ necessariamente $\Rightarrow \lim_{x\to 0} g_m(x) = l \quad \forall m \in \mathbb{R}$ (lungo qualsiasi retta). Ma se trovo 2 rette per cui ciò non vale, il lim $\nexists$.

Ex:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Cons. $g_m(x) = f(x, mx) = \frac{x\, mx}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$

[voglio lim in $(0,0)$]. Se faccio $\lim_{x\to 0} g_m(x) = \frac{m}{1+m^2} \Rightarrow$ lim $\alpha\, m$ dipende dalla retta che ho scelto, ma ciò $\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \nexists$



Ex: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ $\left.\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}\right] f(x,y)$

Subito provo se il lim $\nexists$, $g_m(x) = f(x, mx) = (\text{se } x \neq 0) = \frac{x^2m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m^2x^2}{1+m^2}$. $\lim_{x\to 0} g_m(x) = 0 \quad \forall m$. Purtroppo NON POSSIAMO CONCLUDERE che il lim $\exists$

Si passa a coordinate polari: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Studiamo la funz. $h(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2\cos^2\theta\,\rho^2\sin^2\theta / \rho^2 = \rho^2\sin^2\theta\cos^2\theta$

Il lim $\exists$ se $\exists$ $\lim_{\rho\to0} h(\rho,\theta) \neq$ e $\not\forall\theta$ $\left[\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \iff \exists\right.$ $\lim_{\rho\to0} h(\rho,\theta)$ e questo limite è indipendente da θ $\left.\right]$.

$\lim_{\rho\to0} \rho^2\sin^2\theta\cos^2\theta = 0 \;\forall\theta \Rightarrow \underline{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$

09-3-2005 – F(X,Y) CONTINUA

Sia $f: \Omega\,(\text{aperto}) \to \mathbb{R}^1$ e $(x_0,y_0)\in\Omega$. f è CONTINUA in (x_0,y_0) se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Ex. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ Se $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ allora f è continua in (x_0,y_0)

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ → lim di quoziente di f(x) che ammettono limite

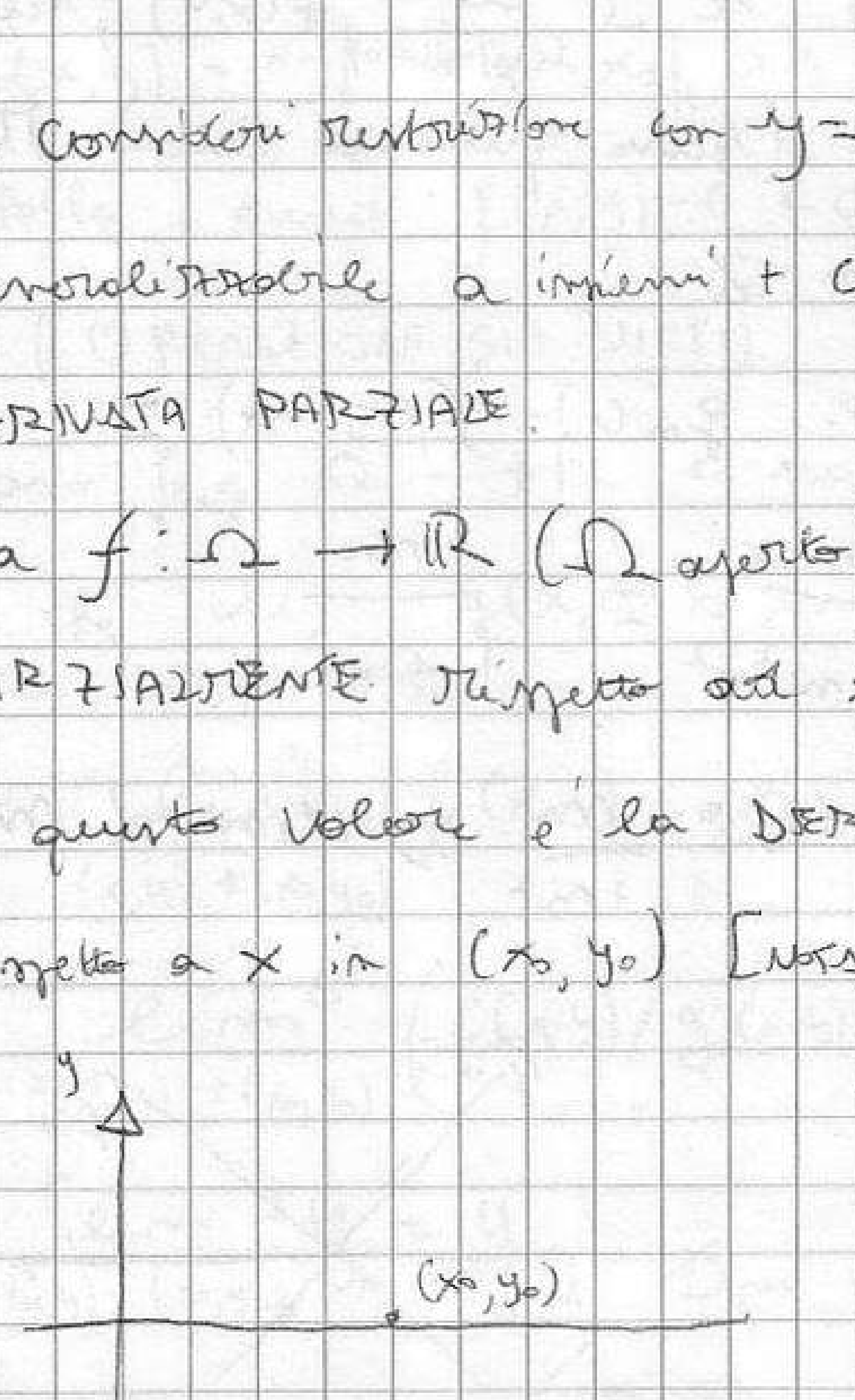
$\to = \frac{x_0y_0}{x_0^2+y_0^2} = f(x_0,y_0)$ [q. $\neq$ da 0]. Ma f NON È CONTINUA in $(0,0)$ (avevamo visto che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \nexists$

se consideri restrizione con $y=x$ e $y=-x$)

(generalizzabile a insiemi + complessi)

DERIVATA PARZIALE

Sia $f: \Omega\to\mathbb{R}$ (Ω aperto). Sia $(x_0,y_0)\in\Omega$. Diremo che f è DERIVABILE PARZIALMENTE rispetto ad x in (x_0,y_0) se $\exists \lim_{\Delta x\to0} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ e questo valore è la DERIVATA PARZIALE di $f(x,y)$ rispetto a x in (x_0,y_0) [NOTAZIONE: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$; $\underline{f_x(x_0,y_0)}$; $f_1(x_0,y_0)$]



La 2ª componente è ferma e varia la 1ª

Fisso y_0 e vario x → ottengo $g_{y_0}(x) = f(x,y_0)$ [f. di 1 variabile] + restrizione a retta

Oss: $f_x(x_0,y_0) = g'_{y_0}(x_0)$

Dim: $g'_{y_0}(x_0)$, se esiste, è $=$ a (→)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g_{y_0}(x_0+\Delta x) - g_{y_0}(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} \to \text{e cioè}$$

è proprio $f_x(x_0,y_0)$. Per calc. der. parz. si considera l'altra variabile come costante.

Ex: $f(x,y) = x^2+y^2 \to f_x = 2x \boxed{+0} \to$ deriv. costante

$f(x,y) = \sin(x,y) \to f_x = y\cos(x,y)$; $f(x,y) = x^2y + y^3x + y^4 \to$
$f_x = 2xy + y^3 + 0$; $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $[(x,y) \neq (0,0)] \to f_x = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cancel{2}x$

[stesso discorso per y]

$f(x,y) = x^2\sin(xy) + y^3$; $\begin{cases} f_x = 2x\sin(xy) + x^2\cos(xy)\,y \\ f_y = x^2\cos(xy)\,x + 3y^2 \end{cases}$

NON È VERO che se $\exists$ la DER. PAR. in un punto la $f(x,y)$ è CONTINUA!

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sappiamo che f NON È CONTINUA in $(0,0)$. Per calcolare la ∂ nell'origine si deve usare la definizione $\to f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} =$

[la f in $y=0$ è $=0$]

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \partial \boxed{\exists}$ ed è $= 0$!

Ora rispetto a y: $f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0 \Rightarrow f_y(0,0) = 0$.

$\exists$ entrambe le ∂ in $(0,0)$ ma $f(x,y)$ NON è CONTINUA in $(0,0)$

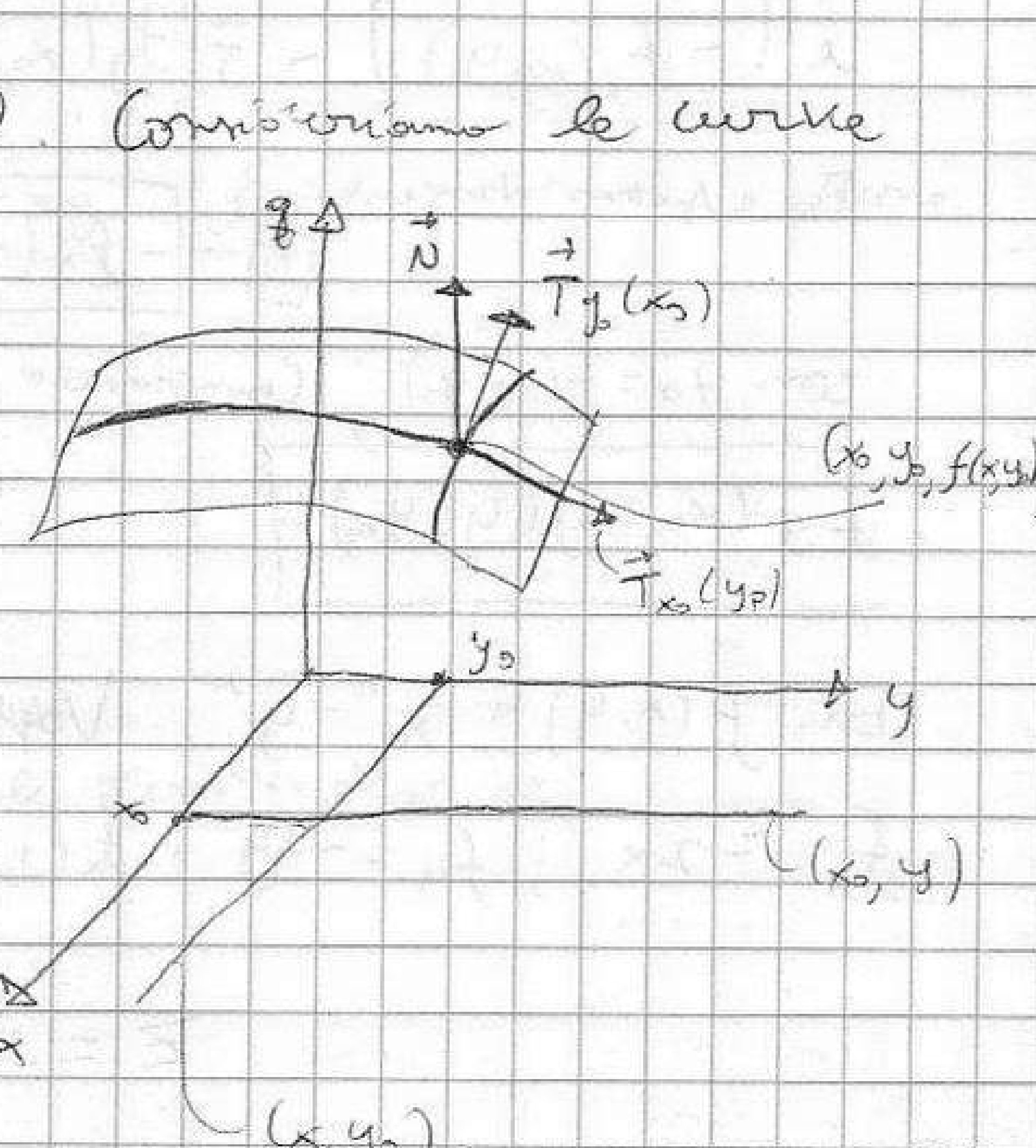
INT. GEOMETRICA DER. PARZIALI

Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Ω aperto, $(x_0,y_0) \in \Omega$). Consideriamo le curve

① $\vec{r}_{y_0}(x) = (x, y_0, f(x,y_0))$

[(x, y_0) corrisponde a curva della superficie.]

e ② $\vec{r}_{x_0}(y) = (x_0, y, f(x_0,y))$. Anche per la retta ② $\exists$ immagine su superficie



Def. vettore $\vec{T}$, $\vec{T}_{y_0}(x) = (1, 0, f_x(x,y_0))$

e $\vec{T}_{x_0}(y) = (0, 1, f_y(x_0,y))$

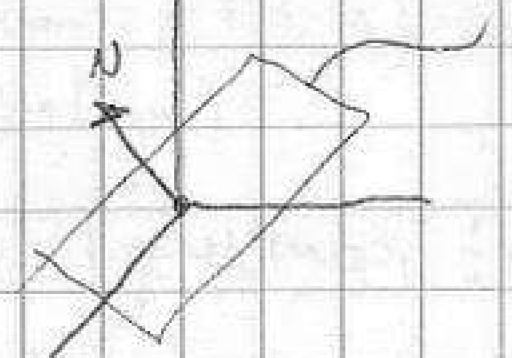
Se calcolo in x_0 ① ho $\vec{T}_{y_0}(x_0)$ e lo stesso per $\vec{T}_{x_0}(y_0)$. Questi vettori

sono BASE SPAZIO TANGENTE al grafico in $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ sono LIN. INDIP. $\Rightarrow$
$\vec{T}^{(1)}_{y_0}(x_0) \nparallel \vec{T}^{(2)}_{x_0}(y_0)$. Posso ottenere vett. $\perp$ con PROD. VETT. Il vettore
$\vec{N} = \vec{T_1} \times \vec{T_2}$ ($\perp$ a $\vec{T_1}$ e $\vec{T_2}$) e quindi è $\perp$ al piano tan. al grafico di f in

$(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

eq. di piano π passante per $P_0(x_0,y_0,z_0)$ e $\perp$ a vettore $\vec{N}(A,B,C)$ =
$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$; prod. scalare tra due vettori
$\langle (A,B,C), (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \rangle = 0$

Ex: Ho $P_0(0,0,0)$; $\vec{N} = (1,0,1)$; $\tilde{\pi} \to$ vogliamo l'eq. $\to$ $A=1$, $B=0$, $C=1$; $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$ $\to 1(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0$
$\downarrow$
$x+z=0$



Ex: $f(x,y) = x^2+y^2$. Vogliamo $\tilde{\pi}$ tan a f in $\tilde{P}_0(0,0)$; $\to P_0 = (0,0,\overset{x^2+y^2}{0})$
Calcoliamo $\vec{T_1}$ e $\vec{T_2}$; [$f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = 2y$; $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0) = 0$]
$\vec{T_1} = (1,0,f_x(0,0)) = (1,0,0)$; $\vec{T_2} = (0,1,\underset{f_y(0,0)}{0})$. Ora calcolo $\vec{N}$, prod.
vett. $\vec{T_1} \times \vec{T_2} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{i}\cdot 0 - \vec{j}\,0 + \vec{k} \to \vec{N} = (0,0,1)$; $P = (0,0,0)$
$\pi = (x-0)0 + (y-0)0 + (z-0)1 = 0 \to z = 0$

$\vec{i} = (1,0,0)$
$\vec{j} = (0,1,0)$
$\vec{k} = (0,0,1)$

(generalizzazione) - F. GENERALE PER $\vec{N}$
$\vec{T_1} = (1,0,f_x(x_0,y_0))$; $\vec{T_2} = (0,1,f_y(x_0,y_0))$. $\boxed{\vec{N}} = \vec{T_1} \times \vec{T_2} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} =$
$i(-f_x(x_0,y_0)) - \vec{j}(f_y(x_0,y_0)) + \vec{k}(1) = \boxed{(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1)}$

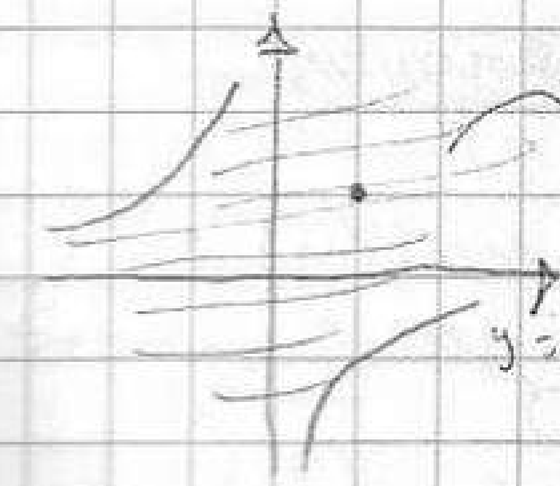
Eq. piano tangente: $\boxed{\tilde{\pi}} = \boxed{-f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + (z-z_0) = 0}$

con $z_0 = f(x_0,y_0)$, Cambiando segno si ha $\boxed{z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$

Ex: $f(x,y) = x^2-y^2$. Vogliamo $\tilde{\pi}$ tan in $\tilde{P}_0 = (1,0) \to P_0 = f(P_0, f(P_0)) = (1,0,1)$
$f_x = 2x$; $f_y = -2y$ [$f_x(1,0) = 2$; $f_y(1,0) = 0$] ; $f(x_0,y_0) = f(1,0) = 1$

$$z = 1 + 2(x-1) + 0(y-0)$$
$$\downarrow$$
$$z = 2x - 1$$

Ex: $f(x,y) = \log(1+xy)$; $1+xy>0$ $\quad xy>-1$ $\quad xy=-1$ (iperbole) $y=-\frac{1}{x}$



$\in D$ (ex $(0,0)\in D$). Vogliamo Π tan in $\tilde{P}=(1,1)$

$$f_x = \frac{1}{1+xy}\cdot y \; ; \quad f_y = \frac{1}{1+xy}\cdot x$$

$$f_x(1,1) = \frac{1}{2} \qquad f_y(1,1) = \frac{1}{2}$$

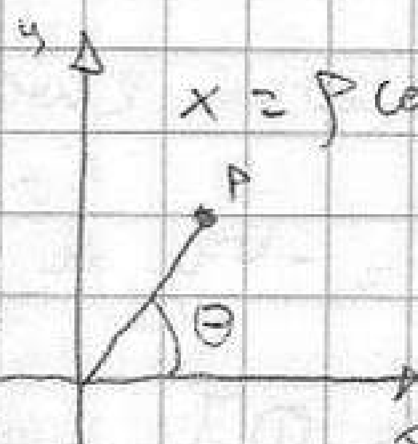
$f(1,1) = \log(2)$

$$z = \log 2 + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)$$

---

11 - 3 - 2005

$\boxed{\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)}$ Nel 1° quad.



$x=\rho\cos\theta$; $y=\rho\sin\theta$; $y/x = tg\,\theta$

$\downarrow$

$\theta = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$ - nel 1° q.

H

$f(x,y)$

$f_x(x,y)$ $\quad f_y(x,y)$ → Anche qui ci sono derivate parziali di ordine SUPERIORE

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x = f_{xx} \to \frac{\partial}{\partial y} f_x = f_{xy} \;/\; \frac{\partial}{\partial x} f_y = f_{yx} \to \frac{\partial}{\partial y} f_y = f_{yy}$$

Le derivate del 2° ordine sono 4.

Ex: $f(x,y) = x^2y^2 + y^3x$; $f_x = 2xy^2 + y^3$ - $f_y = 2yx^2 + 3xy^2$

Ho 2 $f(x,y)$ ulteriormente derivabili: $f_{xx} = 2y^2$, $\underline{f_{xy} = 4xy + 3y^2}$ e

$\underline{f_{yx} = 4yx + 3y^2}$, $f_{yy} = 2x^2 + 6xy$ $\quad [f_{xy} = f_{yx}]$ (derivate MISTE)

TEOREMA di SCHWARZ

Sia $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Supponiamo che f_{xy} e f_{yx} esistono e sono continue; ALLORA sono UGUALI

H

Da Calcolo I: $y' = y \to y(x) = e^x + c$; $y'' = -y \to y(x) = \sin(x)$; EDO è relazione tra $f(x)$ e $f'(x)$

$\downarrow$

Si può applicare alle $f(x,y)$ considerando le derivate parziali:

$f_x + f_y = 0 \to f(x,y) = x - y$

[EQUAZIONI alle DERIVATE PARZIALI]

$\downarrow$

EQUAZIONE DI LAPLACE

$\boxed{f_{xx}+f_{yy}=0}$ → Una funzione che soddisfa questa equazione alle derivate parziali si dice ARMONICA

Ex: $f(x,y)=e^{kx}\sin(ky)$; $f_x = ke^{kx}\sin(ky) \to f_{xx}=k^2\sin(ky)e^{ky}$ e

$f_y = ke^{kx}\cos ky \to f_{yy} = -k^2 e^{kx}\sin(ky)$; $f_{xx}+f_{yy}=0$

$f(x,y)=e^{kx}\cos(ky)$ è armonica

EQUAZIONE di CAUCHY-RIEMANN

Sia $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ (due funzioni). Supponiamo che $\underline{u_x = v_y}$ ① mentre $\underline{v_x = -u_y}$ ② (le siano derivabili 2 volte e continue) allora U e V sono ARMONICHE [anche $u_x=-v_y$ e $v_x=u_y$]

Dim: $u_{xx}=v_{yx}$ [da ①] e $v_{xy}=-u_{yy}$ [da ②]

Se v_{xy} e v_{yx} sono continue, allora per il th. di Schwarz sono UGUALI.

$\Rightarrow u_{xx}=v_{yx}=v_{xy}=-u_{yy} \Rightarrow u_{xx}=-u_{yy}$ ovvero $\underline{u_{xx}+u_{yy}=0}$

soddisfa Laplace, quindi u e V sono ARMONICHE, (lo stesso per V).

$v_{yy}=u_{xy}$ [da ①] e $v_{xx}=-u_{yx}$ [da ②] → $v_{yy}=v_{xx}$ → armonica

Ex:

$u(x,y)=e^{kx}\sin(ky)$ e $v(x,y)=e^{kx}\cos(ky)$

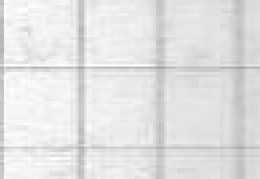
$\underline{u_x} = ke^{kx}\sin(ky)$; $\underline{v_y}=-ke^{kx}\sin(ky)$ / $\underline{u_y} = ke^{kx}\cos(ky)$;

$\underline{v_x} = ke^{kx}\cos(ky)$) soddisfa C-R.

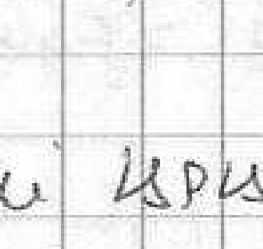
↓

Per $f(x)$ l'eq. di LAPLACE è $y''=0$; $z=y' \to z'=0 \Rightarrow z=k$ (costante)

$\to y'=C \Rightarrow y=Cx+D \Rightarrow f(x)$ armoniche in un I sono funzioni AFFINI

→ (max e min di intervallo sono i p.ti di frontiera) 

↓

GENERALIZZAZIONE:  + sia MAX che MIN sono assunti sulla FRONTIERA

Se $u:\Omega\to\mathbb{R}$ è ARMONICA assume [insieme chiuso e limitato]

il MAX e MIN sulla FRONTIERA.

↓

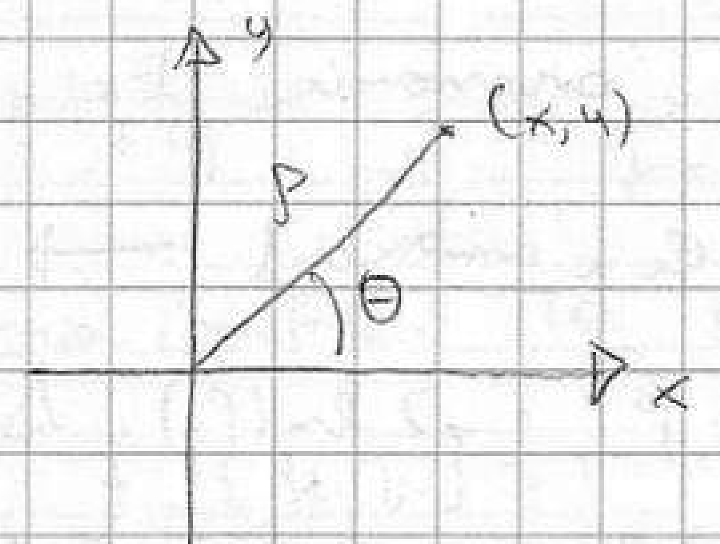
(simile a Weierstrass per $f(x)$)

14-3-2005

$f(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ è armonica (vedi cr. R - p. ⊗)

(→)

$$\begin{cases} x = \rho \cos\Theta \\ y = \rho \sin\Theta \end{cases}$$



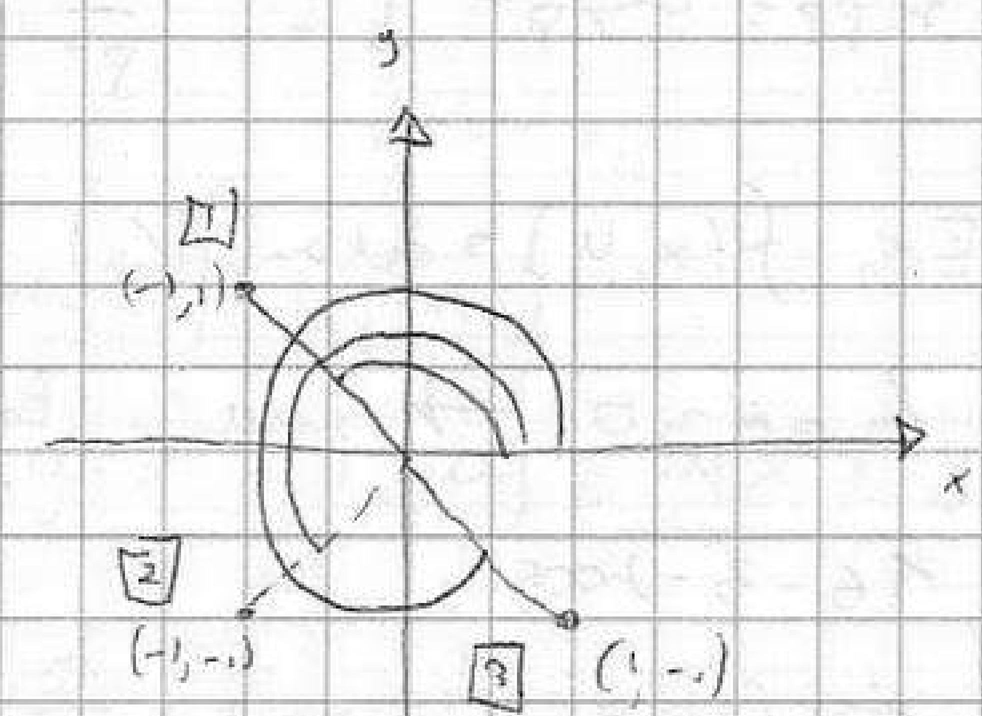
Indico con $\Theta(x,y)$ l'angolo del raggio vettore che parte da $(0,0)$ con le x positive.

Se faccio y/x ho $\tan\Theta$. Se sono nel 1° quad applico l'atan →

$\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{atan}(\operatorname{tg}\Theta) = \Theta$. MA:

Se sono altro quad. $\left(\Theta = \frac{3}{4}\pi\right)$ $\boxed{1}$

Se $\operatorname{atan}\left(\frac{-1}{1}\right) = \operatorname{atan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ (essendo limitata a $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$) ma Θ è $\frac{3}{4}\pi$



In $\boxed{2}$ $\Theta = \frac{5}{4}\pi$ ma $\operatorname{atan}\left(\frac{-1}{-1}\right) = \operatorname{atan}(1) = \frac{\pi}{4}$

In $\boxed{3}$ $\Theta = \frac{7}{4}\pi$, ma $\operatorname{atan}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$

Vogliamo atan in modo che restituisca correttamente Θ

$$\Theta(x,y) = \begin{cases} \operatorname{atan}(y/x) & \text{se } x>0 \text{ e } y>0 \\ \pi/2 & \text{se } x=0 \text{ e } y>0 \\ \operatorname{atan}(y/x)+\pi & \text{se } x<0 \text{ e } \cancel{y>0} \\ & \text{Vale anche per } y<0 \Rightarrow \text{non serve} \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x=0 \text{ e } y<0 \\ \operatorname{atan}(y/x)+2\pi & \text{se } x>0 \text{ e } y<0 \end{cases}$$

→ ma non si può estendere al semiasse $y=0$ $x>0$ [da sopra tende a 0, da sotto a 2π]

LAPLACIANO in COORDINATE POLARI

$f_{xx} + f_{yy} = 0$. Possiamo applicare a f un certo operatore, l'OPERATORE LAPLACIANO definito come: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\Delta f = 0 \iff f_{xx} + f_{yy} = 0$

Sia $f(x,y)$. Possiamo ottenere una nuova funz. con coordinate polari:

$f(x,y) \xrightarrow[\text{c. pol}]{①} h(\rho,\Theta) = f(\rho\cos\Theta, \rho\sin\Theta)$

Δ → posso applicare il laplaciano

si applica l'operatore LAP in coordinate polari $\boxed{\Delta_{pol} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}}$

② $\Delta f(x,y) \xrightarrow[\text{[di nuovo]}]{\text{cor. pol.}}$ ③ $\tilde{h}(\rho,\Theta) = \Delta f(\rho\cos\Theta, \rho\sin\Theta)$

Ex: $f(x,y) = x^3 + y^3 \xrightarrow[\text{c.r.}]{①} \rho^3\cos^3\Theta + \rho^3\sin^3\Theta$

② Δ ↓ per questo passaggio si applica Δ_{pol}

$6x + 6y \xrightarrow[]{③ \ \text{c.r.}} 6\rho\cos\Theta + 6\rho\sin\Theta$

Si può usare $\times$ verificare se f è armonica. Ex:

$f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ [scoppiamo che è armonica] $\longrightarrow h(\rho,\theta) = \ln(\rho^2)$ (caso particolare dove dip. solo da ρ) $= 2\ln(\rho)$. Applichiamo Δ pol:

$\Delta pol\ h(\rho,\theta) = h_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} h_\rho + \frac{1}{\rho^2} h_{\theta\theta} = [h_\theta = h_{\theta\theta} = 0\ ;\ h_\rho = 2/\rho\ ;\ h_{\rho\rho} = -2/\rho^2] = -\frac{2}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{2}{\rho} + 0 = -\frac{2}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} = 0 \Rightarrow$ ARMONICA.

Ex: $f(x,y) = \operatorname{atan}(y/x) = \operatorname{artg}(\operatorname{tg}\theta) = \theta + c$; $h_\rho = 0 = h_{\rho\rho}$; $h_\theta = 1$; $h_{\theta\theta} = 0 \rightarrow$ tutti i termini $= 0 \Rightarrow$ armonica.

16-3-2005

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremo che f è di CLASSE C^1 in Ω ($f \in C^1(\Omega)$) se f_x, f_y $\exists$ e sono continue in Ω.

(vedi ex. 39 – esempio di una funzione per cui $\exists f_x$ e f_y ma $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$, f_x non era continua nell'origine) – [da Calcolo 1: se $\lim_{x\to x_0} f'(x) = l$ e f è derivabile in $x_0 \Rightarrow l = f'(x_0)$]. A noi interessano anche di classe C^2:

Diremo che $f \in C^2(\Omega)$ se $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$ sono funzioni CONTINUE in Ω (e – per SCHWARTZ – $f_{xy} = f_{yx}$)

[Se considero f, g ($\operatorname{Im} g \subseteq f$ – funzioni di una variabile) e $h(t) = f(g(t))$

$h'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$; th. deriv. funzioni composte ; ex: $h(t) = \sin(t^2)$ – $f(x) = \sin x$ – $g(t) = t^2 \rightarrow h'(t) = 2t\cos(t^2)$; notazione fisica: $\frac{dh}{dt} = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dt}$ (ma non si sa in che punto calcolare la derivata, mentre nell'altra formula sì ; GENERALIZZAZIONE]

Sia: $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \to f(u,v)$; $u : \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to u(x,y)$ e $v : \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to u(x,y)$

(3 funzioni dove Dom u = Dom v. Definisco funzione composta; deve accadere:

$\operatorname{Im}(u,v) \subseteq \Omega$; $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$.

$$\boxed{g_x(x,y) = f_u(u(x,y), v(x,y)) \cdot u_x(x,y) + f_v(u(x,y), v(x,y)) \cdot v_x(x,y)}$$

(formula analoga per g_y, al posto di u_x e v_x c'è u_y e v_y)

Ex: $f(u,v) = u^2 + v$; $u(x,y) = xy$; $v(x,y) = y^2$

18 $g(x,y)$, per definizione, $= f(u(x,y), v(x,y))$ e quindi è

$f(xy, y^2) = x^2y^2 + y^2$; $g_x = \underline{2xy^2}$; $g_y(x,y) = \underline{2yx^2 + 2y}$

(il teorema sembra inutile. Ma applichiamolo)

$f_u(u,v) = 2u$; $f_v(u,v) = 1$, $u_x(x,y) = y$; $v_x(x,y) = 0$

$$g_x(x,y) = \underbrace{2xy}_{f_u \text{ calcolata in } u(x,y) - f(xy,y^2)} \cdot \underbrace{y}_{u_x(x,y)} + \underbrace{1}_{f_v(xy,y^2)} \cdot \underbrace{0}_{v_x(x,y)} = \underline{2xy^2}$$

$g_y(x,y) = f_u(u(x,y), v(x,y))\, u_y(x,y) + f_v(u(x,y), v(x,y)) \cdot v_y(x,y)$

$u_y(x,y) = x$; $v_y(x,y) = 2y \rightarrow g_y(x,y) = 2xy \cdot x + 1 \cdot 2y = \underline{2yx^2} \underline{+2y}$

[Se $h(t) = f(g(t))$, $h'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$. $h''(t) = \frac{d}{dt}[f'(g(t))] \cdot g'(t) + f'(g(t)) \cdot g''(t) = f''(g(t)) \cdot g'(t) \cdot g'(t) + f'(g(t)) \cdot g''(t)$ - in f a 1 var]

↓ (generalizzazione)

Sia $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$; $g_x = f_u(u(x,y), v(x,y))\, u_x(x,y) + f_v(u(x,y), v(x,y)) \cdot v_x(x,y)$. Vogliamo: $g_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[f_u(u(x,y), v(x,y))]\, u_x(x,y) + f_u(u(x,y), v(x,y)) \cdot u_{xx}(x,y)$ (1° addendo) $+ \frac{\partial}{\partial x}[f_v(u(x,y), v(x,y))]\, v_x(x,y) + f_v(u(x,y), v(x,y)) \cdot v_{xx}(x,y) =$ (2° addendo)

$=$ (si deriva f_u rispetto a u) $[f_{uu}(\text{in } u \text{ e } V)$ (derivata di u risp. a x) $\cdot u_x(\dots) +$ (deriv. f_u risp. a v.)

$+ f_{uv}(\dots) \cdot v_x(\dots)] \cdot u_x(\dots) + f_u(u(x,y), v(\dots))\, u_{xx}(x,y) +$

$+$ (analogo a prima) $[f_{vu}(\dots)\, u_x(\dots) + f_{vv}(\dots) \cdot v_x(\dots)] \cdot v_x(\dots) +$

$+ f_v(\dots) \cdot v_{xx}(\dots)$

ci sono f composte - calcolo in u, v ; le altre in x, y

$g_{xy}(x,y) = (f_{uu}(\dots) \cdot u_y + f_{uv}(\dots)\, v_y)\, u_x + f_u(\dots) \cdot u_{xy} +$

$+ (f_{vu}(\dots)\, u_y + f_{vv}(\dots)\, v_y)\, v_x + f_v(\dots) \cdot v_{xy}$ $[\underline{f_{uu}} = f_{uu}(\dots)]$

Ex: $g(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$. Le formule sono utili quando conosciamo esplicitamente u e v, ma non f.

$g_x(x,y) = f_u(x^2-y^2, 2xy) \cdot 2x + f_v(x^2-y^2, 2xy) \cdot 2y$

$g_{xx}(x,y) = (f_{uu}\cdot 2x + f_{uv}\, 2y)\cdot 2x + f_u \cdot 2) + (f_{vu}\cdot 2x +$
$f_{vv}\cdot 2y)\cdot 2y + f_v \cdot 0$

$g_{y}(x,y) = f_u\cdot(-2y) + f_v\cdot 2x$

$g_{yy}(x,y) = \left[\left(f_{uu}(-2y) + f_{uv}\, 2x\right)(-2y) + f_u(-2)\right] + \left[\left(f_{vu}(-2y) +\right.\right.$
$\left.\left. f_{vv}\cdot 2x\right)2x + f_v\cdot 0\right]$

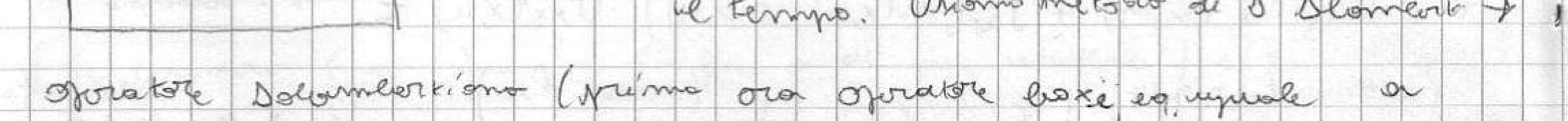
$= a\ f_{vu}$

$g_{xx} + g_{yy} = f_{uu}(4x^2+4y^2) + f_{vv}(4y^2+4x^2) + f_{uv}($
$4xy + 4xy - 4xy - 4xy) + f_u(2-2) + f_v(0)$; il laplaciano della funzione: $\Delta g = (4x^2+4y^2)(\Delta f)$ $[g_{xx}+g_{yy} = (4x^2+4y^2)(f_{uu}+$
$f_{vv})]$; $\Delta g = 0$ se f è ARMONICA [$\Delta f = 0 \Rightarrow \Delta g = 0 \Rightarrow g$ è ARMONICA]

EQUAZIONE DELLE ONDE, equazione dove ci sono solo le der. par. pure di z_{tx}. Si chiama t perché rapp. il tempo. Usiamo metodo di D'Alembert + operatore Dalambertiano (prima era operatore base; eq. uguale a z_{tt}: $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$).

$$\boxed{z_{tt} = c^2 z_{xx}}$$

$z(x,t) = f(x-ct)$ [f è funzione di 1 var. derivabile 2 volte]
$z_x(x,t) = f'(x-ct)\cdot 1$ (derivando col th. der. di 1 var.); $z_{xx}(x,t) =$
$f''(x-ct)\,1$; $z_t(x,t) = f'(x-ct)(-c)$; $z_{tt}(x,t) = f''(x-ct)\,c^2 \to z_{xx}(x,t)$
Si nota che è sol. $\forall f \Rightarrow$ SOLUZIONE
Perché si è usato t e non y! graficamo $z(x,t) = f(x-ct)$ per vari valori di t. [1]: $t=0$, [2]: $t=1$, [3]: $t=2$



curva traslata verso dx

Al variare di t ottengo il grafico di un onda che si muove verso dx.

18-3-2005

$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ (f, g sono funz. di 1 var. deriv. 2 volte).

$u(x,t) = \sin(x-ct) + e^{(x+ct)^2}$. Consideriamo una generica $f(\xi, \eta)$

quindi $\xi(x,t) = x - ct$ e $\eta(x,t) = x + ct$. Calcoliamo $u_x(x,t) = f_\xi(x-ct, x+ct)1 + f_\eta(x-ct, x+ct)1$; ora $u_{xx}(x,t) = f_{\xi\xi}(x-ct, x+ct)1 + f_{\xi\eta}(x-ct, x+ct)1 + f_{\eta\xi}(x-ct, x+ct)1 + f_{\eta\eta}(x-ct, x+ct)1$. Quindi

$u_{xx} = f_{\xi\xi}(\dots) + 2f_{\eta\xi}(\dots) + f_{\eta\eta}(\dots)$. Ora calcoliamo u_{tt}.

$u_t = f_\xi(x-ct, x+ct)(-c) + f_\eta(x-ct, x+ct)(c)$;

$u_{tt} = f_{\xi\xi}(x-ct, x+ct)c^2 + f_{\xi\eta}(x-ct, x+ct)(-c^2) + f_{\eta\xi}(x-ct, x+ct)(-c^2)$

$+ f_{\eta\eta}(x-ct, x+ct)c^2 \rightarrow u_{tt} = c^2 f_{\xi\xi}(\cdot,\cdot) - 2c^2 f_{\xi\eta}(\cdot,\cdot) + c^2 f_{\eta\eta}(\cdot,\cdot)$

$\underbrace{c^2 \cancel{f_{\xi\xi}} - 2c^2 f_{\xi\eta} + c^2 \cancel{f_{\eta\eta}}}_{u_{tt}} = \underbrace{c^2 \cancel{f_{\xi\xi}} + 2c^2 f_{\xi\eta} + c^2 \cancel{f_{\eta\eta}}}_{c^2 u_{xx}} \rightarrow$

$4c^2 f_{\xi\eta} = 0$. Essendo c^2 positivo, $\underline{f_{\xi\eta} = 0}$. Affinché sia soddisf. l'eq. delle onde, f deve soddisfare questa condizione. $\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi} f\right] = 0\right]$

$\downarrow$

Data $f(\xi, \eta)$; $f_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0 \iff f(\xi, \eta) = h_1(\xi) + h_2(\eta)$. ($h_1, h_2$: f. di 1 var.)

$\downarrow$

Ex: $f(\xi, \eta) = \xi^2 + \sin\eta$; $f_{\xi\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi} f\right] = \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^2 + \sin\eta\right]\right]$

$= \frac{\partial}{\partial\eta}\left[2\xi\right] = 0 \rightarrow$ Valido $\forall\, h_1(\xi), h_2(\eta)$

Dim. che TUTTE le sol. dell'eq. sono del tipo $f(\xi, \eta) = h_1(\xi) + h_2(\eta)$

$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi, \eta)\right] = 0$ $\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\left[g(\xi, \eta)\right] = 0 \rightarrow g\right.$ è costante risp. a η

quindi $\left. g(\xi, \eta) = \tilde{h}_1(\xi)\right) \longrightarrow f$ è funzione solo di ξ. Se prendo

$g(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi, \eta) = \tilde{h}_1(\xi)$. Sappiamo che $\overset{\text{t.o. fond.}}{f(\xi, \eta)} = \underbrace{\int \tilde{h}_1(\xi)\,d\xi}_{h_1(\xi)} +$

$\overline{h_2(\eta)}^{\text{costante}} = h_1(\xi) + h_2(\eta)$

$u(x,t) = f(x-ct,\ x+ct) = h_1(x-ct) + h_2(x+ct)$ [f. di 1 var. derivabili 2 volte]

//

(da Calc 1.) - Funzione di una variabile, f è derivabile in x_0 se $\exists$ finito $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

$$= \ell = f'(x_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = 0$$

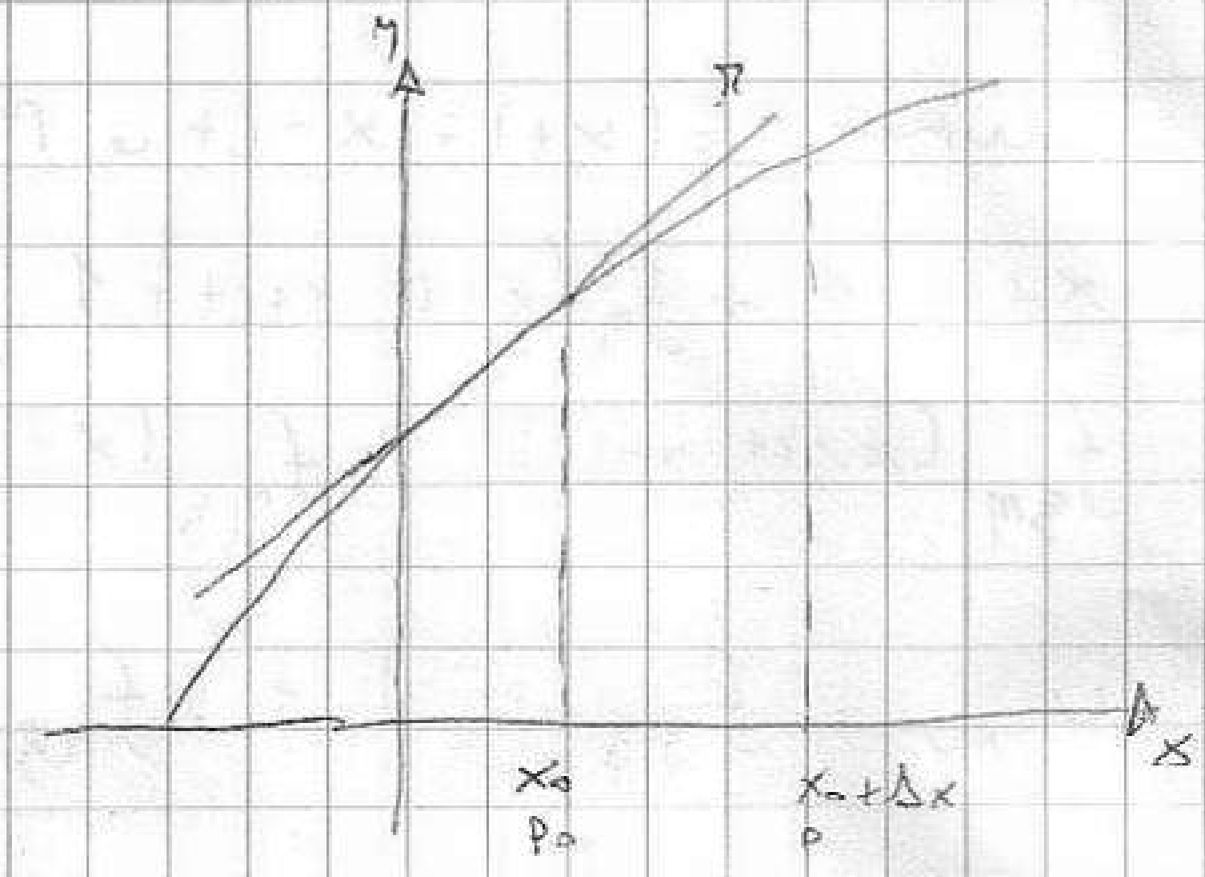
$r(x)$ (retta tan. al grafico) $= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Quando $\Delta x \to 0$, $P \to P_0$, il lim lo scrivo:

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - r(P)}{d(P, P_0)} = 0$$

$\downarrow$

formula estendibile a f di + variabili



$[r(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x]$

Sia $P_0(x_0, y_0)$ e $P(x,y)$, abbiamo l'eq. del piano tangente in P_0 = $z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$. $x = x_0 + \Delta x$; $y = y_0 + \Delta y$. Quindi $z = \pi(x,y) \to$ stesso ruolo di r. ; $d(P,P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. (c'è tutto. Al posto della retta tan c'è piano tan, al posto di d abbiamo $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$)

$\downarrow$

$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Ω aperto) con $(x_0,y_0) \in \Omega$. f è DIFFERENZIABILE in $P_0(x_0,y_0)$ SE $\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - \pi(P)}{d(P,P_0)} = 0$, ovvero ($P \to P_0 \Rightarrow (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$)

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

Ex: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ È differenziabile!

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

(lo stesso per $f_y(0,0) = 0$)

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - 0 - 0\Delta x - 0\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$ deve venire $= 0$.

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta x^2\,\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}};$$

passiamo in coor. pol. $\begin{cases}\Delta x = \rho\cos\theta\\ \Delta y = \rho\sin\theta\end{cases}$ $\displaystyle\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^{\cancel{4}}\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cancel{\rho^3}} =$

$\displaystyle\lim_{\rho\to0^+}\rho\cos^2\theta\sin^2\theta = 0\ \forall\theta$ $\left[|\rho\cos^2\theta\sin^2\theta|\le|\rho|\to0 \text{ uniform. in } \theta\right] \Rightarrow$

f e' DIFFERENZIABILE

Ex: (ver 39)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1 \quad (f_y(0,0)=-1)$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} =$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\frac{\Delta x^3-\Delta y^3}{\Delta x^2+\Delta y^2}-0-\Delta x+\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\frac{\cancel{\Delta x^3}-\cancel{\Delta y^3}-\cancel{\Delta x^3}-\Delta y^2\Delta x+\Delta y\Delta x^2+\cancel{\Delta y^3}}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} =$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{-\Delta x\Delta y^2+\Delta y\Delta x^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$ [quoziente di grado 3] [difficilmente si sono dello stesso grado ∄].

Cons. $\Delta x=\Delta y \Rightarrow$ lungo questa retta $\displaystyle\lim_{(\Delta x,\Delta y)} 0 = 0$

Cons $\Delta x=-\Delta y$, $\displaystyle\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{-\Delta x\Delta x^2-\Delta x\Delta x^2}{(\Delta x^2+\Delta x^2)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{-2\Delta x^3}{2\Delta x^2\cdot\sqrt{\Delta x^2\,2}}$

Se $\Delta x>0$ $\displaystyle\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{-2\Delta x^3}{2\sqrt2\,\Delta x^3} = -\frac{1}{\sqrt2}$ ($\neq$ da prima $\Rightarrow \lim ∄$) e

non e' diff. Sarebbe stato suff. l'ultimo conto.

TH: Se f e' di classe C^1, allora f e' DIFFERENZIABILE

Ex: $f(x,y)=x^3y+y^2$. E' diff. perche' $f_x(x,y)=3x^2y$ e $f_y(x,y)=x^3+2y$ sono continue. (questo th. e' poco applicato, perche' non e' completo: ∃ f. diff. ma non di classe C^1).

TH: Se f e' DIFFERENZIABILE, allora f e' CONTINUA

⇓

(schema →)

f di classe C^1

$\Downarrow \quad \not\Uparrow$

differenziabile

ex. 39 $\not\Leftarrow$ $\quad \Rightarrow$ $\quad$ ex. 38 $\not\Leftarrow$ $\quad \Rightarrow$

f è continua $\quad \not\Rightarrow \quad \not\Leftarrow$ (③) $\quad \exists\, f_x, f_y$

③: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

TH: le formule di DERIVAZIONE della f. COMPOSTA $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ vale se f è DIFFERENZIABILE e u e v ammettono derivate parziali (stessa formula: $g_x(x,y) = f_u(u(x,y), v(x,y))\, u_x(x,y) + f_v(u(x,y), v(x,y))\, v_x(x,y)$)

21-3-2005

DERIVATE DIREZIONALI Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ [$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto] e $(x_0, y_0) \in \Omega$, prendiamo un vettore unitario $v = (v_1, v_2)$ / $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = v_1^2 + v_2^2$ $\|v\| = 1$. La derivata direzionale rispetto al vettore v di f in (x_0, y_0) è

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2) - f(x_0, y_0)}{t} = D_v f(x_0, y_0) \quad [t \text{ è unica variabile}]$$

(se $\exists$ finito)

Ex: $f(x,y) = x^2 + y$. $\lim_{t \to 0^+} \frac{(x_0 + t v_1)^2 + y_0 + t v_2 - x_0^2 - y_0}{t} =$

Der. dir.

$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\cancel{x_0^2} + t^2 v_1^2 + 2x_0 t v_1 + \cancel{y_0} + t v_2 - \cancel{x_0^2} - \cancel{y_0}}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^{\cancel{2}} v_1^2 + 2x_0 \cancel{t} v_1 + \cancel{t} v_2}{\cancel{t}} =$

$= \lim_{t \to 0^+} t v_1^2 + 2x_0 v_1 + v_2 = \underline{2x_0 v_1 + 1 v_2}$; $2x_0 = f_x(x_0, y_0)$; $1 = f_y(x_0, y_0)$

Def: (stesse ipotesi di prima) $\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ è detto il GRADIENTE di f in (x_0, y_0) (è VETTORE)

∇: operatore nabla [nabla]

TH. Se f è DIFFERENZIABILE, allora $D_v f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), v \rangle =$ [prodotto scalare]
$f_x(x_0, y_0)\, v_1 + f_y(x_0, y_0)\, v_2$

Ex: $f(x,y) = x^3 + 3xy$; $\nabla f(x_0, y_0) = (3x_0^2 + 3y_0, 3x_0)$. Sia $(x_0, y_0) = (1,1)$

(26) e $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$; $D_v f(1,1) = f_x(1,1) \cdot v_1 + f_y(1,1)\, v_2 = (\to)$

$= 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ (numero)

- Sia $v = e_1 = (1,0)$; $D_{e_1} f(x_0,y_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cdot 1, y_0 + t \cdot 0) - f(x_0,y_0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0,y_0)}{t} \to \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \right]$

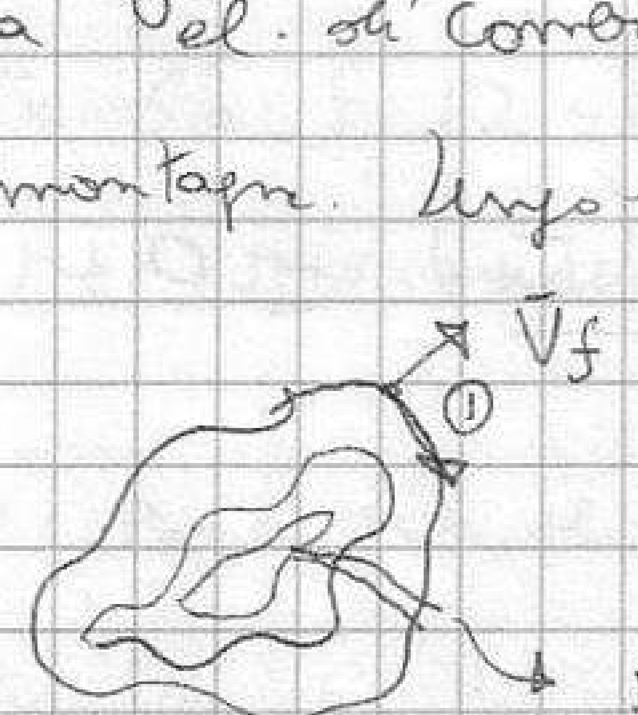
- Se $v = e_2 = (0,1)$; $D_{e_2} f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

Se f è DIFFERENZIABILE allora le der. dir. $\exists$ e $D_v f(x_0,y_0) = \langle \nabla f(x_0,y_0), v \rangle = \| \nabla f(x_0,y_0) \| \cdot \| v \| \cos\theta \; \left[\widehat{v\,\nabla f} = \theta \right] = \| \nabla f(x_0,y_0) \| \cos\theta$, questa q. è massima se $\theta = 0$, è minima se $\theta = \pi$, $= 0$ se $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$D_v f(x_0,y_0) = \begin{cases} ① \text{ è max se } \theta = 0 \Rightarrow \nabla f \text{ e } v \text{ sono } // \text{ e concordi} \\ ② \text{ è zero se } \theta = \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{2}\pi\right) \Rightarrow \nabla f \text{ e } v \text{ sono } \perp \\ ③ \text{ è min se } \theta = \pi \Rightarrow \nabla f \text{ e } v \text{ sono } // \text{ e discordi} \end{cases}$$

$D_v f$ da indicazione velocità di cambiamento della funzione in quella direzione; (quanto cambia velocemente)

la vel. di cambiamento è max in ① .... Spiega traiettoria ruscelli montagne. Lungo le curve di livello la var. è $= 0$ in ⓪; il ∇f è $\perp$ a



curve di livello [se $v //$ a tan. curva livello $\Rightarrow$ $D_v f = 0 \Rightarrow v \perp \nabla f \Rightarrow \nabla f \perp$ curva livello]

ruscelli seguono traiettoria max pendenza, dir. $\perp$ a curve di livello.

Può accadere che f ammetta derivate direzionali ma non è differenziabile.

f di classe C^1

$\Downarrow \; \not\Uparrow$ ②

f è differenziabile

$\Swarrow \; \not\Nearrow$ ③ $\qquad \not\Nearrow \; \Searrow$ ① Derivate direz.

f è continua $\quad \not\Rightarrow$ ④ $\to (x^3+y) \sin \frac{1}{x^2+y^2}$

$\not\Leftarrow$ ⑤

$(\longrightarrow)$

$\boxed{1}$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad v=(v_1,v_2)$; $D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0^+} \dfrac{f(0+tv_1, 0+tv_2) - f(0,0)}{t} =$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{t^2 v_1^2 \, t v_2}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^3 (v_1^2 v_2)}{t^3 (t^2 v_1^4 + v_2^2)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} =$$

$\dfrac{v_1^2}{v_2}$ con $v_2 \neq 0$, per calcolare $D_v f(x_0,y_0)$ con $v_2 = 0$; $e_1 = (1,0)$ (se $v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \pm 1$)

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Se f è differenziabile, $D_v f(0,0) =$

$f_x(0,0) v_1 + f_y(0,0) v_2 = 0$, ma $\dfrac{v_1^2}{v_2} \Rightarrow f$ ammette $D_v f$ ma non è DIFFERENZIABILE (è non è continua)

$\boxed{2}$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altr.} \end{cases}$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y - f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

$$\downarrow$$

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x^2 \sin\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)}{\Delta x} = 0$$

$f_y(0,0) = 0$

$$\downarrow$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\left(\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\cdot \sin\left(\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

f è DIFFERENZIABILE

Se $(x,y)\neq(0,0)$: $f_x(x,y) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot -2x$

$$f_y(x,y) = \underbrace{2y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}_{\text{se } (x,y)\to(0,0) \ \to 0} + \underbrace{(x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot -2y}$$

Prendiamo $y = x$; $-4x^3 \cdot \cos\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)\cdot \dfrac{-2x}{4x^4}$

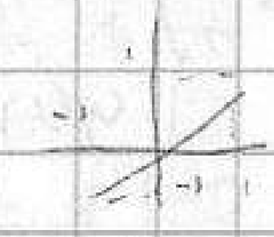
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = \nexists \quad \leftarrow \quad$ se $(x,y)\to(0,0) = \nexists$

$$\Downarrow$$

f_y non è continua nell'origine ⇒ non è di classe C^1

23-3-2005

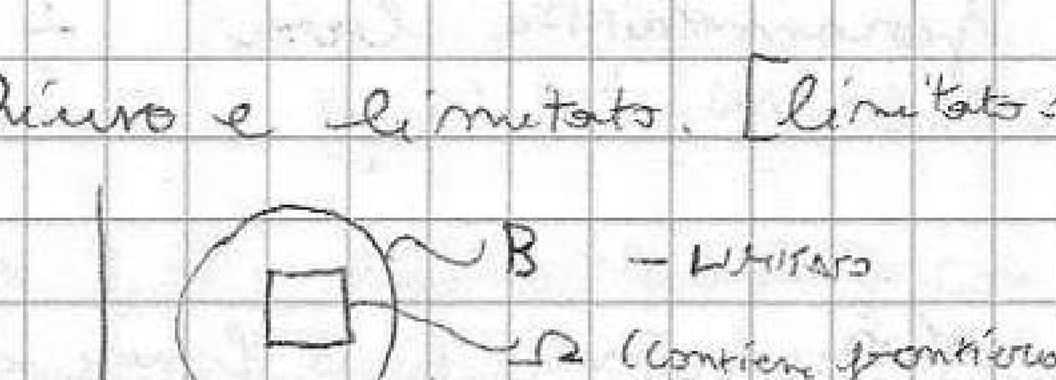
[Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont, x Weierstrass $\exists\ x_1, x_2 \in [a,b]$ per cui $m = f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) = M \quad \forall x \in [a,b]$; I candidati ad essere punti di max e di min sono dati da:

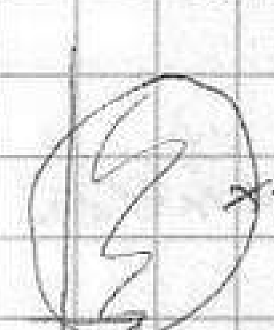
1) Punti dove la $f(x)$ non è derivabile → ex: modulo 
2) " " $f'(x) = 0$ → ex: parabola 
3) Estremi intervallo → ex. retta 

↓ lo stesso per f di 2 variabili

Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. M è il MASSIMO ASSOLUTO di f in Ω se $\exists$ $(x_0, y_0) \in \Omega$ / $M = f(x_0, y_0) \ge f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega$. (stesso per MIN ass.)

Def: Un insieme Ω si dice COMPATTO se è chiuso e limitato. [limitato: esiste una $B_R(0,0)$ / $\Omega \subseteq B_R(0,0)$, ex: quadrato





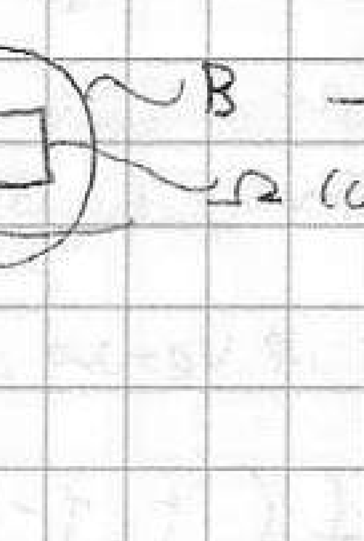
$x \ge 0$ ∄ palla che comprende l'insieme - chiuso ma non LIMITATO]

Th. Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 1) f è continua, 2) Ω è compatto, f ammette MAX e MIN assoluto. (Come li calcolo?) Candidati:

↓

1) Punti dove il gradiente ∄ [poco interni]
2) " " " " si annulla
3) " della frontiera

Ex:



$$f: T \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \to x^2y - xy$$

T è il triangolo di V. $(0,0), (1,0), (0,1)$ ↳ insieme compatto

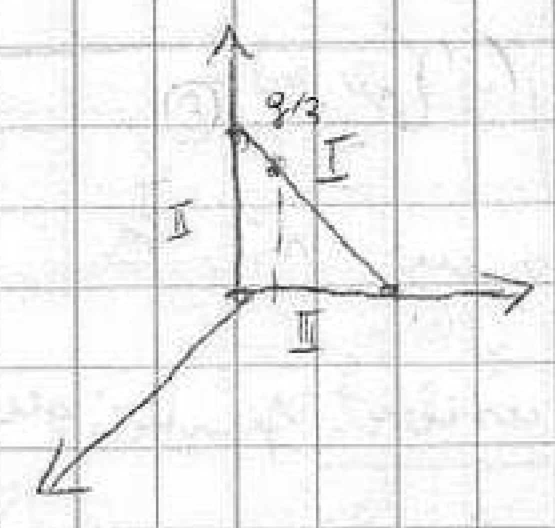
f di classe C^1 → si applica W. Det. il gradiente.

$\nabla f(x,y) = (2xy - y,\ x^2 - x)$. $\nabla f = 0 \Rightarrow$ sia $f_x, f_y = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2xy - y = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y(2x-1) = 0 \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \underbrace{y = 0}_{A} \vee \underbrace{x = \frac{1}{2}}_{B} \\ \underbrace{x = 0}_{C} \vee \underbrace{x = 1}_{D} \end{cases}$$

① $A \wedge C \Rightarrow (0,0)$
② $A \wedge D \Rightarrow (1,0)$
$B \wedge C \Rightarrow \emptyset$

$B \cap D \Rightarrow \emptyset$



Voglio che $\overset{\text{candidati}}{\overline{① \text{ e } ②}} \in T$.

Analizziamo frontiera, unione dei 3 curve dove si inc. i vertici poligono → (studio frontiera).

CANDIDATI		VALORE
$- \nabla f(x,y) = 0$	$(0,0)$	$- f(0,0) = 0$
	$(1,0)$	$- f(1,0) = 0$
- P.ti di incollamento	$(0,0)$, $(1,0)$	già visti di prima
→ (vertici)	③ $(0,1)$	$- f(0,1) = 0$

(candidati dei segmenti)

$+$

Studiamo restrizione su ciascun pezzo di fr.

Vogliamo parametrizz. segmento: $\begin{cases} x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases}$

In I: $P_0(1,0)$; $P_1(0,1)$

$\downarrow$

$\begin{cases} x(t) = 1 + t(-1) \\ y(t) = 0 + t(1) \end{cases}$ Per $t=0$ $\left.\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}\right] - ②$; Per $t=1$ $\left.\begin{cases} x(1) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}\right] - ③ \Rightarrow$

parametrizzata bene. $I = \begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = t \end{cases}$ Possiamo anche par. così: già so $y = 1 - x \to \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 - t \end{cases}$. Diversa

da prima, p.to finale e iniziale sono invertiti.

(imp. x il verso, ma x noi è uguale). Restringo fun. a I. Consider

$g_1(t) = f(t, 1-t) = t^2(1-t) - t(1-t) = t^2 - t^3 - t + t^2 = -t^3 + 2t^2 - t$

t varia da 0 a $1 \to t \in [0,1]$, Voglio MAX e MIN di $g_1(t)$ in $[0,1] \to$ studiamo

la derivata: $g_1(t)' = -3t^2 + 4t - 1$; $+3t^2 - 4t + 1 = 0$ $t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3}$

$t_1 = 1$; $t_2 = \frac{1}{3}$. Entrambi valori $\in$ a int. Aggiungo:

In II $\underset{[x=0]}{g_2 = 0}$ mentre $\underset{[y=0]}{g_3 = 0} \to \nexists$ altri candidati

I	$\frac{1}{3}$, 1	$\underset{-\frac{4}{27}}{g(\tfrac{1}{3})}$, $\underset{\text{già noto}}{g(1)}$

In tutti i p.ti candidati $f = 0$, tranne $g(\frac{1}{3})$. Calcoliamo

$g_1(\frac{1}{3}) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{27} + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} = \frac{-1 + 6 - 9}{27} = -\frac{4}{27}$

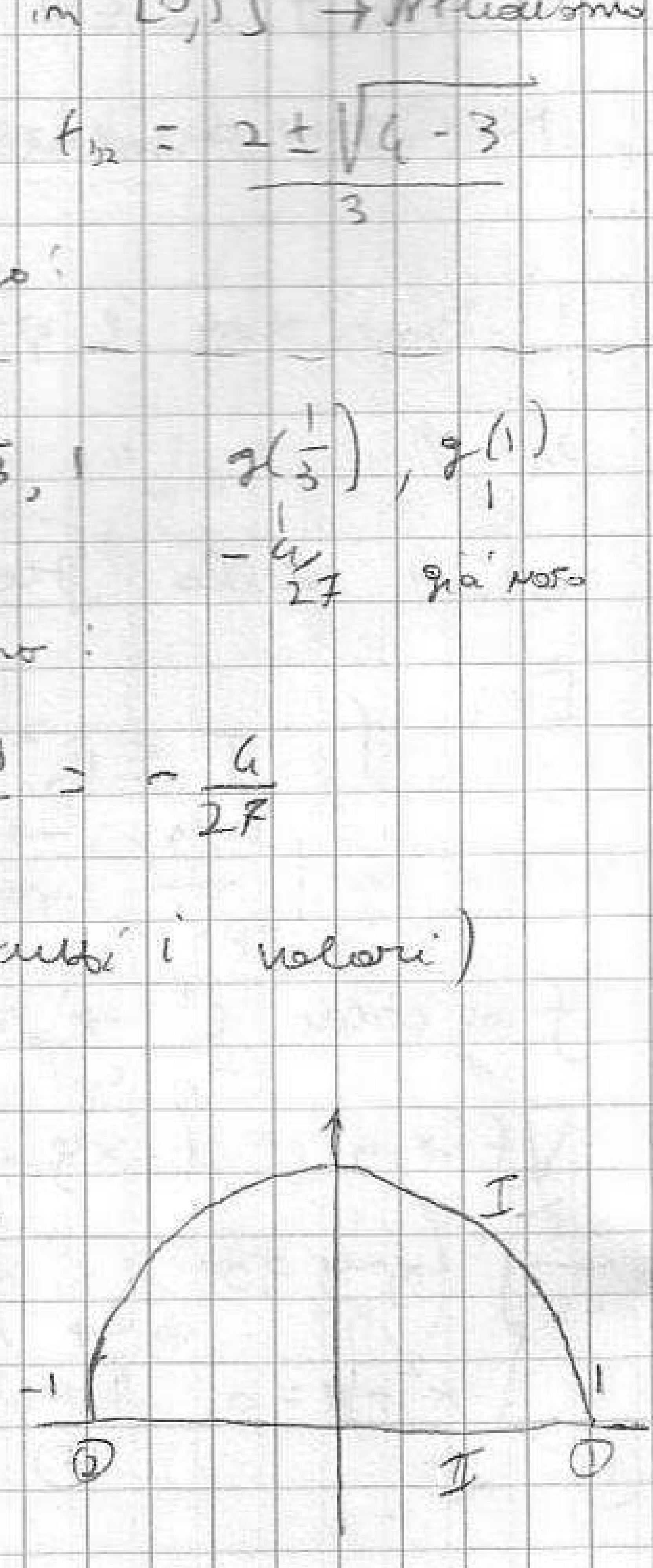
MAX f su $T = 0$, MIN su $T = -\frac{4}{27}$ (analizzo tutti i valori)

H

Ex: $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ A è il tra parabola rovesciata e retta

$(x,y) \to x + y$ $\quad$ $y = 0$ $\quad$ $y = 1 - x^2$

f di classe C^∞



Vogliamo MAX e MIN. $\vec{\nabla} f(x,y) = (1,1) \Rightarrow \vec{\nabla} f(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow \nexists$ PUNTI CRITICI (p.ti dove ∇f si annulla). Analizzo frontiera, costituita da parabola (I) e retta (II). Verifichiamo i p.ti DI INCOLLAMENTO $[(1,0)$ - ①, $(-1,0)$ - ②$]$

$f(1,0) = 1$; $f(-1,0) = -1$. Studiamo restrizione a curve (parte difficile è parametrizzazione).

I: [se ho $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ posso costruire curva $\vec{r}(t) = (t, \tilde{f}(t))$ traccia di $\vec{r}$ è grafico di f]:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) = 1 - t^2 \end{cases} \quad - \; t \in [-1,1]$$

Ora restringiamo f a I $\Rightarrow$ cons. $g_1(t) = f(t, 1-t^2) = t + 1 - t^2$. Studiamo

$g_1'(t) = 1 - 2t \Rightarrow g_1'(t) = 0$ se $t = 1/2 \Rightarrow$ Candidati: $t = \frac{1}{2}$; $g_1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Ora studiamo II.

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad - \; t \in [-1,1]$$

Cons $g_2(t) = f(t,0) = t$; $g_2'(t) = 1$ sempre $\neq 0$.

Però g_2 ammette MAX e MIN in $1, -1$, ma coincidono con i punti di incollamento $\Rightarrow$ nessun contributo.

$\Downarrow$

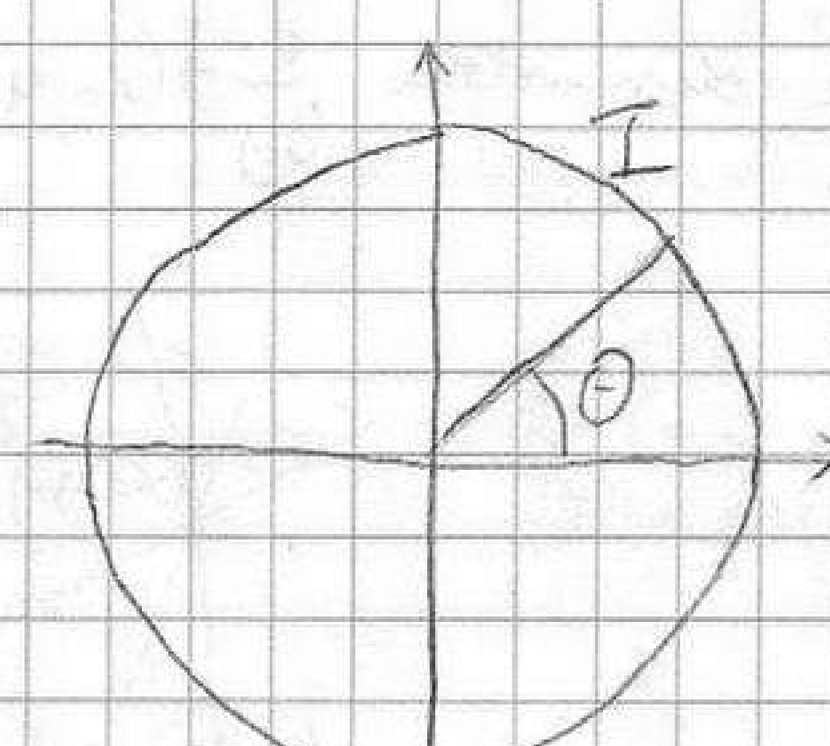
MAX: $5/4$; MIN $= -1$

Ex:

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to x^2 - y^2$

D è disco centrato in 0,0 e di raggio 1



Se applico laplaciano ho $0 \Rightarrow f$. armonica

$\Downarrow$

Ammette MAX e MIN solo nella frontiera (già sappiamo che sono interni ma ignoriamo).

$\vec{\nabla} f = (2x, -2y)$. $\vec{\nabla} f = 0 \to (0,0) \Rightarrow f(0,0) = 0$ Essendo unica curva qui $\nexists$ p.ti di incollamento.

Restrizione a circ. I

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \sin\theta \end{cases} \quad - \; \theta \in [0, 2\pi]$$

$g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$, - MAX $= 1$, MIN $= -1 \Rightarrow$ assunto su punti di frontiera.

EX di f. CONTINUA che NON HA MAX. ASSOLUTO

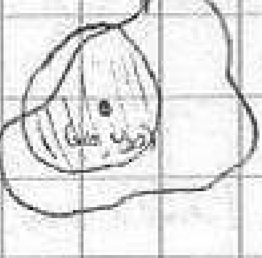
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ le min è 0 ammesso in $(0,0)$ → Non ammette però max perché non è limitata
$(x,y) \to x^2+y^2$ [sempre non negativo]

Come restrizione a retta, ex $y=x$, $f(x,x) = 2x^2 \to \lim_{x \to +\infty} f(x,x) = +\infty \Rightarrow$ non limitata

---

30 - 3 - 2005

Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x_0, y_0) \in \Omega$ è PUNTO di MINIMO RELATIVO per f se $\exists$ una $B_r(x_0,y_0) \,/\, f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \quad \forall (x,y) \in B_r(x_0,y_0) \cap \Omega$



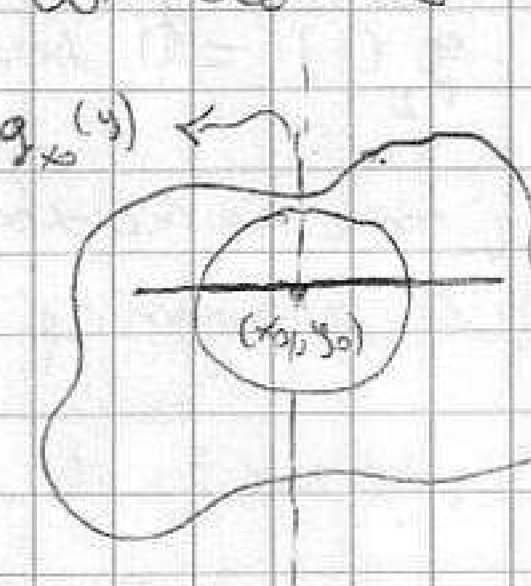
Ω - i valori di f in /// sono $\geq$ a $f(x_0,y_0)$.

Se f ammette derivate parziali in Ω e:

1) $x_0, y_0 \in \Omega$ è P.to INTERNO (cioè $\exists$ $B_{\bar{r}}(x_0,y_0)$ interamente contenuta in Ω);
2) (x_0,y_0) è P.to di MINIMO RELATIVO

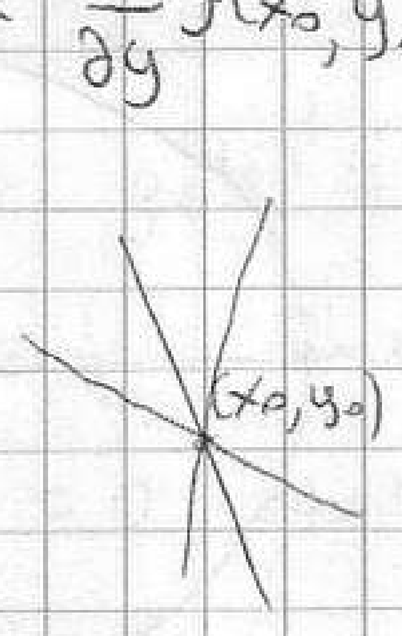
Allora $\nabla f(x_0,y_0) = 0$ [analogo a th. di Fermat x 1 var.]

Dim: Consideriamo $g_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ [restrizione f a retta]



In (x_0,y_0) f ha p.to di MIN. RELATIVO, quindi $g_{y_0}(x)$ ha in x_0 un P.to di MIN. RELATIVO. Si applica Fermat (poiché x_0,y_0 è p.to interno) $\Rightarrow g'_{y_0}(x) = 0$

cioè $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) = 0$. Allo stesso modo si dimostra $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow \nabla_f(x_0,y_0) = 0$



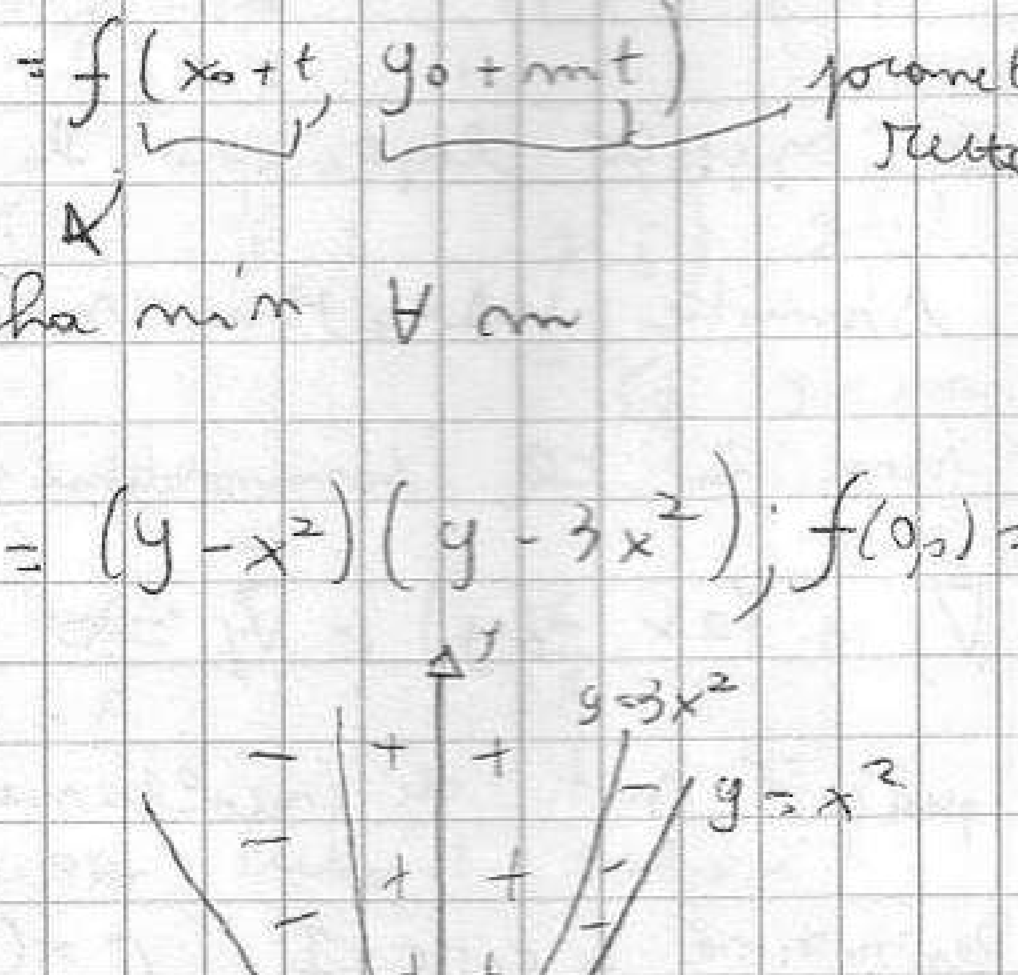
Posso considerare generiche restrizioni

$g_m(t) = f(\underbrace{x_0+t, \; y_0+mt}_{\text{parametrizz. rette}})$

Per $t=0$ ha min $\forall m$

Se tutte rette hanno min in (x_0,y_0) non è detto che f allora minimo lì: Ex: $f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2)$; $f(0,0) = 0$

Prodotto di due parabole. Studio segno.



Supp. x mostrare che $\nexists$ min rel.

Ci sono punti dove f è sia $>$ che $<$ di $f(0,0)$.

(Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f \in C^2(I)$. Sia $x_0 \in I$ e I è APERTO.

(30) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un p.to di MIN. REL

Se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)<0$ allora x_0 è un p.to di MAX REL

Se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)$! → non possiamo dire nulla)

Ex:

$f(x)=x^2$; $f'(x)=2x$; $f''(x)=2$ → $f'(0)=0$, $f''(0)=2$ → min. REL

$f(x)=x^4$, $f'(x)=4x^3$; $f''(x)=12x^2$ → $f'(0)=0$, $f''(0)=0$! (ma 0 è min REL)

$f(x)=x^3$; $f'(x)=3x^2$; $f''(x)=6x$ → $f'(0)=0$, $f''(0)=0$! (ma 0 è FLESSO)

Generalizzazione a $f(x,y)$

Sia $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ con Ω aperto e $f\in C^2(\Omega)$. Sia $(x_0,y_0)\in\Omega$ e $\nabla f(x_0,y_0)=0$. Consideriamo la MATRICE HESSIANA definita:

$$Hf(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$$

Se $\lambda_1,\lambda_2>0$ (autovalori) allora (x_0,y_0) è un P.TO di MINIMO RELATIVO.

Se $\lambda_1,\lambda_2<0$, allora (x_0,y_0) è un P.TO di MASSIMO RELATIVO. Se sono discordi allora (x_0,y_0) è un P.TO di SELLA → ($\nabla f=0$ ma f non ha né max né min)

Ex: $f(x,y)=x^2+y^2$ $\begin{cases} f_x=2x \\ f_y=2y\end{cases}$ → $\nabla f(x_0,y_0) \iff (x_0,y_0)=(0,0)$ (unico P.TO CRITICO)

Calcoliamo

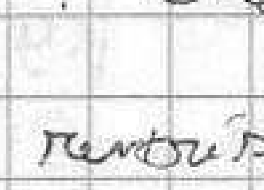
$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}=Hf(0,0) \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2$$ Entrambi $+$ $\Rightarrow (0,0)$ è MIN. REL

non dip da x,y

Ex: $f(x,y)=x^2-y^2$. $\nabla f=(2x,-2y)=0 \iff (x_0,y_0)=(0,0)$

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1=-2,\ \lambda_2=2$$ → $(0,0)$ è P.TO di SELLA

Consideriamo restr. a $y=0$ e $x=0$, $g(x)=f(x,0)=x^2$. 0 è un P.TO di MIN per g ; $g(y)=f(0,y)=-y^2$. 0 è un P.TO di MAX per g → f non ha MIN (e MAX) perché cambiando restrizione non ho sempre min/max.

Grafico è paraboloide iperbolico  f ha in $(0,0)$ p.to di SELLA

Ex: $f(x,y)=y^3$. $\nabla f=(0,3y^2)=0\ \forall (x,0)$

Tutti questi punti sono p.ti di SELLA. Con $g_{x_0}(y) = f(x_0, y) = y^3$. In $y=0$ c'è flesso. (NÉ max NÉ MIN) ⟹ f di 2 variabili ha P.TO di SELLA

Se avessimo calcolato la $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ Ma $H_f(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to ?$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$.

01-4-2005 CAMPI VETTORIALI Un campo vettoriale piano è una mappa

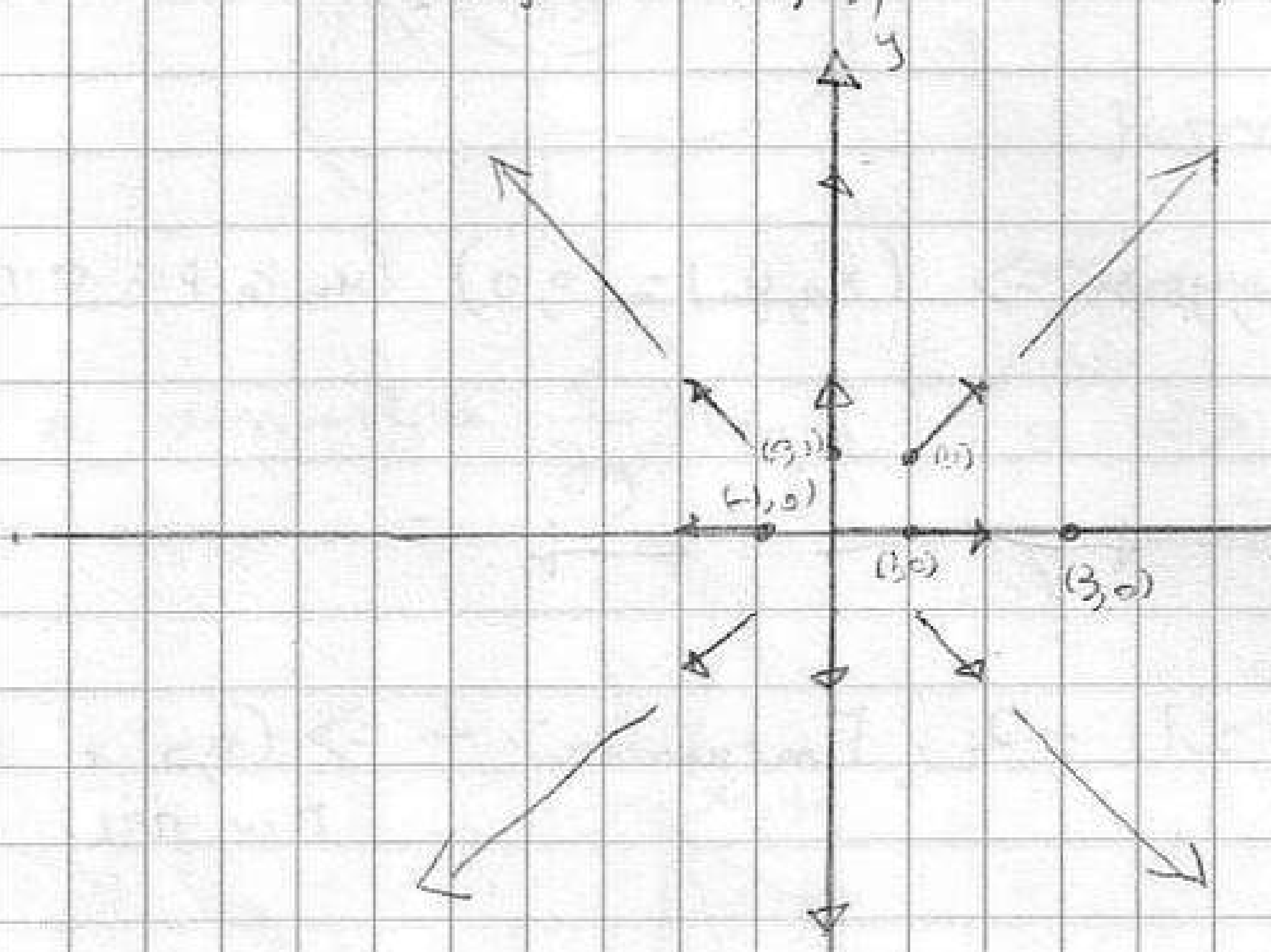
$\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longrightarrow (F_1(x,y), F_2(x,y))$ ↗ $F_1, F_2 : \Omega \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono le COMPONENTI DEL CAMPO

Il campo $\vec{F}$ è di classe C^1 se le sue componenti sono funzioni di classe C^1 (funzione vettoriale di funzioni scalari)

Una curva $\vec{r} : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longrightarrow (x(t), y(t))$ è detta una CURVA INTEGRALE (LINEE DI FORZA / LINEE DI CORRENTE) del Campo $\vec{F}$ passante per il punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ se si verificano:

1) $\vec{T}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$; 2) $\vec{r}(0) = (x_0, y_0)$

Ex. $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \to (x,y)$ $F_1(x,y) = x$; $F_2(x,y) = y$ → campo di classe C^1



$\vec{F}(1,0) = (1,0)$ (p.to piano, vettore)

$\vec{F}(1,1) = (1,1)$; $\vec{F}(0,1) = (0,1)$

$\vec{F}(-1,0) = (-1,0)$; Vettori radiali crescenti. La curva integrale è tangente al valore del campo

$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$
$t \to (x(t), y(t))$.

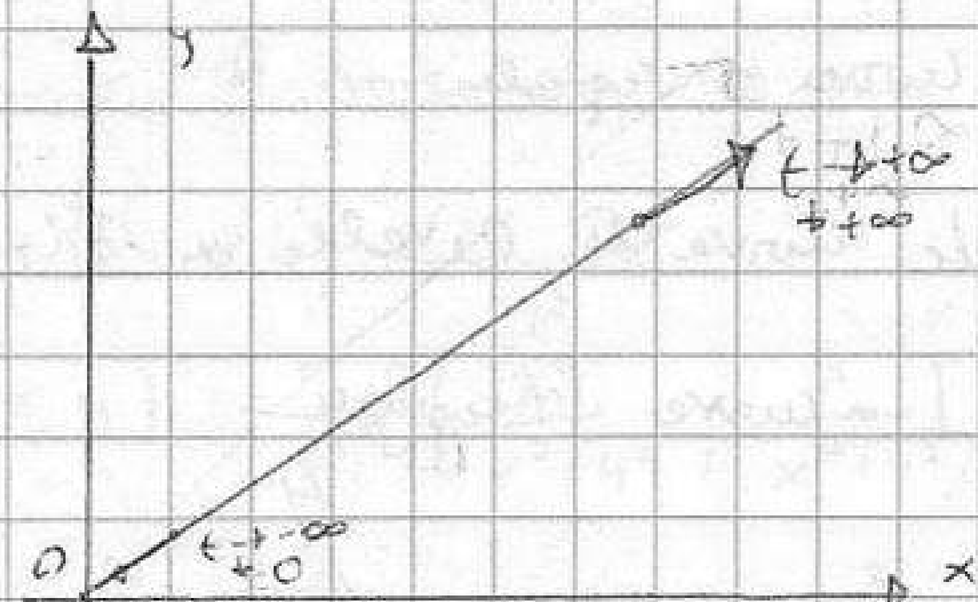
Imponiamo che $\vec{T}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$

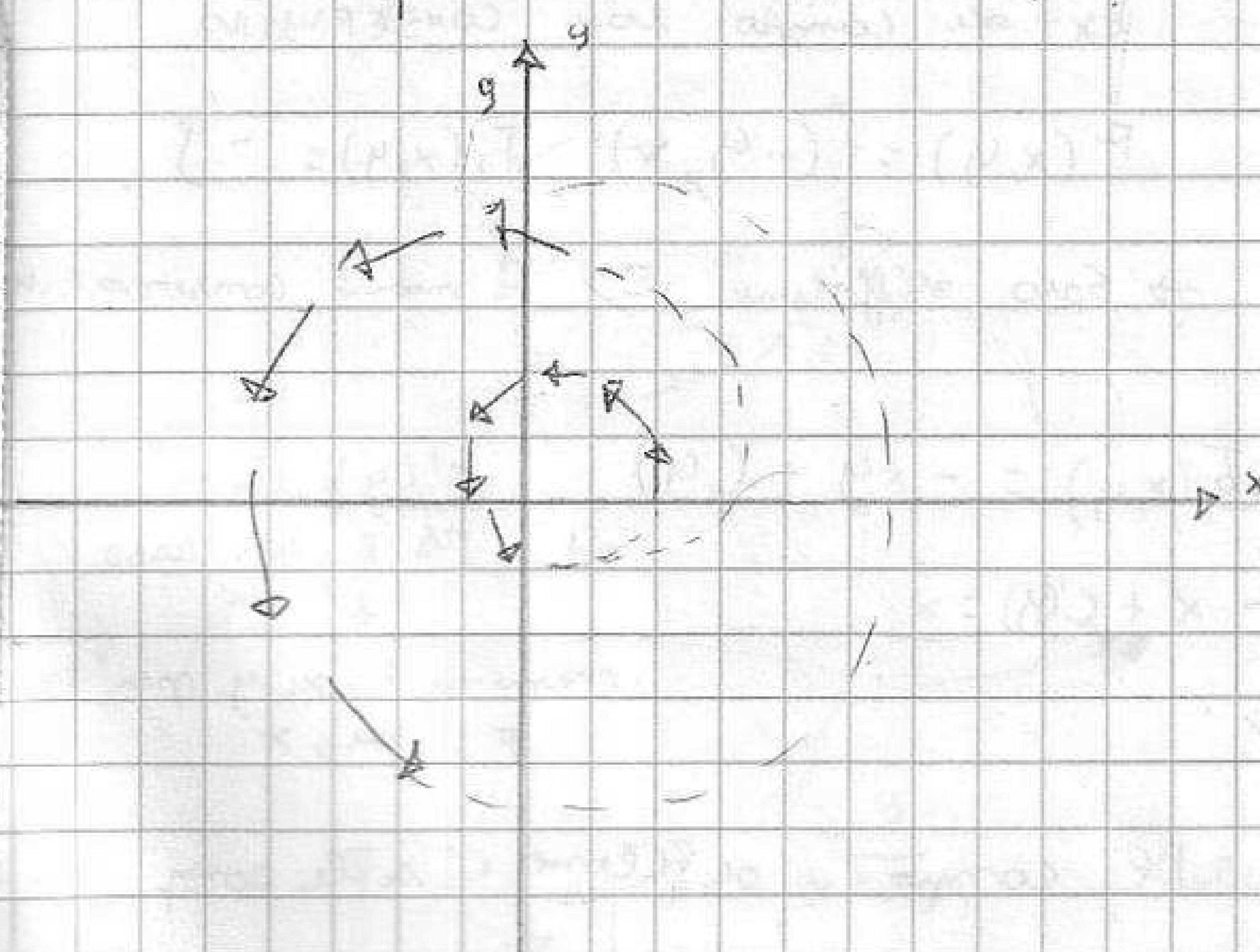
$\vec{T}(t) = (x'(t), y'(t)) = (F_1(x(t), y(t)), F_2(x(t), y(t)))$. Si può scrivere componente per componente: c'è anche condizione $\vec{r}(0) = (x_0, y_0)$

$$\begin{cases} x'(t) = F_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) = F_2(x(t), y(t)) \end{cases} \to \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$ Risolviamo

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = y(t) \end{cases} \text{(sistema "scoppiato")} \to \begin{cases} x(t) = x_0 \cdot e^t \\ y(t) = y_0 \cdot e^t \end{cases} \to \begin{cases} e^t = \frac{x(t)}{x_0} \\ y(t) = \frac{y_0}{x_0} x(t) \end{cases}$$

(32) I punti della curva sono nella semiretta $y = \frac{y_0}{x_0} x$





Ex: $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (-y,x)$ $\qquad F_1(x,y) = -y$, $F_2(x,y) = x$

$\vec{F}(1,0) = (0,1)$; $\vec{F}(1,1) = (-1,1)$

$\vec{F}(0,1) = (-1,0)$; $\vec{F}(-1,1) = (-1,-1)$

$\vec{F}(-1,0) = (0,-1)$ Curve integrali sono dei cerchi

$$\begin{cases} x'(t) = F_1(x(t), y(t)) = -y(t) \\ y'(t) = F_2(x(t), y(t)) = x(t) \\ x(0) = x_0 ; \ y(0) = y_0 \end{cases}$$

eq. non scoppiate

Trucco: Scriva 1' eq. e ritrovo y' nella 2' $\to x''(t) = -y'(t)$; $y'(t) = x(t)$

Sostituisco e ho $x''(t) = -x(t)$

Essendo $y'(t) = A \sin(t+\varphi)$ La sol. è $\begin{cases} x(t) = A \sin(t+\varphi) \\ y(t) = -A \cos(t+\varphi) \end{cases}$

parametrizzata circonferenza $\leftarrow$

Un campo vettoriale $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è detto CONSERVATIVO se $\exists$ $\Phi: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla \Phi = \vec{F}$. Φ è detto POTENZIALE di $\vec{F}$.

Th: $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con Ω aperto e $\vec{F}$ di classe C^1. Condizione necessaria ma non sufficiente affinché $\vec{F}$ sia conservativo è che $\boxed{\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}}$ $\to$ le derivate incrociate sono uguali

Dim: Se è cons., per Ip. $\exists$ $\Phi: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla \Phi = \vec{F}$.

Ciò vuol dire che $\Phi_x = F_1$ e $\Phi_y = F_2$. Φ è di classe C^2 [Fn. sono di C^1]

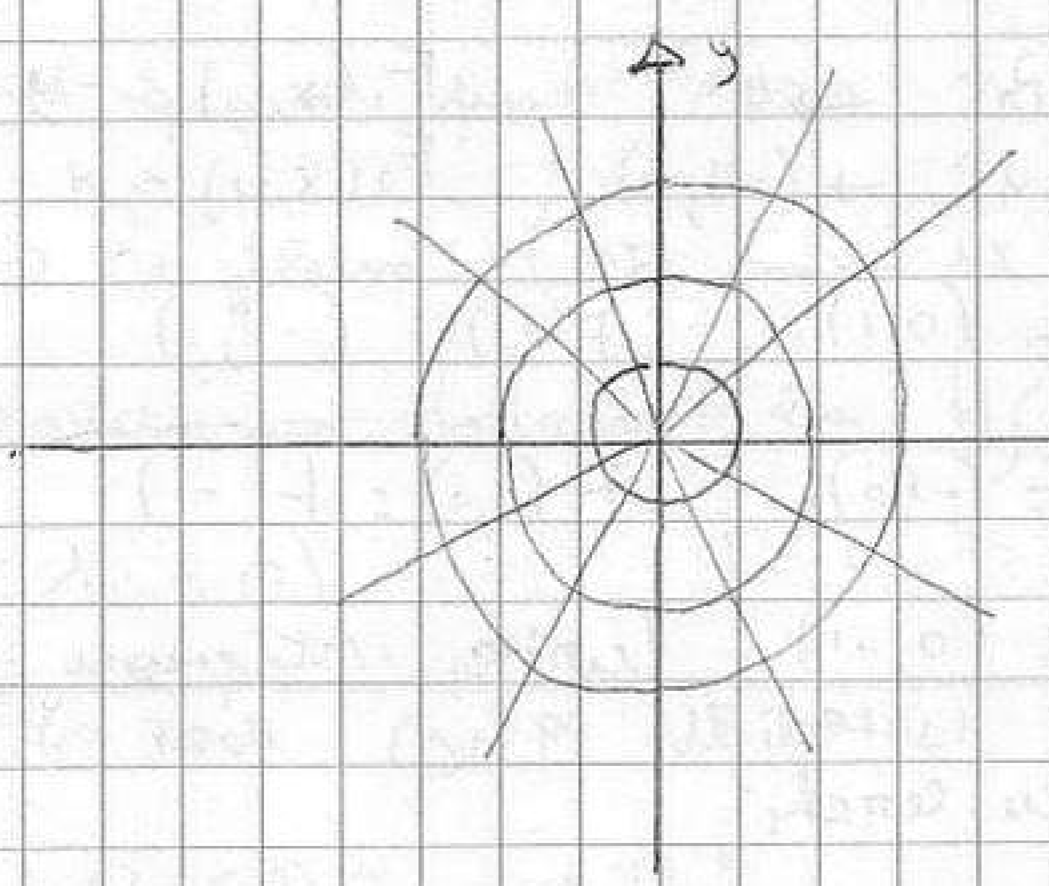
Per Schwartz abbiamo che $\Phi_{xy} = \Phi_{yx}$, $\Phi_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}(\Phi_x) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\Phi_y)$. Ma sappiamo che $\Phi_x = F_1$ e $\Phi_y = F_2 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial y}(F_1) = \dfrac{\partial}{\partial x}(F_2)$

Ex: $\vec{F}(x,y) = (x,y)$; $F_1(x,y) = x$; $F_2(x,y) = y \to \dfrac{\partial}{\partial y} F_1 = 0 = \dfrac{\partial}{\partial x} F_2 = 0$

$\to$ Cond. soddisfatta. Controlliamo se $\exists$ pot. Dobbiamo trovare $\Phi \,/\, \nabla \Phi = F$, cioè $\Phi_x = F_1$ e $\Phi_y = F_2 \to \Phi_x = x$, $\Phi_y = y$. $\Phi(x,y)$ (devo fare l'int. indefinito di x risp. a x) $= \underbrace{\dfrac{x^2}{2} + C(y)}$ La der. sostituendo nella 2' eq.

$C'(y) = y$ $\quad$ deriv. risp. a y $\qquad \Phi(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + C(y)$; $C(y) = \dfrac{y^2}{2} + c$

$\Rightarrow \Phi(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + c$



— : curva integrale

Le curve di livello di $\Phi(x,y)$ sono cerchi $\perp$ a curve integrali. //

Ex. di campo non CONSERVATIVO

$\vec F(x,y) = (-y, x)$. $F_1(x,y) = -y$, $F_2(x,y) = x$. $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = -1$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = 1$ → sono differenti ⇒ $\vec F$ non è conservativo

↓

Ulteriore verifica. $\begin{cases} \Phi_x = -y \\ \Phi_y = x \end{cases} \to \begin{cases} \Phi(x,y) = -xy + C(y) \\ -x + C'(y) = x \end{cases}$ $C'(y) = 2x$ → ciò è CONTRADD.

↓

nemmeno F. di y può essere F. di x. //

$\vec F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \to (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$. Il campo è di classe C^1 se le comp. sono C^1.

Condizione necessaria affinché un campo $\vec F$ di classe C^1 in $\mathbb{R}^3$ sia CONSERV.:

$$\begin{cases} ① \ \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \\ ② \ \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \\ ③ \ \dfrac{\partial F_2}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial y} \end{cases}$$

(tutte le derivate incrociate sono uguali);

Ex: $\vec F(x,y,z) = \left(\underbrace{2x e^{x^2+y^2} + 2z}_{F_1}, \underbrace{2y e^{x^2+y^2}}_{F_2}, \underbrace{2x}_{F_3}\right)$

② $\dfrac{\partial F_1}{\partial z} = 2$, $\dfrac{\partial F_3}{\partial x} = 2$ ✓; ① $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 4xy \cdot e^{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = 4xy \cdot e^{x^2+y^2}$ ✓; ③ $\dfrac{\partial F_2}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial F_3}{\partial y} = 0$ ✓

COND. SODD. ⇐

Troviamo potenz.:

$$\begin{cases} \Phi_x = F_1 \\ \Phi_y = F_2 \\ \Phi_z = F_3 \end{cases} \to \begin{cases} \Phi_x = 2x \cdot e^{x^2+y^2} + 2z \\ \Phi_y = 2y \cdot e^{x^2+y^2} \\ \Phi_z = 2x \end{cases}$$

$\Phi = \int 2x e^{x^2+y^2}\,dx = e^{y^2}\int \overbrace{(2x)}^{f'} e^{\overbrace{x^2}^{f}}\,dx = e^{x^2+y^2} \to \Phi(x,y,z) = e^{x^2+y^2} + 2zx + C(y,z)$.

$\cancel{2y \cdot e^{x^2+y^2}} + 0 + C_y(y,z) = \cancel{2y e^{x^2+y^2}} \to C_y(y,z) = 0 \Rightarrow$

$C(y,z) = \tilde C(z)$. Dalla 1ª: $\Phi(x,y,z) = e^{x^2+y^2} + 2zx + \tilde C(z)$. Deriv. risp. a z. $0 + \cancel{2x} + \tilde C'(z) = \cancel{2x} \to \tilde C(z) = C$ ⇒ sostituisco e il pot. $= \Phi(x,y,z) = e^{x^2+y^2} + 2zx + C$

04-04-2005

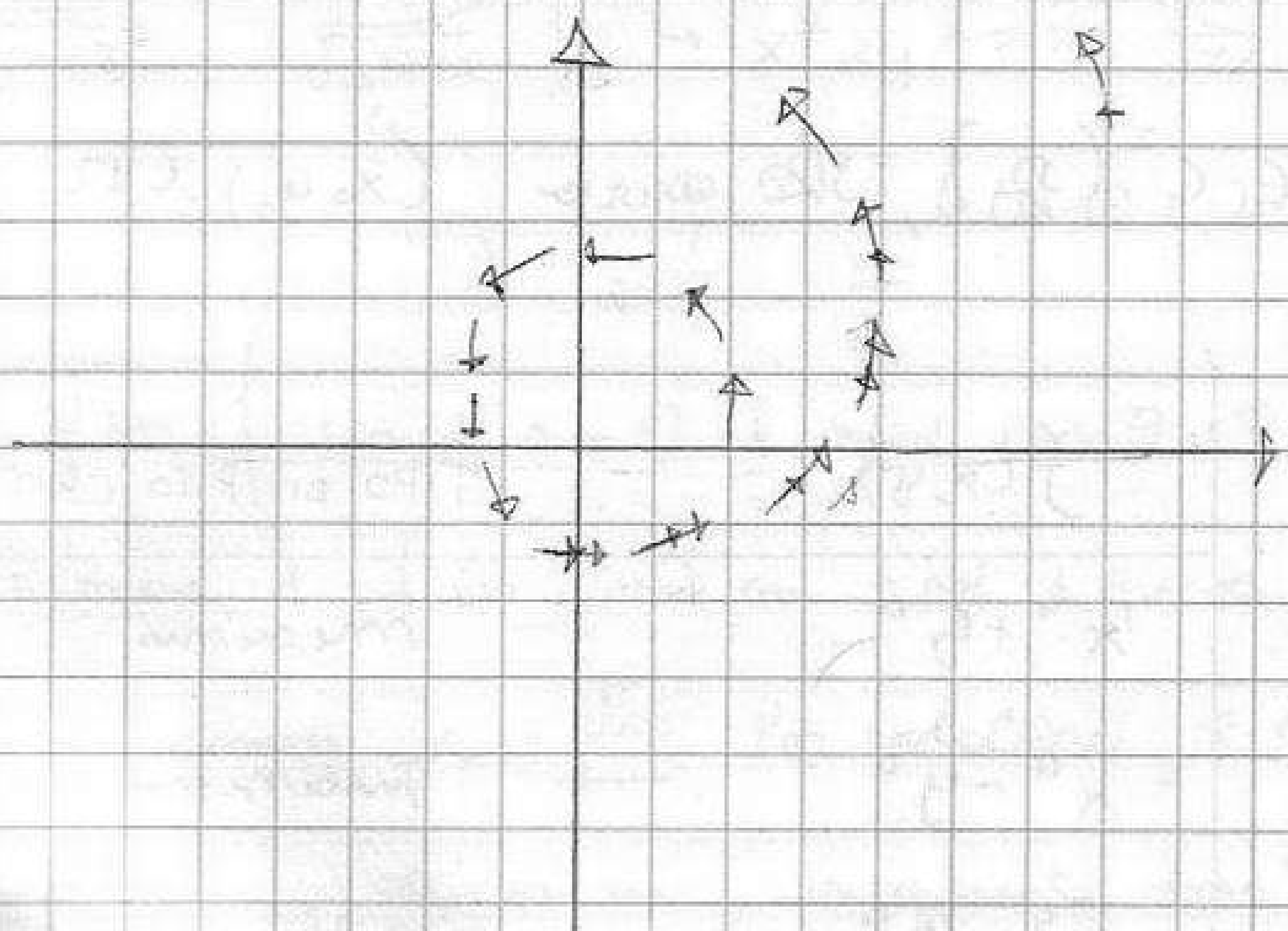
(Sia $\vec F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (F_1(x,y), F_2(x,y))$ e $\Phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (in TUTTA Ω ci deve essere pot.) $\vec F = \nabla\Phi$. Se $\vec F$ è di classe C_1 allora affinché $\vec F$ abbia potenziale è $\boxed{\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}}$ condiz. necessaria ma non sufficiente.

*

Es. su campo che soddisfa ... ma non è conservativo (avevamo visto $\frac{-y}{\,}$, $\frac{x}{\,}$ che non era cons.)

$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longrightarrow \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ → coincide per il primo "cerchio", poi diminuisce la lunghezza



$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} =$

$\frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

Condizione SODDISFATTA. Cerchiamo potenz.

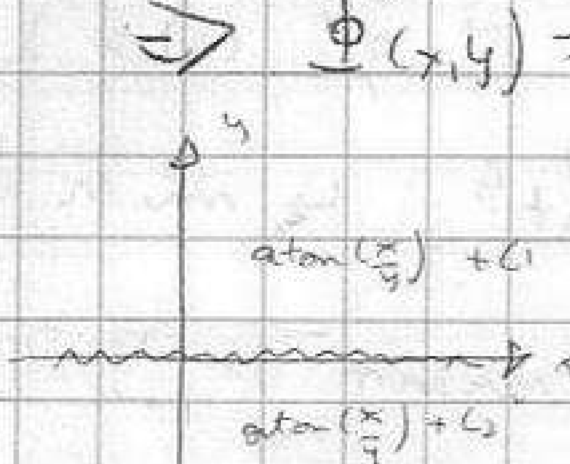
$\begin{cases} \Phi_x = F_1 \\ \Phi_y = F_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Phi_x = \frac{-y}{(x^2+y^2)} \\ \Phi_y = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$ [Calcolo $\int -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx = \int -\frac{y}{y^2}\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\,dx$

$= \int -\frac{1}{y}\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\,dx$. Cambio variabile: $t = \frac{x}{y}$, $dt = \frac{dx}{y}$

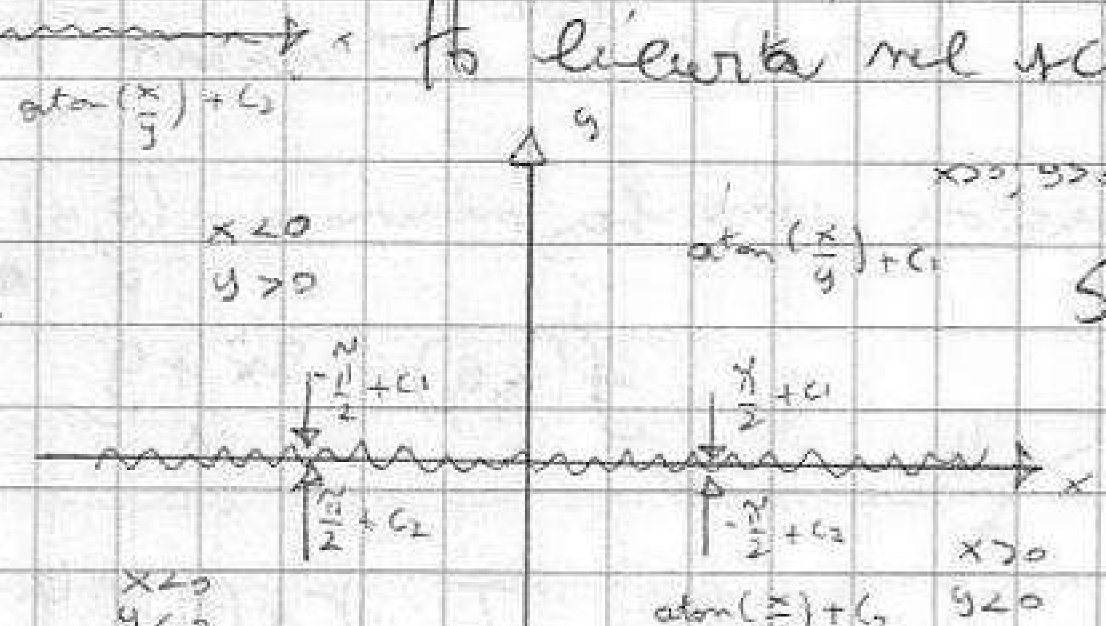
$-\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = -\operatorname{arctg} t = -\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$]

$\begin{cases} \Phi(x,y) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + c(y) \\ \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{x}{y^2} + c'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{x}{y^2} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\cdot\frac{x}{y^2} =$

$\frac{x}{x^2+y^2} \rightarrow \underline{c'(y) = 0} \Rightarrow \Phi(x,y) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + c$. È definito su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus$ asse x!



L'insieme non è convesso → Ho libertà nel scegliere C.



Controllo se posso trovare pot. in modo che siano uguali, posso estendere f anche all'asse

Se scelgo $C_1 = C_2$

Es. $C_1 = -\frac{\pi}{2}$ e $C_2 = \frac{\pi}{2}$ ⇒ 1° quad. ho 0 e 4° quad. il lim è 0. Ma nel 3° quad. e 2° quad. i limiti sono diversi! Posso estendere potenziale a semiasse $x>0$, non oltre.

$\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \rightarrow (F_1(x,y), F_2(x,y))$ Posso vederlo come un campo 3D.

$\vec{F}: \Omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (z può assumere qualunque valore)

$(x, y, z) \longrightarrow \left(F_1(x,y),\ F_2(x,y),\ 0\right)$ → modo standard per immergere campo piano in campo spaziale.

Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^2(\Omega)$, Ω aperto, $(x_0, y_0) \in \Omega$ e $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. $Hf(x,y)$ e autovalori)

$$\begin{cases} \nabla f(0,0) = 0 \\ Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$f(x,y)$	TIPO DI P.TO CRITICO
$x^4 + y^4$	minimo
$-x^4 - y^4$	massimo
$x^4 - y^4$	sella
x^3	sella
$(y - x^2)(y - 3x^2)$	sella

Possiamo stabilire la natura dei punti anche con $H_f(0,0) = 0$ (negli ex. NON SERVE A NULLA)

Ex: 1): $f(x,y) \geq 0 = f(0,0) \to (0,0)$ è MINIMO ASSOLUTO

Ex: 3) Con rette $y = 0 \to f(x,0) = x^4 \to$ in $x = 0$ c'è minimo. Con retta $x = 0 \to f(0,y) = -y^4 \to$ in $y = 0$ c'è massimo $\Rightarrow$ è p.to di SELLA (p.to critico che non sia né max né min)

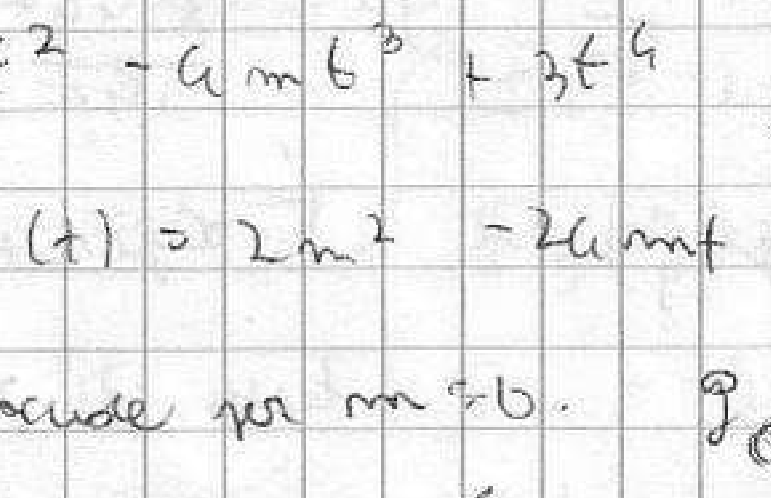
Ex: 4) Con $y = 0 \to f(x,0) = x^3 \to$ flesso in $0 \Rightarrow f$ ha in $(0,0)$ sella

Ex: 5) $g_m(t) = f(t, mt)$ [tutte tranne $x=0$] $= (mt - t^2)(mt - 3t^2) = m^2t^2 - 4mt^3 + 3t^4$; $g_m'(t) = 2m^2t - 12mt^2 + 12t^3 \to g_m'(0) = 0$.

$g_m''(t) = 2m^2 - 24mt + 36t^2 \to g_m''(0) = 2m^2$. 0 è p.to di min. $\forall m \neq 0$

Cosa accade per $m = 0$. $g_0(t) = 3t^4 \to$ min in $t = 0$. Con "$m = \infty$" $\Rightarrow$ con $x = 0$; $f(0,y) = y^2 \to$ minim. in $y = 0$. Restrizione lungo rette ha minimo MA funzione non ha minimo in $(0,0)$

Ex:



$f(x,y) = 2x + y$, $\nabla f(x,y) = (2,1) \to \neq (0,0)$

	CANDIDATI	VALORI
∇f	NO	NO
Pti angol.	$(0,0)$	0
	$(2,0)$	4
	$(0,2)$	2

I: $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases}$, $t \in [0,2]$

$g_1(t)$: $f(t,0) = 2t$; $g_1'(t) = 2 \to$ sempre $\neq 0$.

III: $\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases} \to t \in [0,2]$; $g_2(t) = f(0,t) = t \to g_2'(t) = 1$ sempre $\neq 0$

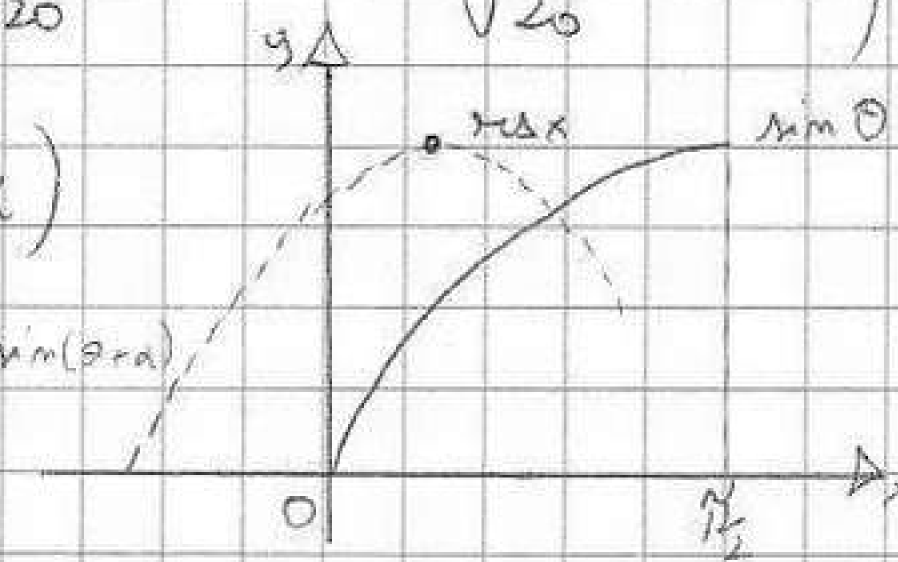
$$\mathrm{II}: \begin{cases} x(\theta) = 2\cos\theta \\ y(\theta) = 2\sin\theta \end{cases} \quad - \ \theta \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \ - \ f(2\cos\theta, 2\sin\theta) = 4\cos\theta + 2\sin\theta$$

$$\left[A\sin\theta + B\cos\theta = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\theta + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\theta\right)\right.$$

$$\left(\underset{x}{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}, \underset{y}{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}\right) \to x^2+y^2=1 \Rightarrow$$ li scrivo come $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Così

$$g(\theta) = 4\cos\theta + 2\sin\theta = \sqrt{16+4}\left(\frac{2}{\sqrt{20}}\sin\theta + \frac{4}{\sqrt{20}}\cos\theta\right) =$$

$$= \sqrt{20}\left(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta\right) = \sqrt{20}\sin(\theta+\alpha)$$



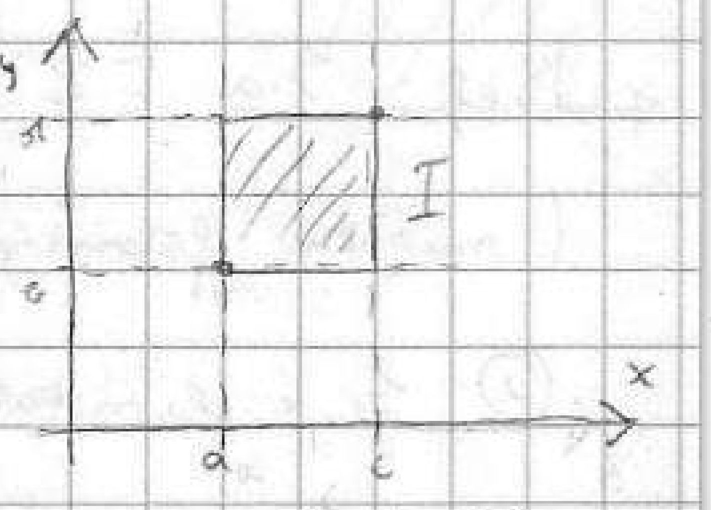
Rimane + (cos e sin son + nel 1° quad.) Il max viene assunto ed è $\sqrt{20}$. Per calcolare il min, torniamo a quello di prima; In questo caso, $2x+y$ ha come min ass $= 0$

CALCOLO 2 - INDICE APPUNTI [PERIODO II] Prof. Filippo Tolli

02 - 5 - 2005 (int. 2, 3). Spazio $\mathbb{R}^n$. Ogni $x \in \mathbb{R}^n$ è formato da n

coord. $\mathbb{R}$. Si dice $I \subseteq \mathbb{R}^n$ intervallo (a,c) e (b,d) se qualunque p.to $P \in \mathbb{R}^n$

$a \le x \le c$, $b \le y \le d$. Ex. $\mathbb{R}^2$ è il rettangolo. Ci sono



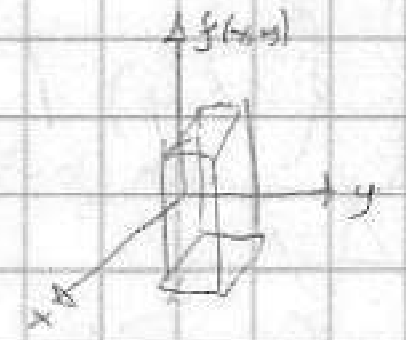
4 estremi. Per l'interv. APERTO, $a < x < c$, $b < y < d$. A differenza

di $\mathbb{R}^1$ non posso parlare di int. semi-ap./ch.. L'integrazione

avrà 2 valori (Definito e Indefinito). Gli INDEFINITI non sono trasportabili in $\mathbb{R}^n$ $(n>1)$

per i definiti sì. Ex: Area rett.: $(c-a)(d-b) = \text{mis } I$; $(b-a)$ è mis I in $\mathbb{R}^1$, l'area è

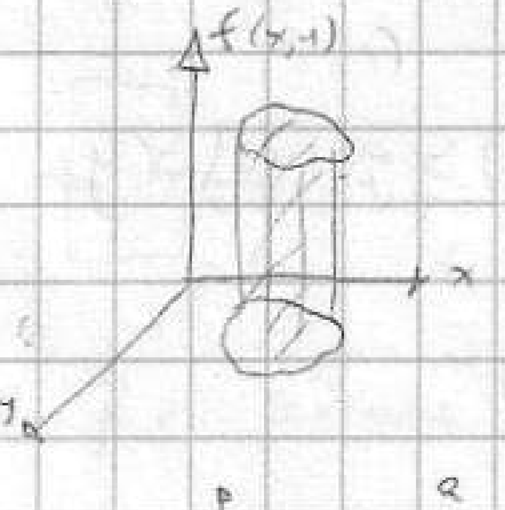
mis. in $\mathbb{R}^2$]. In realtà calcolo



qui prima calcolo la base dove lavoro, poi vedo come viene trasformato, poi calcolo

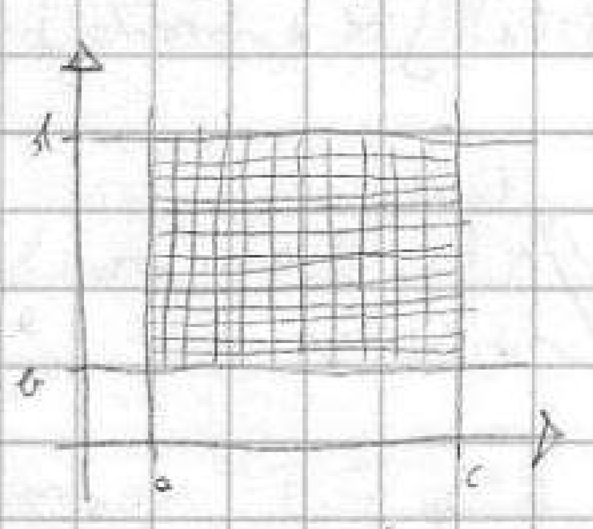
"misura". Le operazioni × calcolare "mis" sono 2: $\underset{\text{misura}}{\text{area dominio}}$ ($E \subseteq \mathbb{R}^2$, posso

oppure forma qualunque e poi calcolo.



1) Cons. $I \subseteq \mathbb{R}^2$ chiuso e decomponiamo intervallo $(\overset{a}{x_0}, x_1, \ldots \overset{c}{x_p}; \overset{b}{y_0}, y_1 \ldots \overset{d}{y_q})$ Dividiamo in

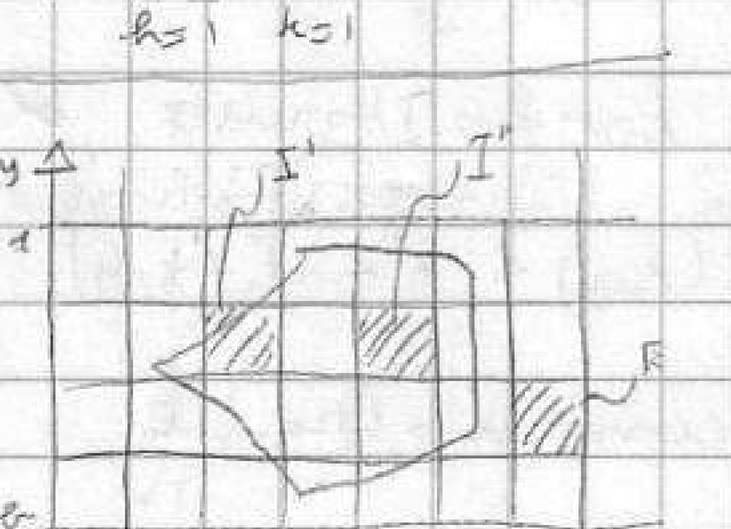
piccoli rettangoli.



$I = \bigcup_{h=1}^{p} I_h \bigcup_{k=1}^{q} I_k$ oppure $\bigcup_{h=1}^{p} \bigcup_{k=1}^{q} \underbrace{I_{hk}}_{\text{rettangolo di estremi } ([x_{h-1}, x_h], [y_{k-1}, y_k])}$

$\text{mis } I = \sum_{h=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \text{mis } I_{hk}$ → utile per domini generici

Ex:



E = limitato se $\exists$ I chiuso che lo contiene

Cons. D (decomposizione). Cons. I'_ν con almeno un punto in comune con E, I''_μ con tutti i punti di E

(tutti gli I'' sono $\subseteq$ in I')

$S' = \sum_{i=1}^{\nu} \text{mis. } I'_i$; $s'' = \sum_{j=1}^{\mu} \text{mis } I''_j$; S' CONTIENE la misura di E, mentre

s'' è contenuta, cerco di diminuire S' e aumentare s'' fino ad avvicinarmi all'area.

Considero $\underset{\text{misura interna}}{\sigma''} = \sup\{\text{somme } s'' / \text{dec } D \text{ in } E\}$; $\underset{\text{misura esterna}}{\sigma'} = \inf\{S' / \text{dec } D \text{ in } E\}$

Cerchiamo di "chiudere" il DIAMETRO intervallo (DIAM: distanza diagonale maggiore (?))

Se $\lim_{\delta \to 0} S' = \sigma'$, $\lim_{\delta \to 0} s'' = \sigma''$, δ è diametro massimo degli I_{hk}

TH: Sia E limitato : $mis_i E = mis_e E - mis_e \delta E$, (FRONTIERA - contorno)

Essendo bidim, la frontiera ha una sua area, anche $\frac{1}{\infty}$, sia contorcere

Def: Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato, si dice che E è MISURABILE se $mis_i E = mis_e E =$ (misura frontiera è nulla) $= mis\, E$; ① E è misurabile $\Longleftrightarrow mis_e \delta E = 0$;

② Se è limitato e misurabile, la sua misura è positiva o nulla.

- Calcolo delle misure RETTANGOLOIDE, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$; $T = \{(x,y) / x \in [a,b]$, $y \in [0, f(x)]\}$; $mis\, T = \int_a^b f(x)dx$ (si dice rett. e non area sotto il grafico in $\mathbb{R}^2$).

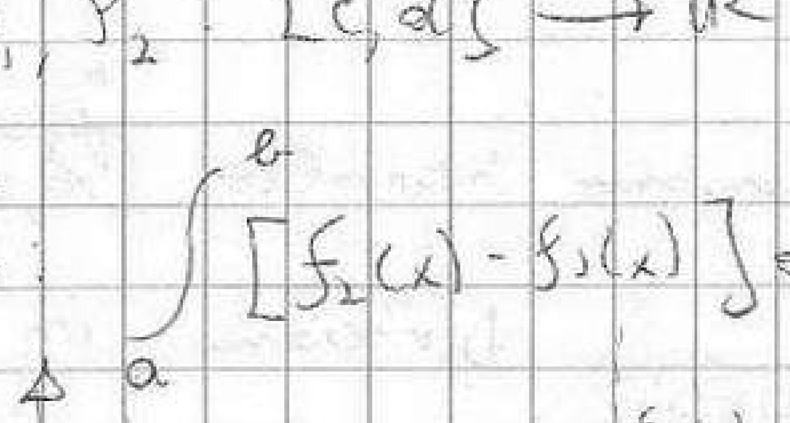
I - Dominio normale asse x ; $T: \{(x,y) / x \in [a,b], y \in [f_1(x), f_2(x)]\}$

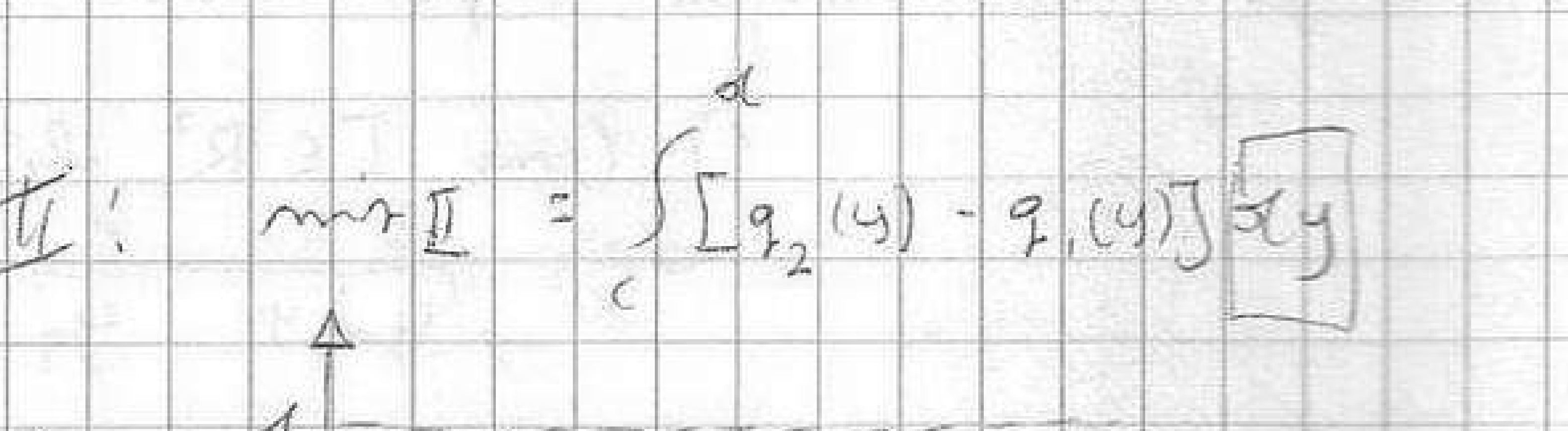
$f_1, f_2: [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

II - Dominio normale asse y ; $T: \{(x,y) / x \in [\rho_1(y), \rho_2(y)], y \in [c,d]\}$

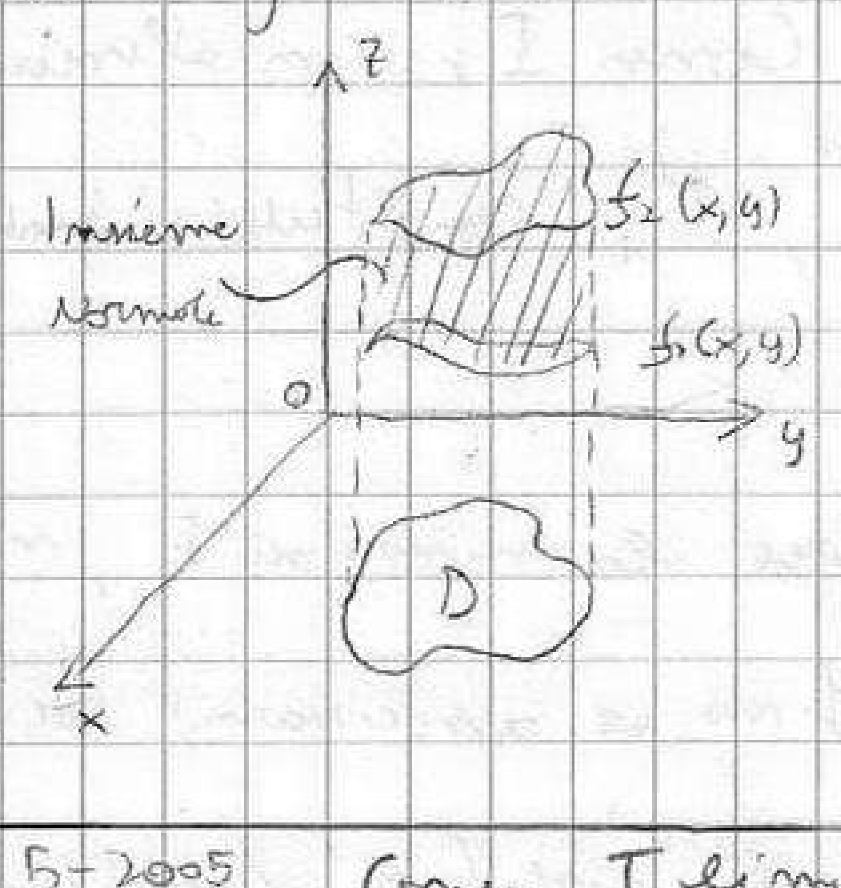
$\rho_1, \rho_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue

I: $\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = mis\, I$; II: $mis\, II = \int_c^d [\rho_2(y) - \rho_1(y)]\,dy$





Cons. D di $\mathbb{R}^2$ insieme PERFETTO (Chiuso con tutti punti di accumulazione). Sia D misurabile ; Cons. $f_1, f_2: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si dice DOMINIO NORMALE al piano xy è insieme dei punti (x,y,z) $\in D$ e $f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)$



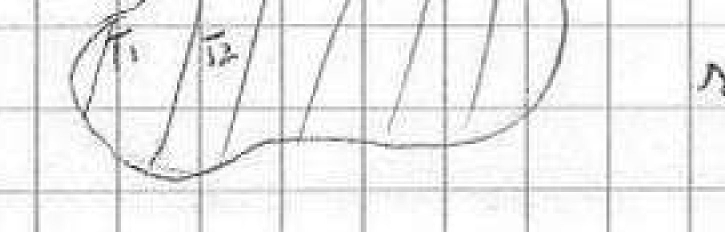
Porzione di spazio compresa tra le due funzioni.

(stesso vale per $\mathbb{R}^n$)

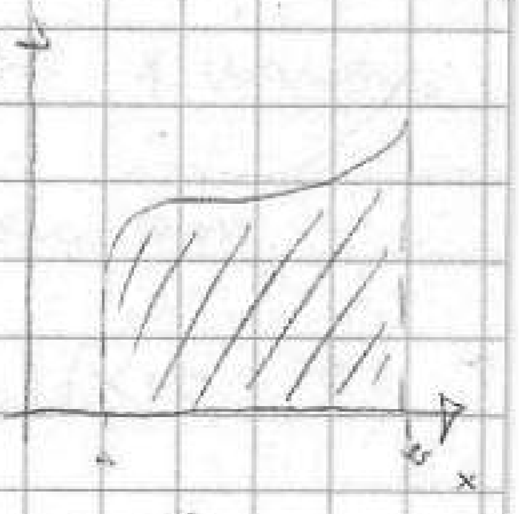
04-5-2005 Cons. T limitato e misurabile. Prendiamo decomposizione $t_1, t_2, \dots t_n$

Dominio è insieme di pti di accumulazione - affetto connesso. 1) $\bigcup_{i=1}^{n} t_i = T$ con $t_i \neq t_j$, $i \neq j$

Consideriamo $f: T \to \mathbb{R}$ continua $\forall P_1 P_2 \dots P_n$ (volto intervallo) prendiamo $P_1 \in T_1$, $P_2 \in T_2$, $P_n \in T_n$. Calcoliamo la somma $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, mis\, t_i$.



ex. 1 var. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ($[a,b]$ sst)]. Se $m_i = \inf_{[T_i]} f(P_i)$ e



$M_i = \sup_{T_i} f(P_i)$, ottengo $s = \sum_{i=1}^{n} m_i \text{ mis } T_i$; $S = \sum_{i=1}^{n} M_i \text{ mis } T_i$

m_i e M_i sono MIN e MAX assoluti (continui). $\boxed{s \le \sigma \le S}$

TH: Sia $f: T \to \mathbb{R}$ dove $T \subseteq \mathbb{R}^n$, T limitato e misurabile, f è continua. Sia δ il + grande diametro di una decomposizione D su T. Allora:

$$\boxed{\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \text{ mis } T_i = l \in \mathbb{R}}$$

l è detto INTEGRALE MULTIPLO di F su T

Se $T \subseteq \mathbb{R}^2$, $l = \underbrace{\iint_T f(x,y) \, \boxed{dT}}_{\text{INTEGRALE DOPPIO}} \to dx\,dy$

Se $T \subseteq \mathbb{R}^3$, $l = \underbrace{\iiint_T f(x,y,z) \, \boxed{dT}}_{\text{INTEGRALE TRIPLO}} \to dx\,dy\,dz$

TH. MEDIA: Sia $f: T \to \mathbb{R}$, $T \subseteq \mathbb{R}^n$ (limitato, misurabile, continuo). Allora è sempre vero che

$$m \text{ mis } T \le \int_T f(P)\,dT \le M \text{ mis } T \quad [\, m = \min f \,;\; M = \max f \,].$$

TH: Se f è continua e T è internamente connesso, allora $\exists\, Q \in T \,/\, f(Q) \text{ mis } T = \int_T f(P)\,dT$

↳ connesso senza frontiera

TH. ADDITIVITÀ: (stesse ip. della media). Con decompos. $T_1, T_2 \dots T_n$, allora

$$\int_T f\,dT = \sum_{i=1}^{n} \int_{T_i} f\,dT_i$$

TH. DISTRIBUTIVITÀ (LINEARITÀ). Siano $f_1 \dots f_n : T \to \mathbb{R}$ e n costanti $c_1, c_2, \dots c_n \in \mathbb{R}$.

Allora $$\int_T (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n)\,dT = c_1 \int_T f_1\,dT + c_2 \int_T f_2\,dT + \dots + c_n \int_T f_n\,dT$$

(stesse proprietà x int. di una variabile - varia il supporto, non la qualità della funz.)

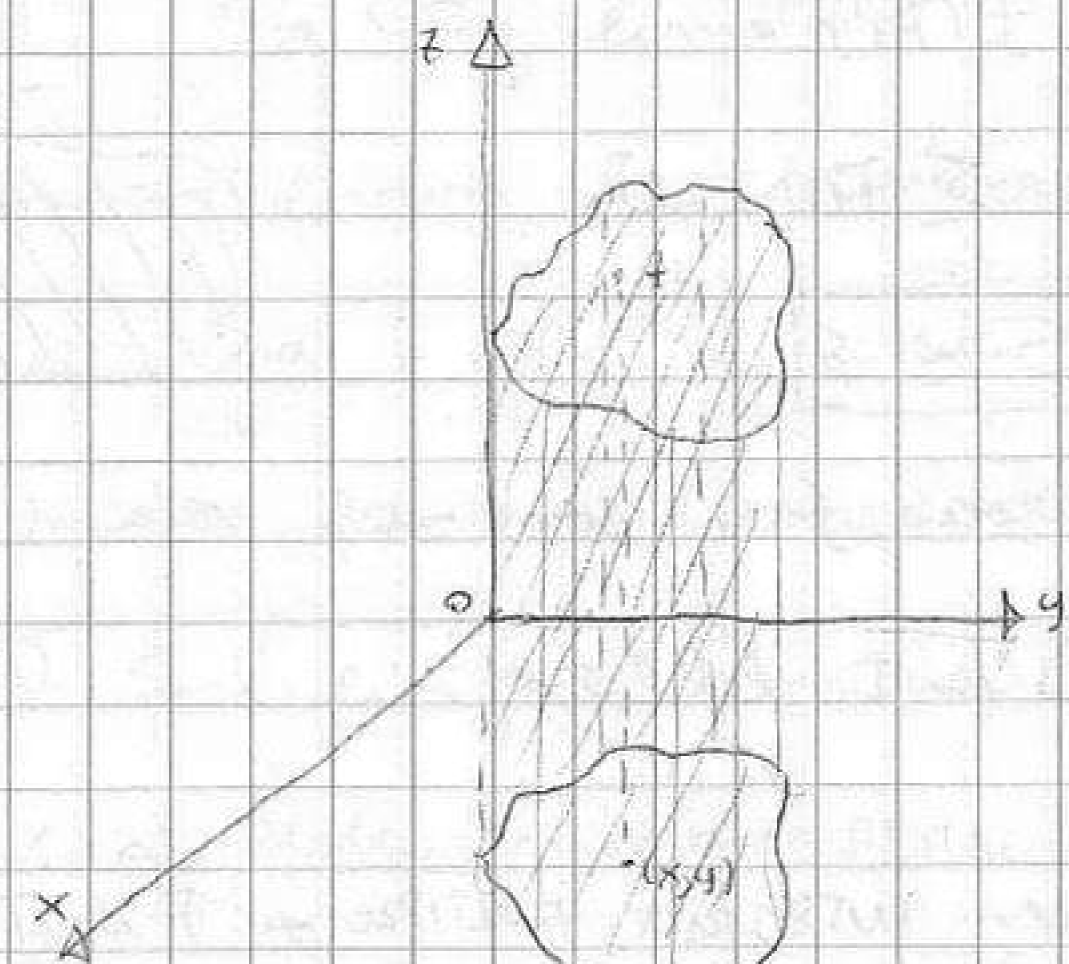
Ex: $f, g : T \to \mathbb{R}$, se $f \le g$ allora $\int_T f\,dT \le \int_T g\,dT$

Se $f: T \to \mathbb{R}$, allora $\left| \int_T f\,dT \right| \le \int_T |f|\,dT$ (vale uguaglianza se f è sempre + o −)

CILINDROIDE

$f: T \to \mathbb{R}$, $T \subseteq \mathbb{R}^2$, limitato e misurabile; f continua. Si dice CILINDROIDE di base T relativo a f l'insieme $U = \{ (x,y,z) \,/\, (x,y) \in T,\; 0 \le f(x,y) \le z \}$

(→)



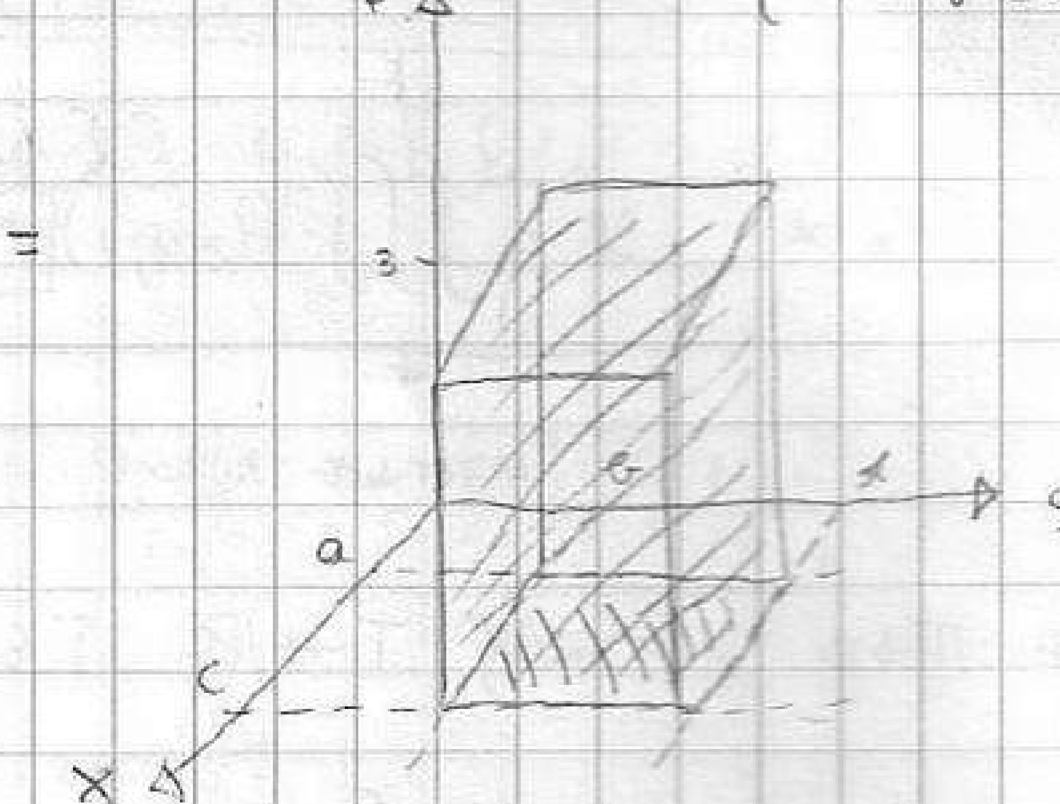
Si chiama cilindroide perché base non è elemento regolare.

$$\text{mis } U = \iint_T f(x,y)\,dx\,dy \quad [\text{oppure Vol } U]$$

Int. doppio calcola Volumi nello spazio

Unici integrali rappresentabili

Ex: $\iint_T 3\,dx\,dy$ [T è rettangolo $\begin{cases} a \le x \le c \\ b \le y \le d \end{cases}$



$f(x,y,z) = 3$. L'int. è uguale a $3\iint_T dx\,dy =$

$= 3 \text{ mis } T = 3\,(c-a)(d-a)\ \left[\int_a^b dx = (b-a)\right]$

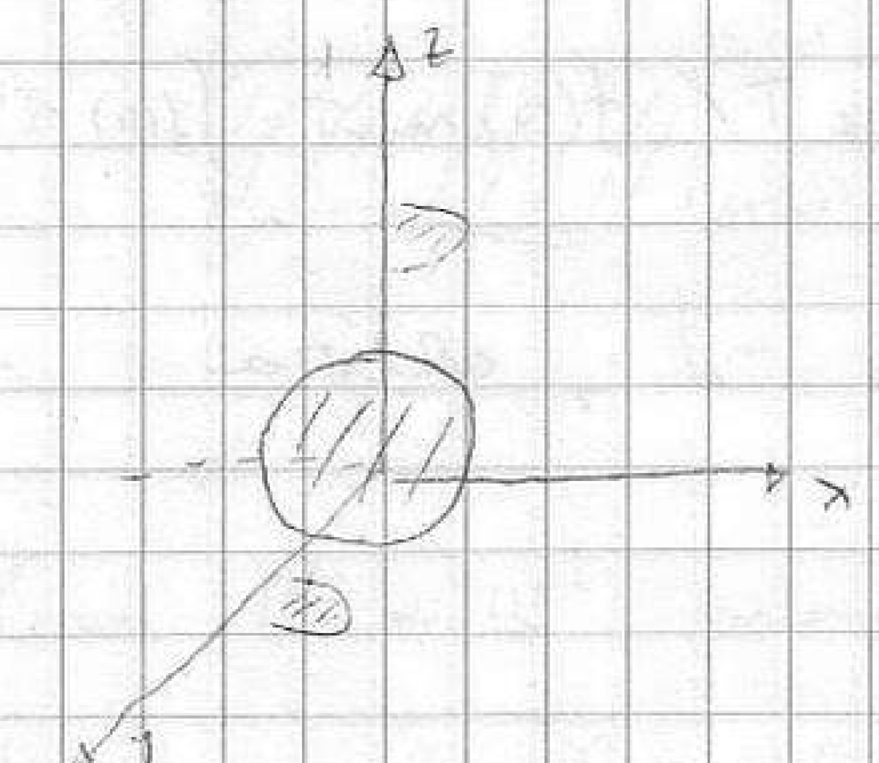
Ex: $\iint_T \overbrace{(\sin x + y^3 + 3)}^{f(x)}\,dx\,dy$; $T = x^2+y^2 \le 1$ → Decomponiamo: $\iint_T \sin x\, dT$

Essendo dispari è $= 0$ in T

$+ \iint_T y^3\, dT + \iint_T 3\, dT$

Anche questo è dispari, in $T = 0$

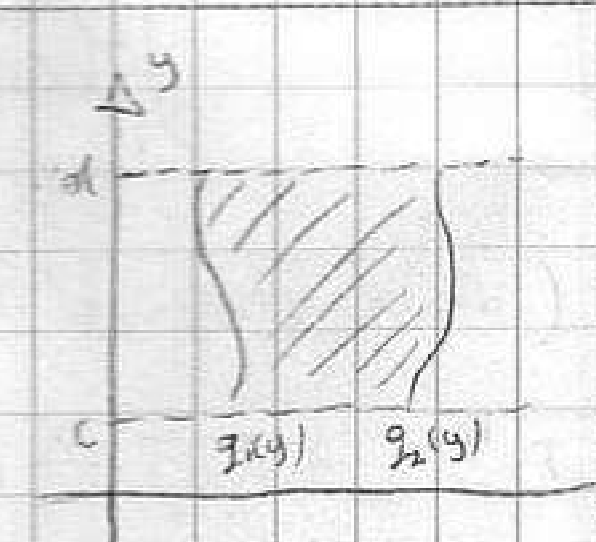
$3 \text{ mis } T = \underline{3\pi}$



(C'è simmetria perfetta circonferenza risp. a centro)

Ex: $\iint_T \sqrt{1-x^2+y^2}\, dx\,dy$ = volume semisfera = $\frac{2}{3}\pi$

05-5-2005 (Domini normali asse x e y in $\mathbb{R}^2$) (Domini $\perp$ asse y)



TH: Sia T un dominio misurabile $\perp$ risp. all'asse x e sia $f: T \to \mathbb{R}$ continua. Siano $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ due funz. che determinano T. Allora:

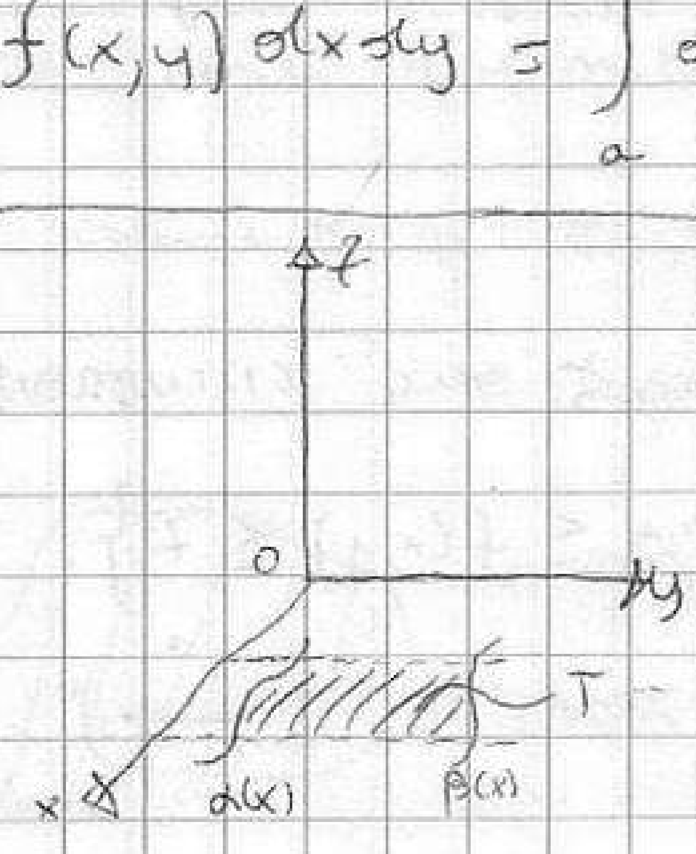
[def. dom. $[a,b]$]

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$$

→ nei domini $\perp$ a x (Vale in questo caso)

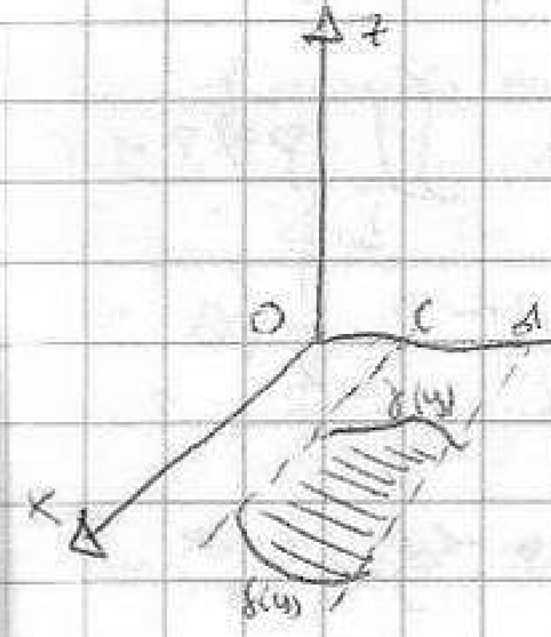
[FORMULE DI RIDUZIONE]

[int. grafica]



Se T $\perp$ a y e cons. $\gamma(y)$, $\delta(y)$ su $[c,d]$, Sia $f: T \to \mathbb{R}$ continua, allora

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx$$

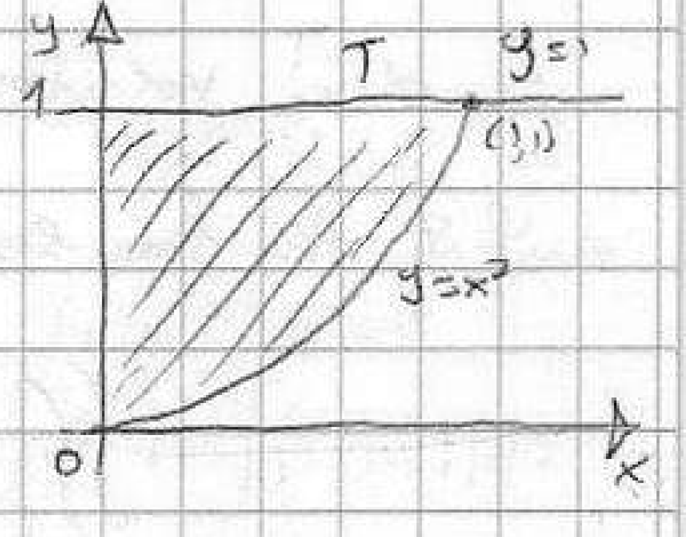


I metodi di integrazione si riconducono a integrali di 1 variabile

Basta capire se dom. è $\perp$ rispetto a uno degli due assi

Ex: Sia T il dominio del piano xy $T: \{(x,y) / x=0, y=1, y=x^2\}$. Calcolare $\iint_T (x+y)\, dx\, dy$

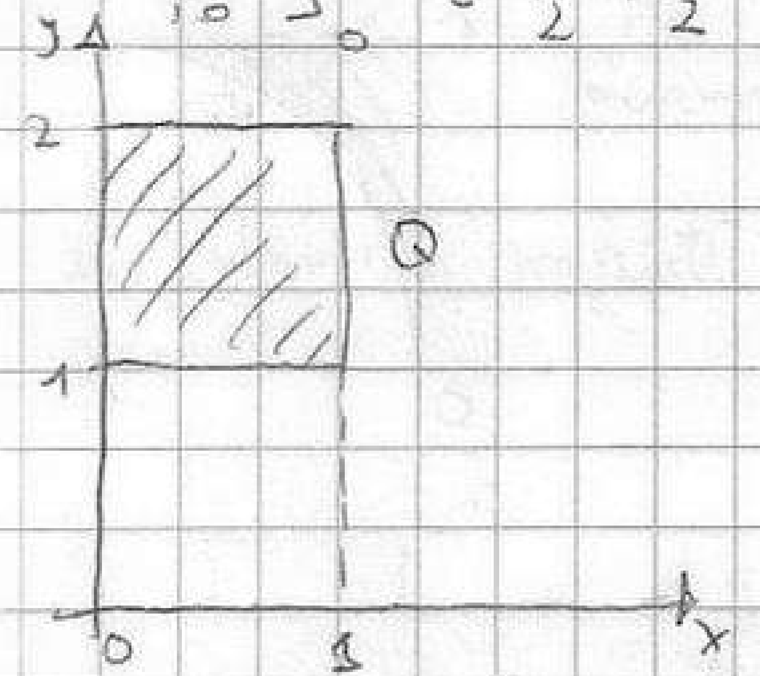
[Consiglio: studia sul piano il SUPPORTO, xké alla fine si studiano int. di 1 var.]



Come si vede $\perp$ risp. ad assi. Questo è $\perp$ a x: $0 \le x \le 1$ e [$\perp$ a y $(0 \le y \le 1;\ 0 \le x \le \sqrt{y})$]

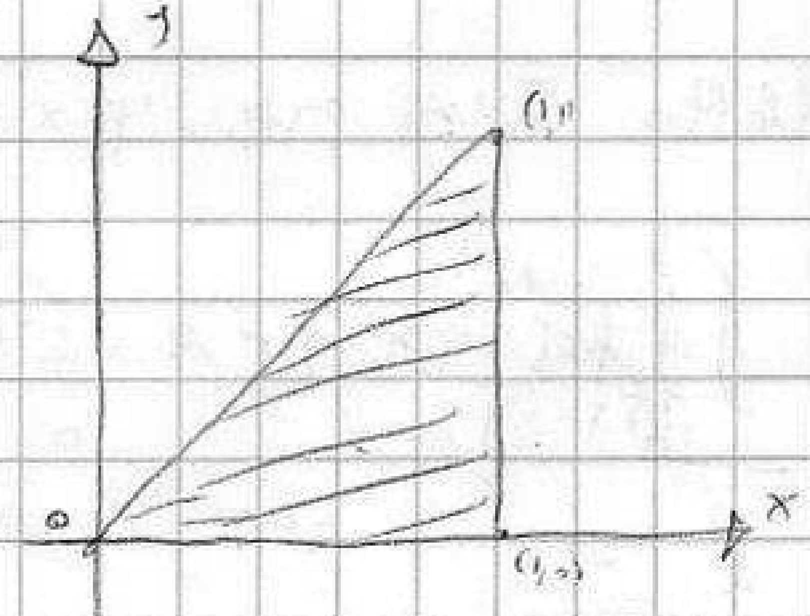
$\underbrace{x^2}_{\alpha} \le y \le \underbrace{1}_{\beta}$ $\quad \iint_T (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (x+y)\,dy = \int_{x^2}^1 x\,dy + \int_{x^2}^1 y\,dy$

$= \int_0^1 dx \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^1 = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$; questo int. $=$ a $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} (x+y)\,dx$



Volume solido (quadrato $Q = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 1 \le y \le 2 \end{cases}$) sotto il piano.

$z = 4 - x - y \qquad \int_0^1 dx \int_1^2 (4-x-y)\,dy$



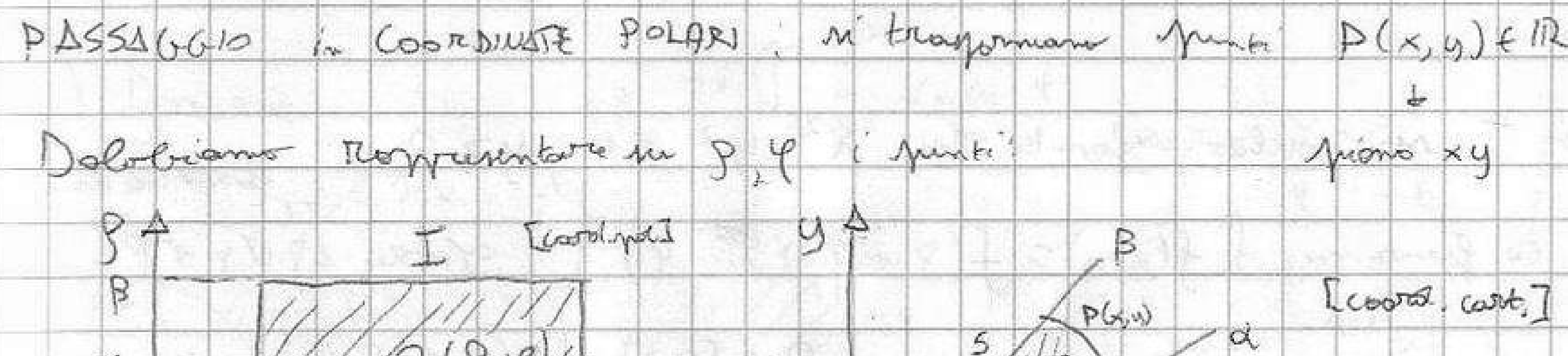
Calcola $\iint_T xy\,dx\,dy$ nel triangolo $(0,0), (1,0), (1,1)$

$\int_0^1 dx \int_0^x xy\,dy$

PASSAGGIO in COORDINATE POLARI: si trasformano punti $P(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$

piano xy $\qquad$ piano ρ, φ

Dobbiamo rappresentare in ρ, φ i punti:



[Come muta T da cartesiana in polare. Poi si converte $f(x,y)$ in $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$

Infine come sostituire $dx\,dy$ in $d\rho\, d\varphi$]

Ci aspettiamo una CORONA CIRCOLARE in xy. Rette rappresentano angoli + ci interessa ciò che è tra β e α. ρ è numero, modulo vettore. Determinato da intervallo a, b + ottengo settore S. [se $\varphi = 0$, S sarebbe stato porzione di cerchio]

Area $S = \frac{1}{2}(b^2-a^2)(\beta-\alpha)$. In coordinate polari devo fare $\iint_I \rho\, d\rho\, d\varphi$

$= \text{area } I = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_a^b \rho\, d\rho = \int_\alpha^\beta d\varphi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (b^2-a^2)\, d\varphi = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$

$(\varphi)_\alpha^\beta = \frac{1}{2}(b^2-a^2)(\beta-\alpha)$ → abbiamo trasf. corretta da dx a dy, cioè ρ

$\Rightarrow dx\,dy \to \rho\, d\rho\, d\varphi$.

Si deve valutare il dominio. Per semplicemente basta trasformare T in U in $\varphi\,\rho$ che ha la stessa misura

$$\Downarrow$$

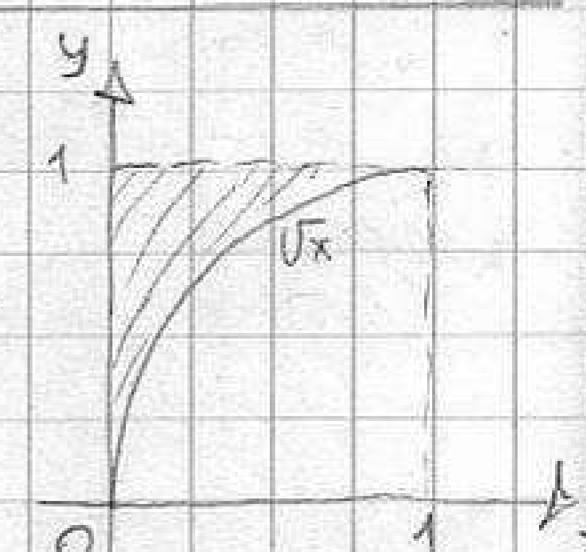
$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \iint_U f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi$$

---

09 - 5 - 05 Ex:

$\iint_T e^{y^3}\,dx\,dy \quad \left[\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy\right]$ Vediamo il dominio

$x \in [0,1]$; $y \in [\sqrt{x}, 1]$



È anche ⊥ a y → possiamo scrivere

l'int. riducendolo rispetto al asse y → $\sqrt{x} = y \to x = y^2$

(letta su in grafico y, x). T ora è $y \in [0,1]$, $x \in [0, y^2]$

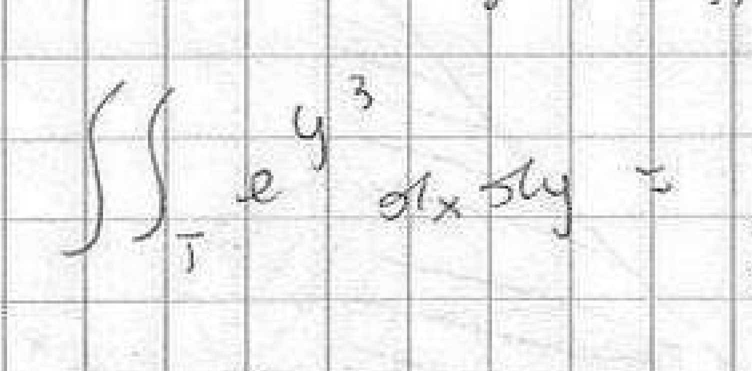
$$\iint_T e^{y^3}\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{y^3}\,dx = \left[x\,e^{y^3}\right]_0^{y^2} = \int_0^1 y^2 e^{y^3}\,dy = \int_0^1 \frac{e^{y^3}}{3} = \frac{e-1}{3}$$

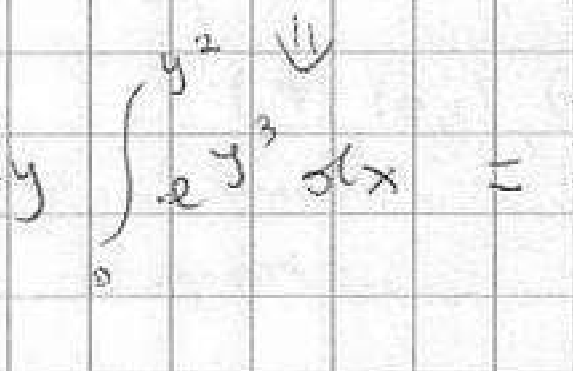
[dubbio 3]

$\iint_T y\,dx\,dy$ con T semicerchio definito da $x^2+y^2 \le 4$; $y \geq 0$

Si deve mutare la funzione $[f(x,y) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)]$, $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$ distanza da asse

$\rho \in [0,2]$; $\varphi \in [0,\pi]$





$f(x,y) = \rho\sin\varphi$

$$\left(\int_0^2\int_0^\pi \rho\, d\varphi\, d\rho\right) \to \int_0^2\int_0^\pi \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi$$

INTEGRALI TRIPLI

$\int_T f\,dT \quad [T \subseteq \mathbb{R}^n \quad n \geq 2]$ In $\mathbb{R}^3$ un dominio "è un parallelepipedo corrispondente a rettangolo in $\mathbb{R}^2$

Δ differenza di $\mathbb{R}^2$ l'integrale non è rappresentabile.

(43) Regole di calcolo sono le stesse.

Le formule di riduzione sono lo stesso utilizzabili. $\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

TH: Sia T un dominio misurabile e limitato, e

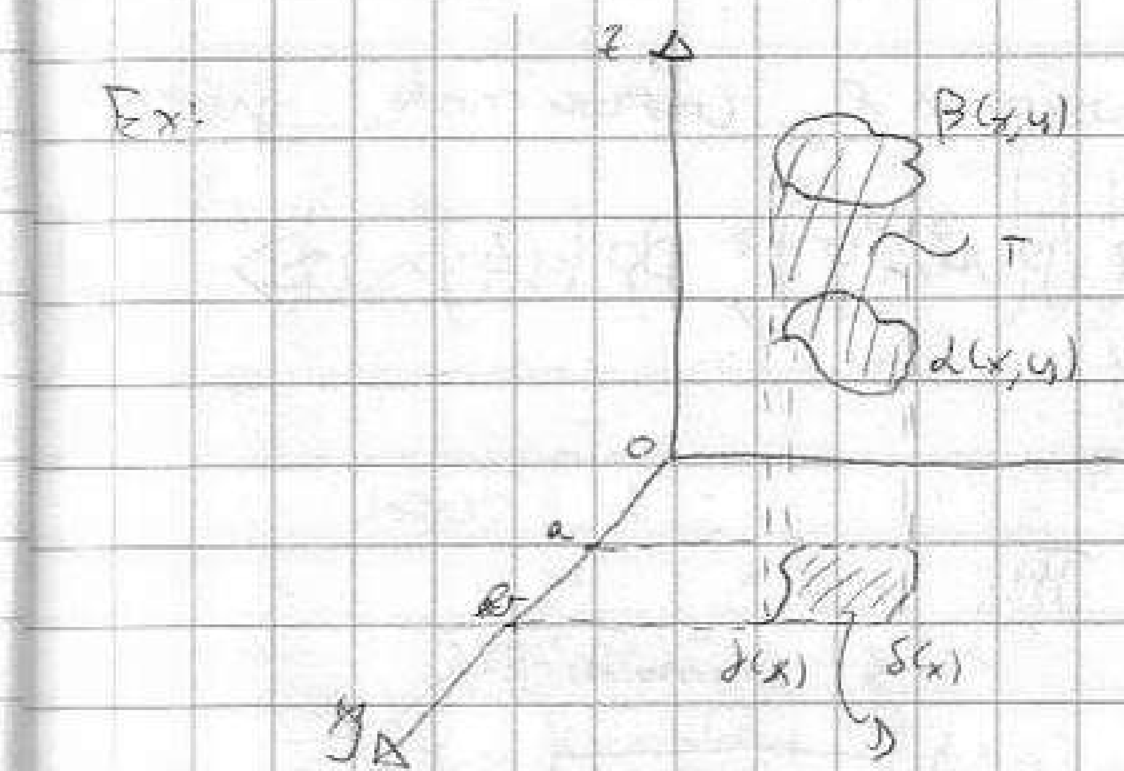
sia $f(x,y,z)$ continua in T.

- Supponiamo che T sia normale al piano xy relativamente alle funzioni $z=\alpha(x,y)$

e $z=\beta(x,y)$. Allora $\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

↳ in D

Ex:



Se risulta che D è normale ad es. rispetto all'asse x, si ha: $\int_a^b dx \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

(lo stesso per $\perp$ all'asse y)

(lo stesso per $\perp$ a piani xz, yz)

1) $T \perp$ a xy $<$ $D \perp x$; $D \perp y$

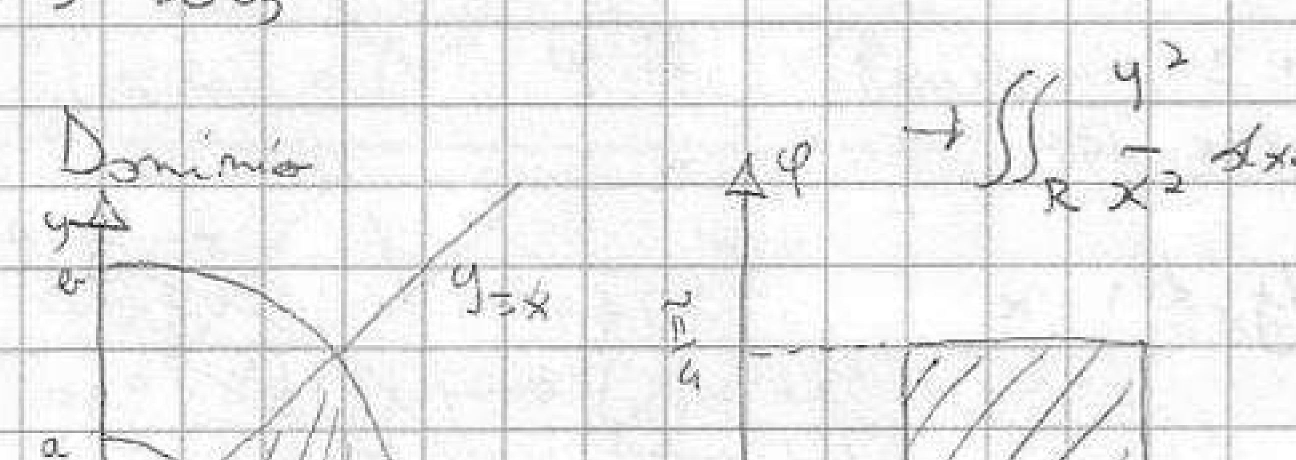
2) $T \perp$ a xz $<$ $D \perp x$; $D \perp z$

3) $T \perp$ a yz $<$ $D \perp y$; $D \perp z$ → 6 diverse possibilità [da 2 a 6] $2!$ $3!$

di combinazione tra i versori

11-5-2005

1) Dominio → $\iint_R \frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy$



$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

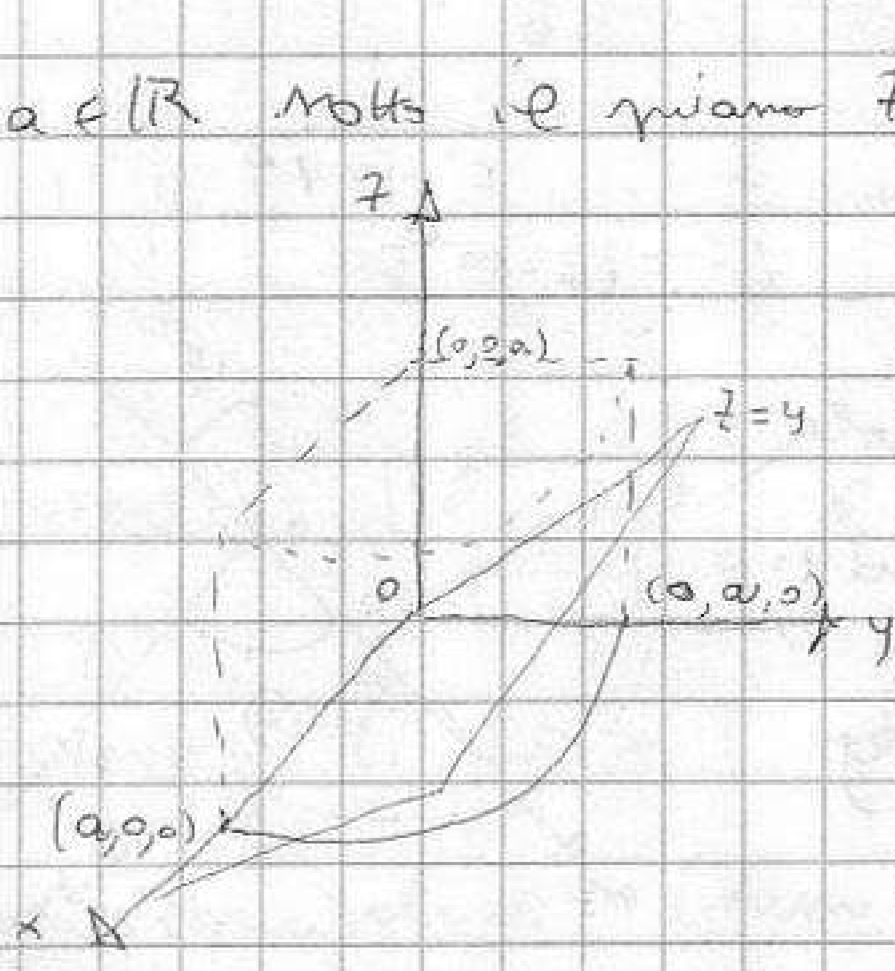
$a \le \rho \le b$

$\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_a^b \frac{\rho^2 \sin^2\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi}\,\rho\,d\rho\,d\varphi =$

$= \int_a^b \rho\,d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2\varphi\,d\varphi = \boxed{\frac{1}{2}(b^2-a^2)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}$

2) Det. il volume del solido nel piano ottenuto dentro il cilindro $x^2+y^2=a^2$,

$a \in \mathbb{R}$, sotto il piano $z=y$



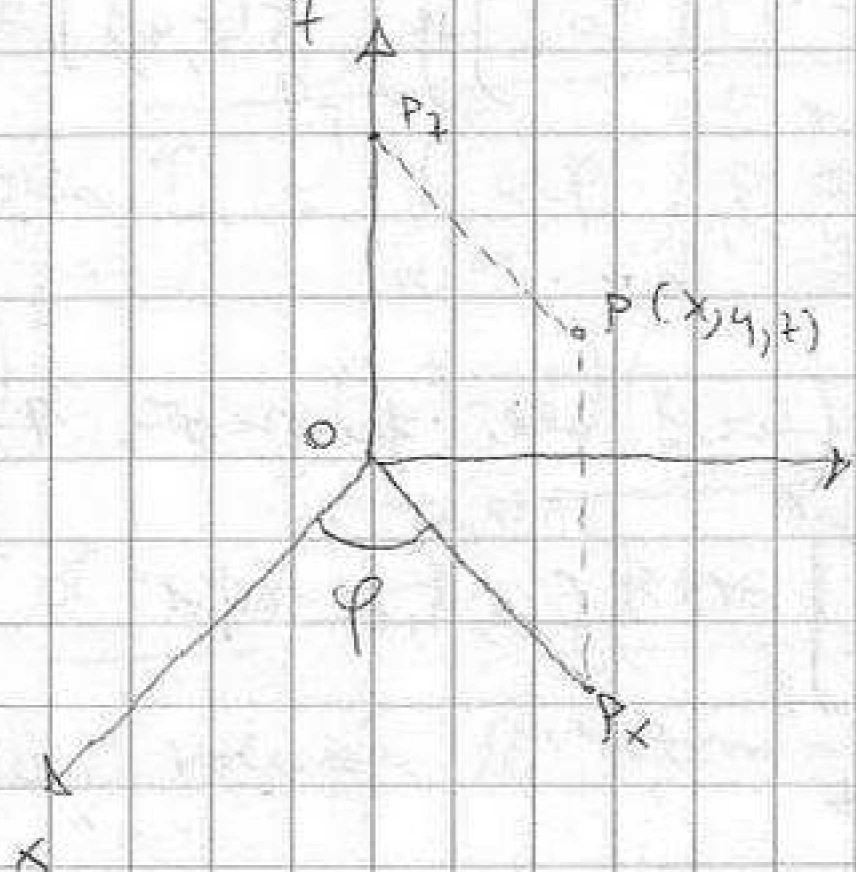
$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$0 \le \rho \le a$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \rho \sin\varphi\,\rho\,d\varphi\,d\rho =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi \int_0^a \rho^2\,d\rho = \boxed{\frac{a^3}{3}}$

COORDINATE CILINDRICHE



$P \in \mathbb{R}^3$. In $\mathbb{R}^2$ le traiett. di oggetti con domini circolari erano in coord. polari. Qui si trasf. in coord. cilindriche.

$$(x,y) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (\rho, \varphi)$$
$$(x,y,z) \xrightarrow{\mathbb{R}^3} (\rho, \varphi, z)$$

Per il piano xy usiamo le coordinate polari

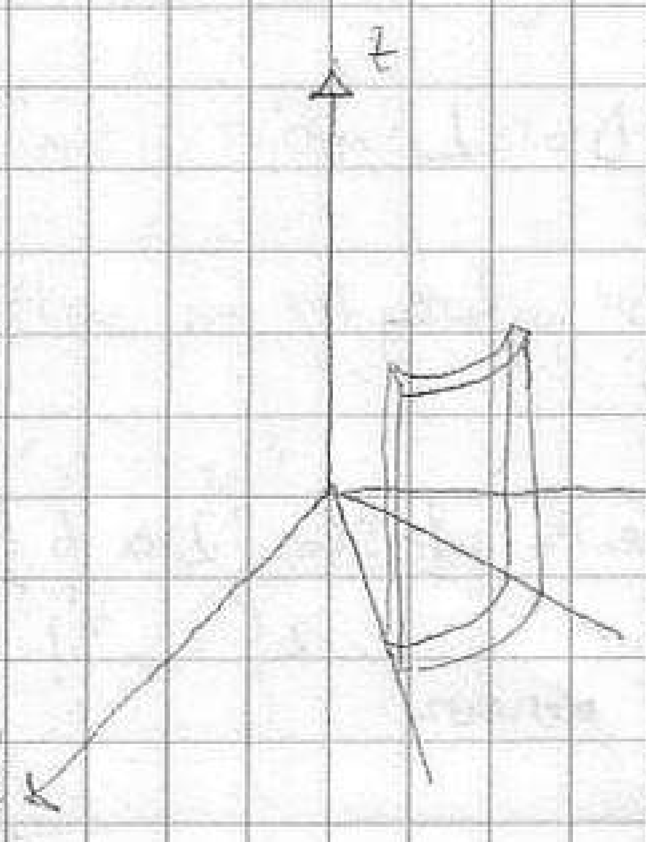
(P proiettato su xy e ricalcolato $\rightarrow P_{xy} = (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)$, $P_z = z$) $\Rightarrow$

$(x,y,z) \rightarrow (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$.

Se abbiamo un integrale triplo nello spazio T:

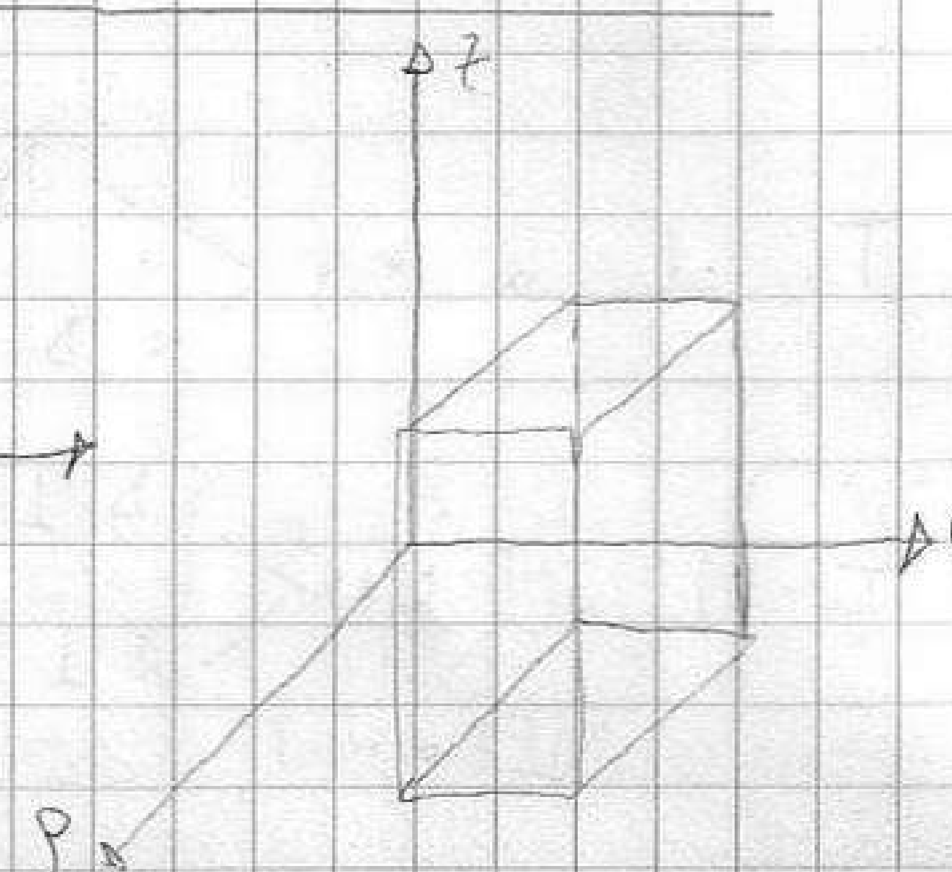
$$\iiint_T f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_U f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, \overbrace{\rho\, d\rho\, d\varphi}^{\text{come di } \mathbb{R}^2}\, dz$$

(int. grafica)



$\rightarrow$ da Cartesiane a cilindriche $\rightarrow$

[l'altezza è costante]



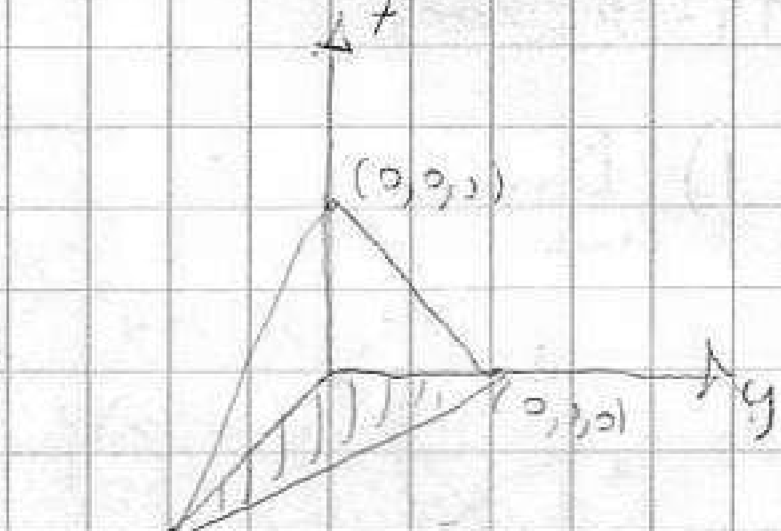
Ex:

Calcolare $\iiint_T xy\, dx\, dy\, dz$ (nel tetraedro + 3-simplesso)

$0 \le x \le 1$

piano xy. $z = 0$ $\qquad$ $0 \le y \le 1 - x$

$\alpha(x,y) = 0$; $\beta(x,y) = 1-x-y$



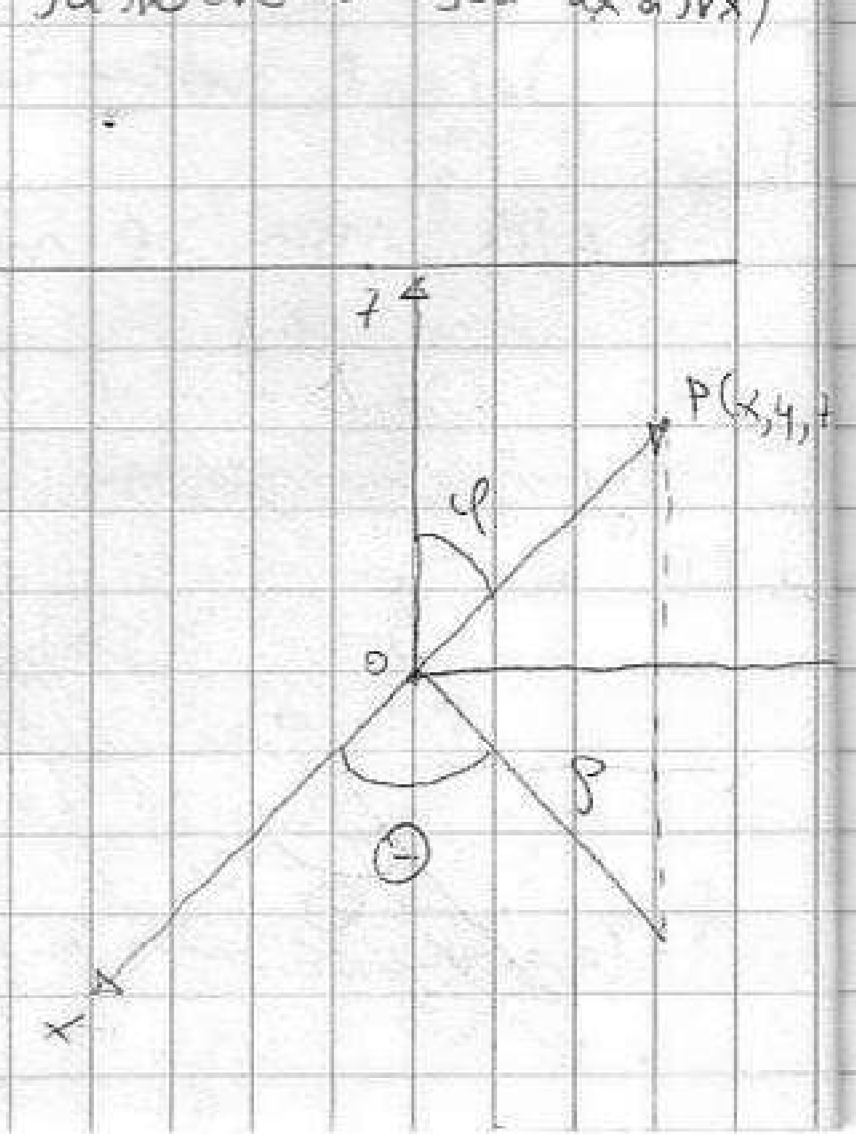
$$\iint_D dx\, dy \int_0^{1-x-y} xy\, dz \longrightarrow \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xy\, dz$$ (si risolvono da dx a dx)

12 - 5 - 2005

COORDINATE SFERICHE

$P \in \mathbb{R}^3$, $P \equiv (x,y,z)$. Con $\vec{OP} = r$; φ è l'angolo che r forma con asse z lungo la dir. positiva.

Θ è l'angolo tra asse x e proiezione P su piano xy



$\Downarrow$

$P \equiv (x,y,z) \longrightarrow P \equiv (\rho, \varphi, \theta)$ [$\rho \geq 0$; $0 \le \varphi \le \pi$ ⇝

i punti nell'asse z non hanno una caratterizzazione unica in coordinate sferiche $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$]

→ $\underline{x = \rho \sin\varphi \cos\theta}$, $\underline{y = \rho \sin\varphi \sin\theta}$, $\underline{z = \rho\cos\varphi}$

→ $dV = dx\,dy\,dz \Rightarrow dV = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

⇓

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_U f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

---

16 - 5 - 2005

Sia $\vec F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longrightarrow (F_1(x,y), F_2(x,y))$, [campo vettoriale di classe C^1]

Cons: $\vec r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longrightarrow (x(t), y(t))$, [$\vec r$ curva regolare, $\mathrm{Im}\,\vec r = C \subseteq D$]

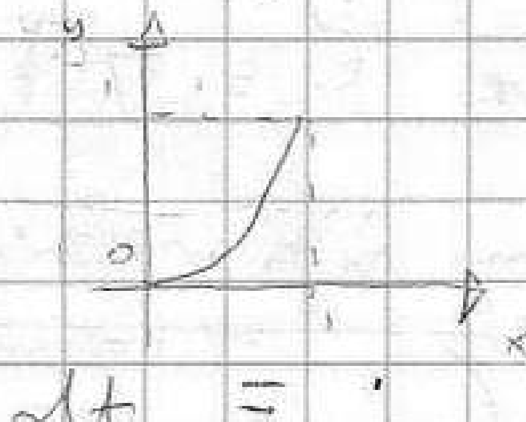
Cons: $\vec T(t) = (x'(t), y'(t))$, $\hat T(t) = \dfrac{\vec T(t)}{\|\vec T\|}$

INTEGRALE DI LINEA DEL CAMPO VETTORIALE $\vec F$ LUNGO LA CURVA $\vec r$

$$\int_{+C} \vec F \cdot \hat T \, ds \overset{(\text{per def.})}{=} \int_a^b \vec F(\vec r(t)) \cdot \vec T(t)\, dt = \int_a^b F_1(x(t), y(t))\, x'(t) + F_2(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt$$

Ex: $\vec F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longrightarrow (\underbrace{x^2 y}_{F_1}, \underbrace{y^2}_{F_2})$, Prendiamo la curva $\vec r_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longrightarrow (t, t^2)$ la cui traccia è $y = x^2$



Applichiamo la def. ↓ Cons. arco di parabola:

$$\int_{+C_1} \vec F \cdot \hat T\, ds = \int_0^1 \left[(2t^2)\cdot 1 + t^4 \cdot 2t\right] dt = \int_0^1 \left[2t^2 + 2t^5\right] dt =$$

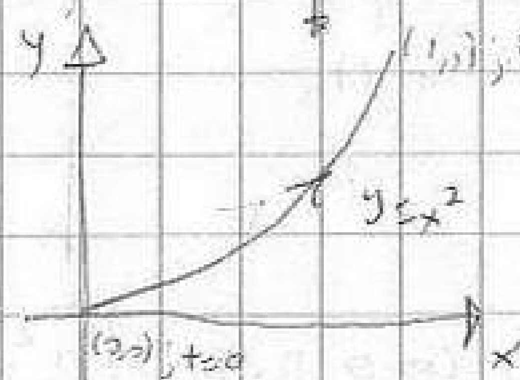
$$\frac{2}{3} t^3 \Big|_0^1 + \frac{2t^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \underline{1}$$

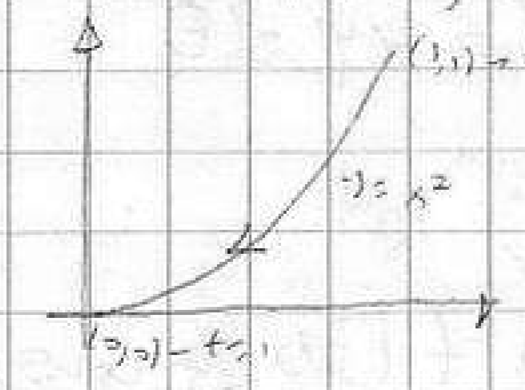
PROPRIETÀ, [l'int. $\cancel{d}$ da $\vec F$, ma dalla sua traccia e orientamento]

Siano $\vec r_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ e $\vec r_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^2$ due curve regolari ed equivalenti → (stessa traccia). Allora: →

$$\int_{+C_1} \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds = \begin{cases} \displaystyle\int_{+C_2} \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds & \text{se } C_2 \text{ ha la stessa orientazione} \\ \displaystyle -\int_{+C_2} \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds & \text{se } C_2 \text{ ha orientazione opposta} \end{cases}$$

Ex: Con $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \to ((1-t),(1-t)^2)$





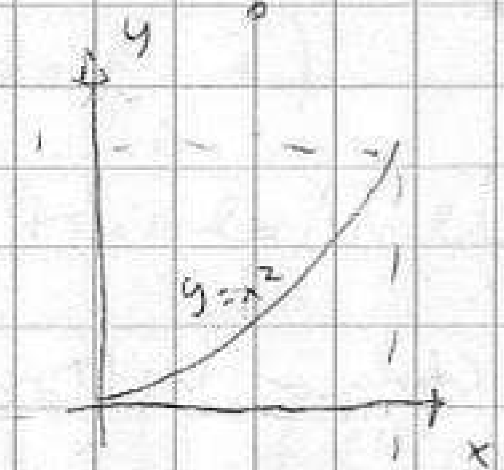
(versi opposti)

$$\Rightarrow \int_{+C_2} \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds = -1$$

(vedi da ex precedente $\vec{r}_1$)

$\vec{r}_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$t \to (t^2, t^4)$

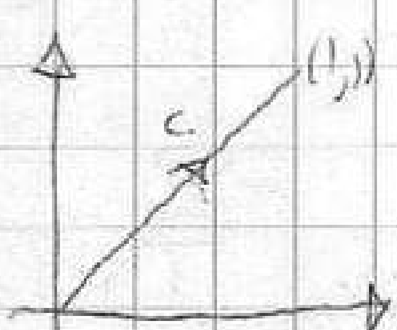


$$\Rightarrow \int_{+C_3} \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds = 1$$

Ex: $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \to (x^2+y,\ y^2)$

Calcola l'int. lungo il segmento:



Parametrizziamo: $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases} \to t \in [0,1]$

utilizziamo la formula:

$$\int_C \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds = \int_0^1 (t^2+t)\cdot 1 + t^2\cdot 1\,dt = \int_0^1 (2t^2+t)\,dt = \frac{2}{3}t^3\Big|_0^1 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}+\frac{1}{2} =$$

Prima l'int. sull'arco di parabola era 1. L'int. di linea non dipende solo da estremi ma anche dalla curva. Se, però, c.v. è CONSERVATIVO dipende solo dagli estremi.

⇓

TH: $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ campo vettoriale conservativo con potenziale Φ cioè $\vec{F} = \nabla\Phi$. Se $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ è una curva regolare con $C \subseteq D$ e con p.to iniziale P_0 e p.to finale P_1 allora:

$$\boxed{\int_{+C} \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)}$$ [NON DIPENDE DALLA CURVA]

Dim.:

$$\int_{+C} \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds = \int_a^b F_1(x(t),y(t))\,x'(t) + F_2(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$$ Per ipotesi

$$F_1(x,y) = \Phi_x(x,y) \quad e \quad F_2(x,y) = \Phi_y(x,y)$$

Sostituiamo: $\int_a^b \Phi_x(x(t),y(t))\,x'(t) + \Phi_y(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$. Consideriamo

$G(t) = \Phi(x(t),y(t)) \rightsquigarrow G'(t) = \Phi_x(x(t),y(t))\,x'(t) + \Phi_y(x(t),y(t))\,y'(t)$

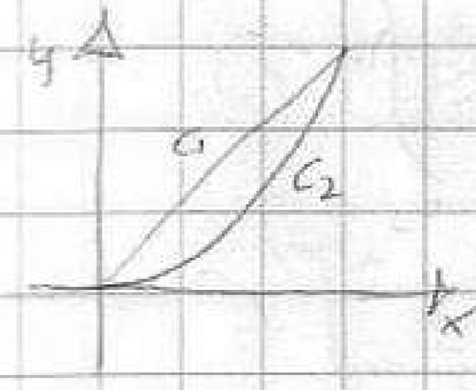
(x il th. fond.)

$\to \int_a^b G'(t)\,dt = G(b) - G(a) = \Phi(x(b),y(b)) - \Phi(x(a),y(a)) = \boxed{\Phi(P_1)-\Phi(P_0)}$

Sia $\vec F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (x,y)$ $\quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \to 0=0 \Rightarrow$ conservativo condiz. necessaria

$$\begin{cases} \Phi_x = x \\ \Phi_y = y \end{cases} = \begin{cases} \Phi = \frac{x^2}{2} + c(y) \\ c'(y) = y \end{cases} \to \begin{cases} \Phi = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \cancel{c} \\ c(y) = \frac{y^2}{2} + c \end{cases} \to \text{per } c=0$$

Calcoliamo l'int. nelle curve di prima



$\int_{+C_1} \vec F \cdot \hat T\,ds =$ $P_1 = (1,1)$, $P_0 = (0,0)$ Poiché $\vec F$ è conservativo $\Rightarrow = \Phi(P_1) - \Phi(P_0) = 1$

se l'orientazione è opposta era -1

uguale per C_2

(in meccanica l'int. di linea di un campo vett. è il lavoro)

Corollario: $\vec F$ campo conservativo. C è curva regolare chiusa $\left[\begin{smallmatrix} P_0 = P_1 \\ a = b \end{smallmatrix}\right]$

Allora l'int. di linea si esprime $\oint_{+C} \vec F \cdot \hat T\,ds = 0$

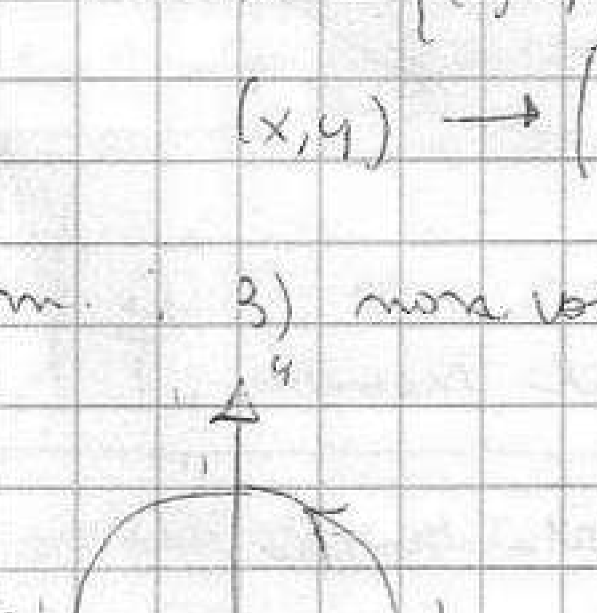
TH: Sono equivalenti le espressioni:

1) $\vec F$ è conservativo
2) $\int_{+C} \vec F \cdot \hat T\,ds$ dipende solo da $\vec F$ ed estremi curva $\to \forall$ curva
3) $\oint_{+C} \vec F \cdot \hat T\,ds = 0 \longrightarrow \forall$ curva chiusa

Sia $\vec F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ (vedi appunti precedenti)

$(x,y) \to \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \to \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ ma non era conservativo.

Dim. 3) non valida. Con circonferenza $\vec r: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\theta \to (\cos\theta, \sin\theta)$



$\int_{+C} \vec F \cdot \hat T\,ds = \int_0^{2\pi} -\sin\theta\,(-\sin\theta) + \cos\theta\cos\theta\,d\theta =$

$\int_0^{2\pi} 1\,d\theta = 2\pi \neq 0 \Rightarrow \vec F$ NON È CONSERVATIVO

Confronto: Calcolo 1: Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, allora

① F ammette sempre una primitiva $[F' = f]$

② $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

$\downarrow$

Calcolo 2, campi vettoriali: Sia $\vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

① Cond. nec. $\frac{\partial F_1}{y} = \frac{\partial F_2}{x}$; cond. suff.: il dominio non ha buchi $\longrightarrow$ ammette un potenziale

② $\int_{+C} \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$ se $\underline{F \text{ è conservativo con potenziale } \Phi}$

Ex: $\vec{F}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \to$ aperto con buco nell'origine

$\not\downarrow$

estensione a C.V. in dim. 3: ex: [estensione ovvia]

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, sia $\vec{r}: [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\int_{+C} \vec{F}\,\hat{T}\,ds = \int_0 F_1(x(t), y(t), z(t))$

$(x,y,z) \longrightarrow (x^2, y, z)$ $\quad t \longrightarrow (t, 2t, t)$

$\cdot\, x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)\,dt = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 +$

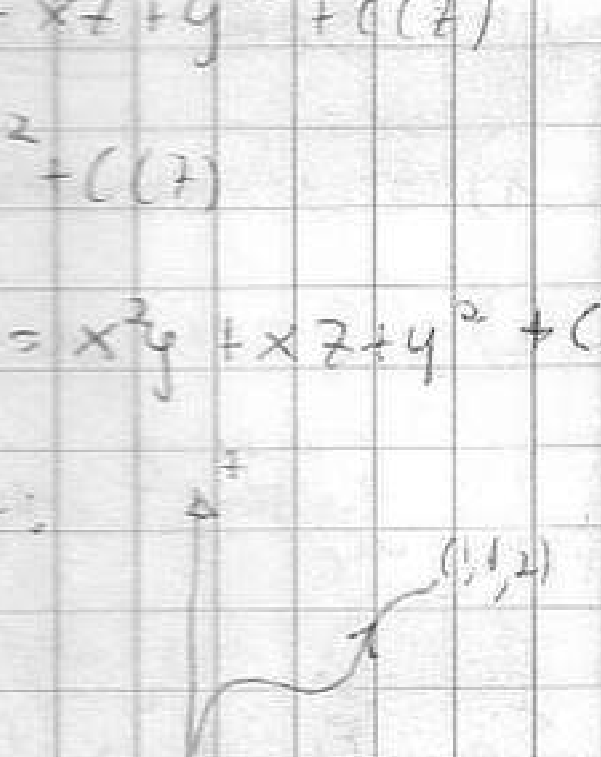
$2t\cdot 2 + t\cdot 1)\,dt = \int_0^1 (t^2 + 5t)\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + 5\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2} = \frac{2+15}{6} = \frac{17}{6}$

Ex:

$F = (2xy + z, x^2 + 2y, x)$. Det. potenziale:

$$\begin{cases} \Phi_x = 2xy + z \\ \Phi_y = x^2 + 2y \\ \Phi_z = x \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi = x^2 y + xz + c(y,z) \longrightarrow \Phi = x^2 y + xz + y^2 + c(z) \\ \cancel{x^2} + c_y(y,z) = \cancel{x^2} + 2y \to c(y,z) = y^2 + c(z) \\ \cancel{x} + c'(z) = \cancel{x} \longrightarrow c(z) = c \implies \Phi = x^2 y + xz + y^2 + c \end{cases}$$

Ora posso calcolare qualsiasi int. di linea del campo, ex curva:



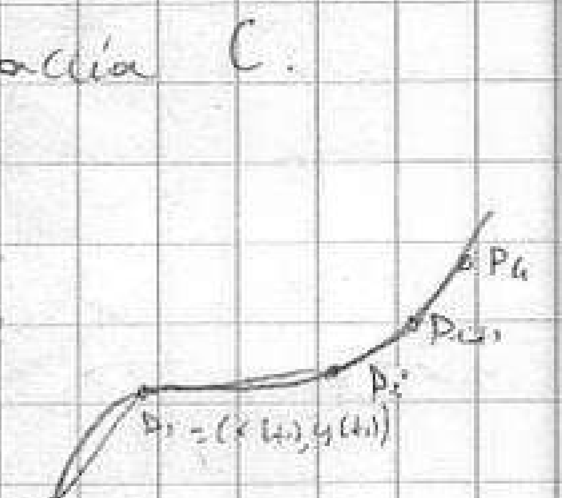
$\int_{+C} \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds = \Phi(1,1,2) - \Phi(0,0,0) = 1 + 2 + 1 = 0 = 4$

18-5-2005

$\int_{+C} \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\,\vec{T}(t)\,dt$ Perché nel 1 c'è $\hat{T}$ e nel secondo $\vec{T}$?

Sia $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ con una certa traccia C.
$t \to (x(t), y(t))$

Vogliamo la lunghezza curva, spezziamo in una poligonale,



$l(P_0 P_1) = \sqrt{[x(t_1) - x(a)]^2 + [y(t_1) - y(a)]^2}$, in generale

49 $l(P_i P_{i+1}) = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2}$

$\longrightarrow$

$x(t_{i+1}) - x(t_i) = $ (per th. Lagrange) $= x'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$ dove $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$

$y(t_{i+1}) - y(t_i) = $ " $= y'(\eta_i)(t_{i+1} - t_i)$ dove $\eta_i \in [t_i, t_{i+1}]$

La lunghezza della poligonale è la somma di tutti i segmenti $\rightarrow$

$$l(Pol) = \sum_{i=0}^{n-1} l(P_i P_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x'(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)]^2 + [y'(\eta_i)(t_{i+1}-t_i)]^2}$$ Supponiamo

$\rightarrow$ int. molto piccolo

molto vicini i punti, quindi approx. $\xi_i \equiv \eta_i$ (in genere sono differenti)

$$\Rightarrow \overset{\sim}{=} \sum_{i=0}^{n-1} |t_{i+1} - t_i| \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\xi_i)^2}$$, per $n \to +\infty$ tutto diventa $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$

$= \int_a^b \|\vec{T}(t)\|\, dt$. Se abbiamo curva $\vec{r}$, per def. $\underline{l(\vec{r}) = \int_a^b \|\vec{T}(t)\|\, dt}$

Verifica: Circonferenza: $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$\theta \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $\quad \vec{T}(\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$

$$\|\vec{T}(\theta)\| = \sqrt{r^2 \sin^2\theta + r^2\cos^2\theta} = r \to l(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \|\vec{T}(\theta)\|\, d\theta = \int_0^{2\pi} r\, d\theta = \underline{2\pi r},$$

$\vec{F} \cdot \hat{T} = \vec{F} \cdot \dfrac{\vec{T}}{\|\vec{T}\|}$, indicando con ds un arco di curva $ds = \|\vec{T}\|\, dt$. Quindi

$$\underline{\vec{F} \cdot \hat{T}\, ds} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{T}}{\cancel{\|\vec{T}\|}} \cancel{\|\vec{T}\|}\, dt = \underline{\vec{F} \cdot \vec{T}\, dt}$$

Oss: CURVE REGOLARI A TRATTI

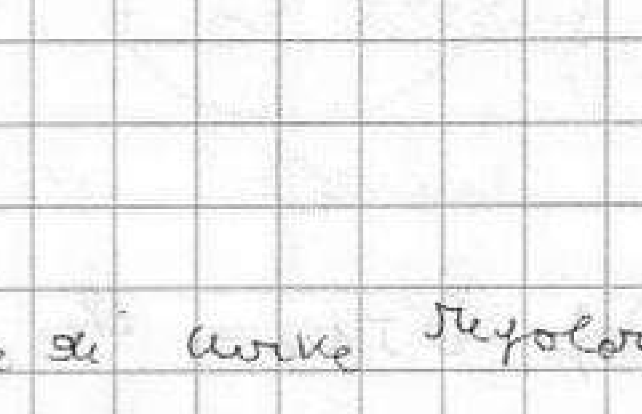
Posso prendere parti regolari di una curva non regolare

Si può fare l'int. di linea di queste curve $\int_{+C} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds \overset{def}{=}$

$$\int_{+C_1} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds + \int_{+C_2} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds + \dots + \int_{+C_5} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds$$ //

FORMULE DI GREEN: legame tra $\iint$ e int. di linea

Cons. D dominio regolare la cui frontiera sia l'unione di curve regolari a tratti. Possiamo definire orientamento verso antiorario (dominio alla nostra sx lungo il verso di percorrenza).



Sia $\vec{F}$ campo vettoriale $: D \to \mathbb{R}^2$ (di classe C^1). Le F.D.G. affermano che

$$\boxed{\oint_{+C} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy}$$, dove C è la frontiera orientata di D

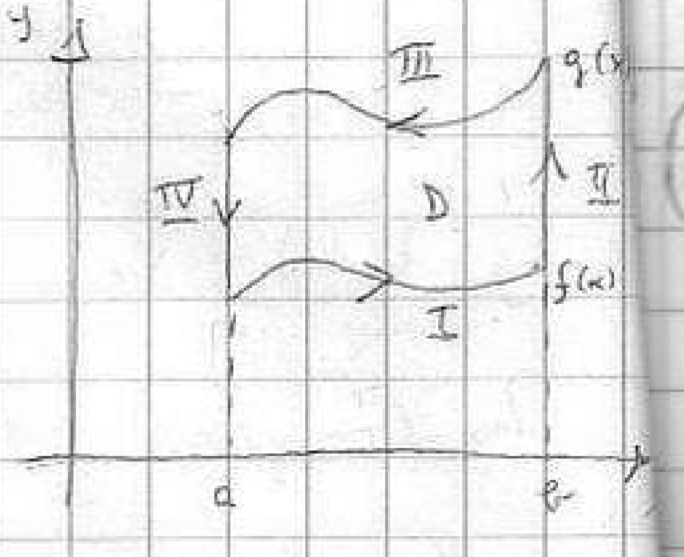
Dimostrazione nel caso in cui D sia $\perp$ all'asse X e all'asse Y:

$\vec{F} = (F_1, F_2)$. A partire da $\vec{F}$ costruisco altri campi vett. $\vec{F_1} = (F_1, 0)$ e $\vec{F_2} = (0, F_2)$,

$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$. Th: $\oint_{+C} \vec{F_1} \cdot \hat{T}\, ds = \iint_D \dfrac{-\partial F_1}{\partial y}\, dx\, dy$ e $\oint_{+C} \vec{F_2} \cdot \hat{T}\, ds = \iint_D \dfrac{\partial F_2}{\partial x}\, dx\, dy$ (son-

mando le 2 il th. è dimostrato; le dim. sono analoghe)

$D = \{(x,y) \;/\; a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$ (ex. risp. a x)



$$\iint_D -\frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} -\frac{\partial F_1}{\partial y}\,dy = -\int_a^b \big(F_1(x,g(x)) - F_1(x,f(x))\big)\,dx$$

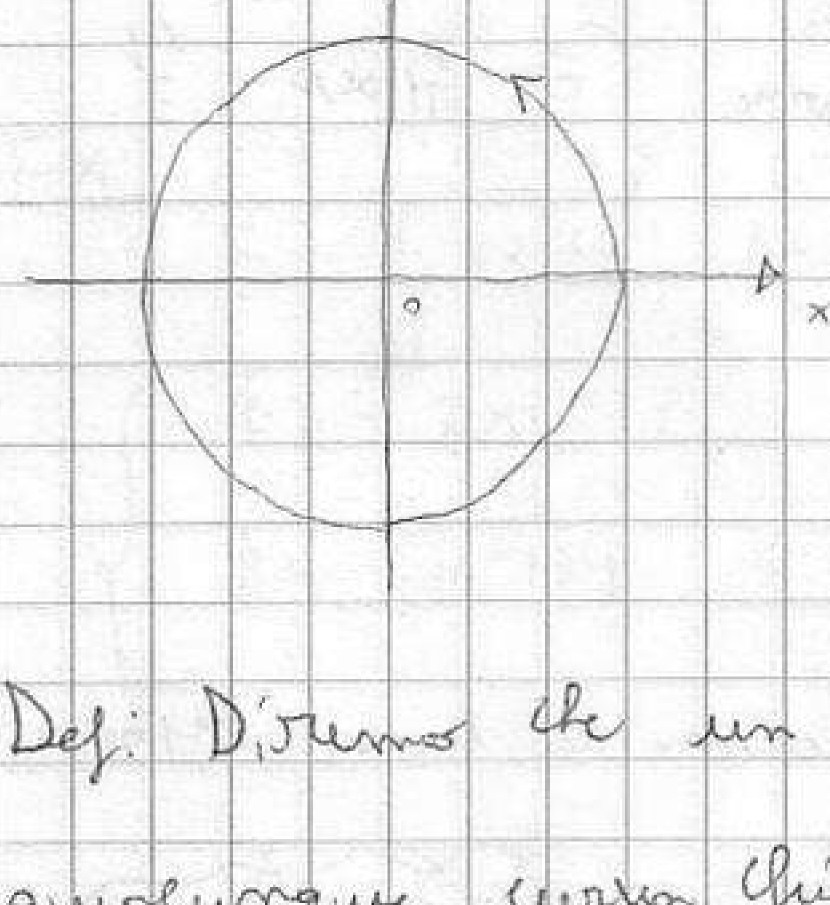
$$= \underline{\int_a^b \big(F_1(x,f(x)) - F_1(x,g(x))\big)\,dx} \quad (1)$$

; Ora calcoliamo l'int. di linea (param. front.) spezzo ∂D in 4 parti, IV e II non danno contributi; $\to \hat{T} = \pm(0,1)$; poiché $\vec{F}_1 = (F_1, 0)$ quando $\vec{F}_1 \cdot \hat{T} = 0$; param I: $\vec{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $t \to (t, f(t))$ · param III: $\vec{r}_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $t \to (t, g(t))$

(il verso non ci interessa, basta cambiare di segno). I: $\int_{+C_1} \vec{F}_1 \cdot \hat{T}\,ds = \int_a^b \big(F_1(x,f(x))\cdot 1 + 0 \dots\big)\,dx$; III: $\int_{+C_3} \vec{F}_1 \cdot \hat{T}\,ds = -\int_a^b \big(F_1(x,g(x))\cdot 1 + 0 \dots\big)\,dx$; sommando I e III si ottiene (1).

Il th. si può applicare nei 2 sensi (dall'int. $\iint$ a $\int_{+C}$ e viceversa)

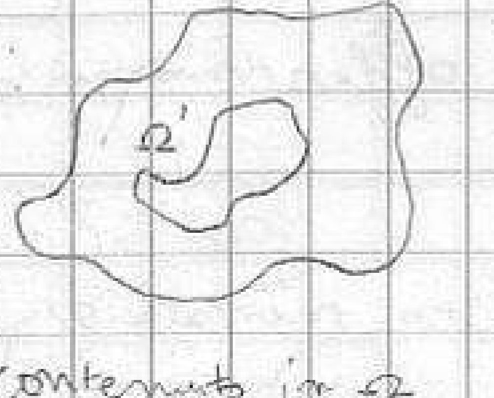
Ex: $\vec{F} = (x^2+y, y^2)$, C = circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 orientata in senso antiorario; det. $\int_{+C} \vec{F} \cdot \hat{T}\,ds$ tramite f. di Green; essendo orientazione giusta

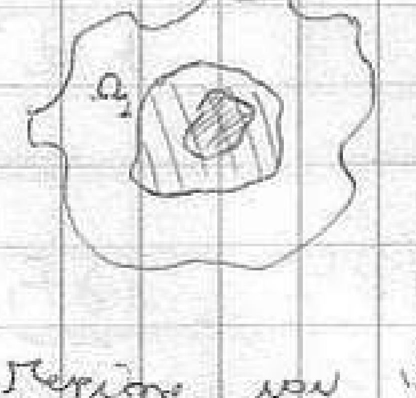


$$= \iint_{B_1(0,0)} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad F_1 = x^2+y \to \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1,\quad F_2 = y^2 \to \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 \quad =$$

$$= \iint_{B_1(0,0)} -1 \;dx\,dy = -\pi$$

Def: Diremo che un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso se una qualunque curva chiusa è la frontiera di un dominio Ω' interamente contenuto in Ω [Dominio non ha buchi]

Ex: 

è sem. conn. perché Ω' è frontiera di regione interamente contenuto in Ω; 

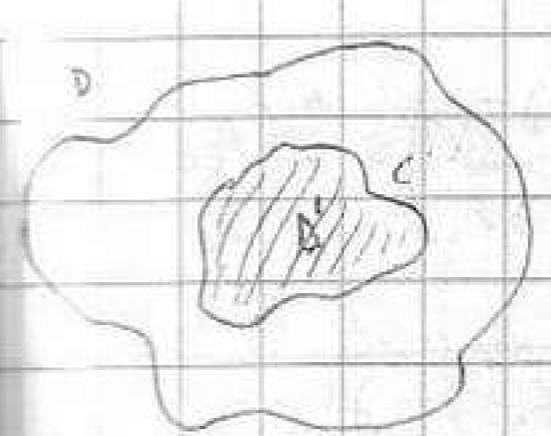
non è sem. conn. Ω_2 è frontiera di regione non interamente c in D

Ex: $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 dove valgono le proprietà:

(1) $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$; (2) D è semplicemente connesso. Th: $\vec{F}$ è CONSERVATIVO

Dim: (usiamo Green) $\vec{F}$ è conservativo $\iff \oint_{+C} \vec{F} \cdot \hat{T}\,ds = 0 \quad \forall\, C$ chiusa

(la circuitazione è $= 0$).



$\forall\, C$ chiusa, sarà $\partial D'$ dove $D' \subseteq D$. Applico f. di Green

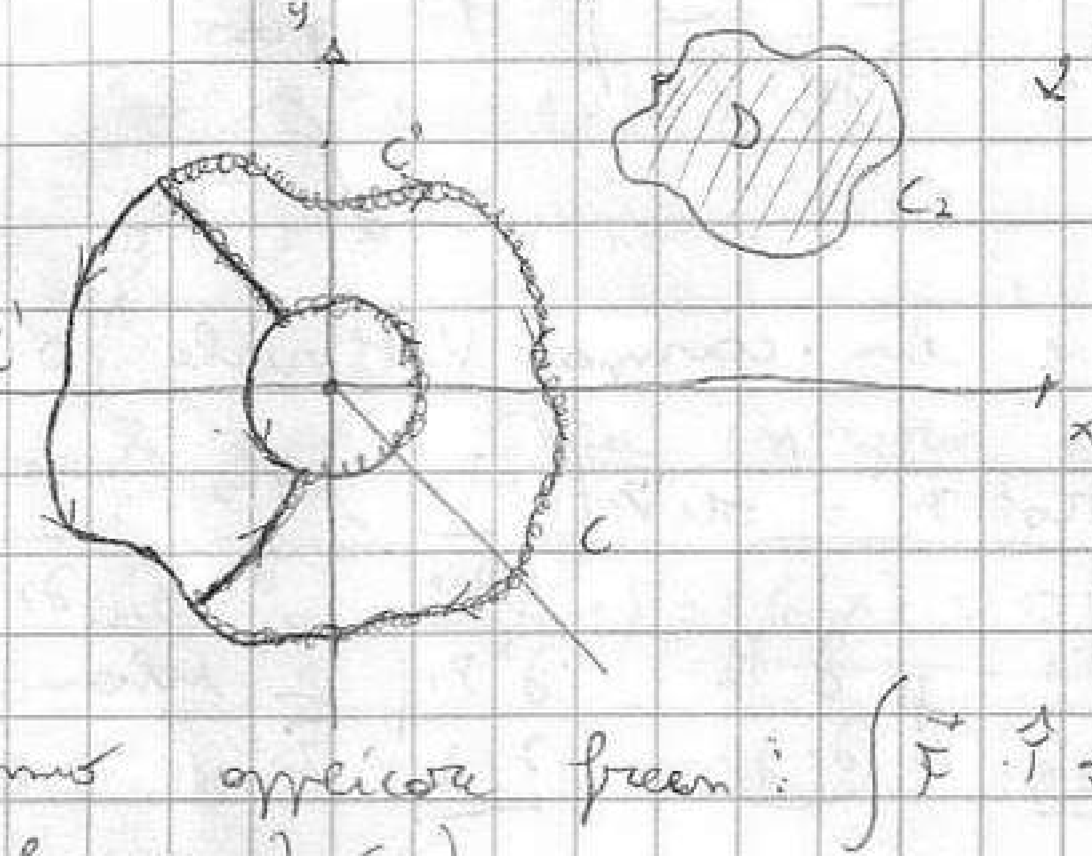
$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = \overset{\text{a orient.}}{\pm} \iint_{D'} \Big(\underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}}_{=0 \text{ per ip. } \textcircled{1}} \Big) dx\, dy = 0$$

$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longrightarrow \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

Usiamo Green per calcolar l'integrale:

$$\oint_{+C} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = \begin{cases} \pm 2\pi & \text{se } C \ni (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



C_1 se $\not\ni (0,0)$ posso prendere semiretta da $(0,0)$ che non interseca dominio. Il campo è conservativo (− semiretta) $\Rightarrow \oint$ è 0. / OPPURE: $D \not\ni (0,0)$, possiamo applicare Green: $\int \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = \iint_D \Big(\underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}}_{=0} \Big) dx\, dy = 0$; In $D' C_2$ è frontiera (D ha come ∂ C_2).

di tutta la regione inclusa l'origine che però è a D'. Avevamo calcolato l'int. nel caso di una circonf. Dim. che vale 2π $\forall$ curva con Green.

Faccio ponti tra circonf. e C_1 (1 per situazione). Con. curva C' e l'altra curva C''; $\int_{+C'} \vec{F} \hat{T}\, ds = 0$ [curva chiusa $\not\ni (0,0)$], $\int_{+C''} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = 0$ (stesso mot.)

Anche la loro somma è 0, $\int_{+C_1 \cup C_2} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = 0$ = int. su C_1 + int. circonf. ("ponti" si annullano) $\rightarrow \int_{+C_1 \cup C_2} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = \int_{+\text{curva}} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds + \int_{\text{circonf.}} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = 0$ Orient. curva è antioraria, circonf. è oraria; $\int_{+\text{curva}} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = - \int_{\text{circonf.}} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds$, se circonf. fosse antioraria i due valori sarebbero $= a\ 2\pi$.

19-5-2005 CAMPI VETTORIALI in $\mathbb{R}^3$

$\vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \rightarrow (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$

Introduciamo gli operatori:

- DIVERGENZA: div, a un C.V associa una funzione
- ROTORE: rot, " " " un altro C.V.

$$\boxed{\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}}$$

; ex: $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longrightarrow (\underbrace{x^2+z}_{F_1}, \underbrace{z^2+x}_{F_2}, \underbrace{yz}_{F_3})$

allora $\operatorname{div} \vec{F} = 2x + 0 + y$

$$\boxed{\text{rot } \vec{F} = \text{det} \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}} = \hat{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

= campo vettoriale con queste componenti: $= \boxed{\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)}$

ex: $\vec{F} = (x, y^2+z, 2z)$; $\text{rot } \vec{F} = (0-1, 0-0, 0-0) = (-1, 0, 0)$

GRADIENTE

$f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ il gradiente associa ad una funzione un campo vettoriale

Legami tra i tre operatori: Lemma: Se $\vec{F}$ è un campo vettoriale di classe C^2 allora $\boxed{\text{div rot } \vec{F} = 0}$, Dim.: $\text{div rot } \vec{F} = \text{div}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \overset{\text{usando}}{=}$ il th. di Schwarz le derivate miste si annullano (f di classe C^2) $= 0$;

Lemma: Se f è una funzione di classe C^2 allora $\boxed{\text{rot } \nabla f = 0}$.

Dim.: $\text{rot } \nabla f = \text{rot}(f_x, f_y, f_z) \rightarrow \text{rot } \nabla f = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \hat{i}(\cancel{f_{zy}} - \cancel{f_{yz}}) - \hat{j}(\cancel{f_{zx}} - \cancel{f_{xz}}) + \hat{k}(\cancel{f_{yx}} - \cancel{f_{xy}})$; sempre per Sc. le derivate miste sono =, quindi ho $(0,0,0)$.

Corollario: Se $\vec{F}$ è un campo vettoriale conservativo di classe C^1 allora $\boxed{\text{rot } \vec{F} = 0}$. Dim.: Se $\vec{F}$ è conservativo, $\vec{F} = \nabla \Phi$, dove Φ è di classe C^2 poiché $\vec{F}$ è di classe C^1. Allora $\text{rot } \vec{F} = \text{rot } \nabla \Phi$, poiché $\Phi \in C^2$, per il lemma precedente $= 0$.

Def.: Dato un campo vettoriale $\vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, un potenziale VETTORIALE di $\vec{F}$ è un campo $\vec{G}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfa la condizione $\boxed{\vec{F} = \text{rot } \vec{G}}$

Corollario: Se $\vec{F}$ è un campo vettoriale di classe C^1 che ammette un potenziale vettoriale allora $\boxed{\text{div } \vec{F} = 0}$. Dim.: supponiamo $\vec{F}$ ammetta un P.V, allora $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$. Applicando div a entrambi ho $\text{div } \vec{F} = \text{div rot } \vec{G} =$

Come determinare un P.V.? Ex:

53) Sia $\vec{F} = (3x^2 + z, -6xy + z^2 + y, -z)$ Verifichiamo cond.

$\text{div}\,\vec{F} = 6x - 6x + 1 - 1 = 0$, vogliamo $\vec{G}$ / $\text{rot}\,\vec{G} = \vec{F}$ $\longrightarrow$

$$\text{rot}\,\vec{G} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = F_1 \; ; \; \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = F_2 \; ; \; \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = F_3$$

sistema di 3 funzioni di 3 variabili con 9 gradi di libertà. Semplifichiamo:

Poniamo $G_2 = 0$ (togliamo 3 gradi di libertà, quelli di G_2)

utilizzo altri 2 gradi di libertà

$$\begin{cases} ① \; \frac{\partial G_3}{\partial y} = 3x^2 + z \\ ② \; \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = -6xy + z^2 + y \\ ③ \; -\frac{\partial G_1}{\partial y} = -z \end{cases}$$

Integriamo

① $G_3 = 3x^2y + zy + \boxed{C(x,z) = 0}$

② Sostituisco G_3: $\frac{\partial G_1}{\partial z} = \frac{\partial G_3}{\partial x} - 6xy + z^2 + y = \cancel{6xy} - \cancel{6xy} + z^2 + y$. Ottengo che

$\frac{\partial G_1}{\partial z} = z^2 + y$. Ora integro e ho $G_1 = \frac{z^3}{3} + yz + C(x,y)$. ③ $-z - C_y(x,y) = -z$

ottengo $C(x,y) = \boxed{C(x) = 0}$ → brucio l'ultimo grado di libertà.

$$\begin{cases} G_3 = 3x^2y + zy \\ G_2 = 0 \\ G_1 = \frac{z^3}{3} + yz \end{cases}$$

H

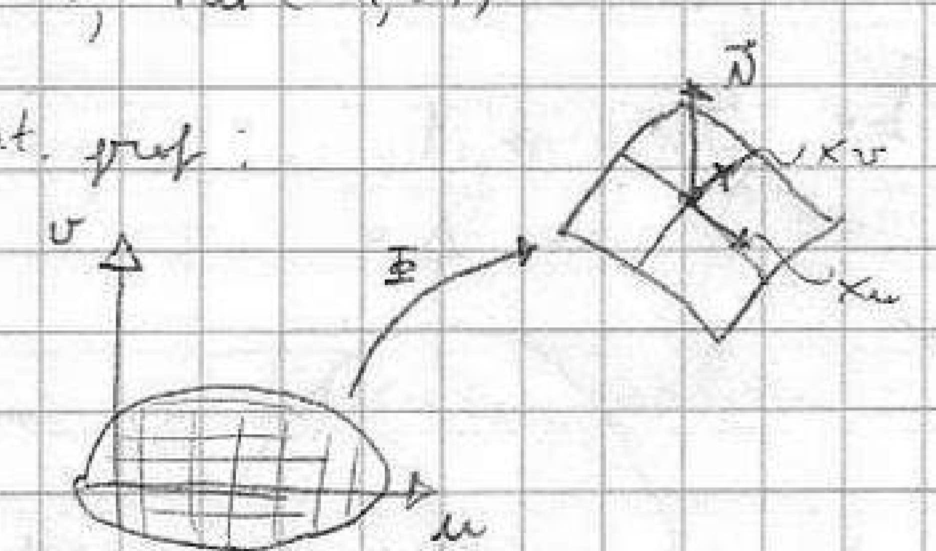
Una SUPERFICIE PARAMETRICA è $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (è una MAPPA)

$(u,v) \longrightarrow (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

Posso associare vettori tangenti: $\vec{X_u} = (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v))$ e

$\vec{X_v} = (x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v))$

Int. graf.:



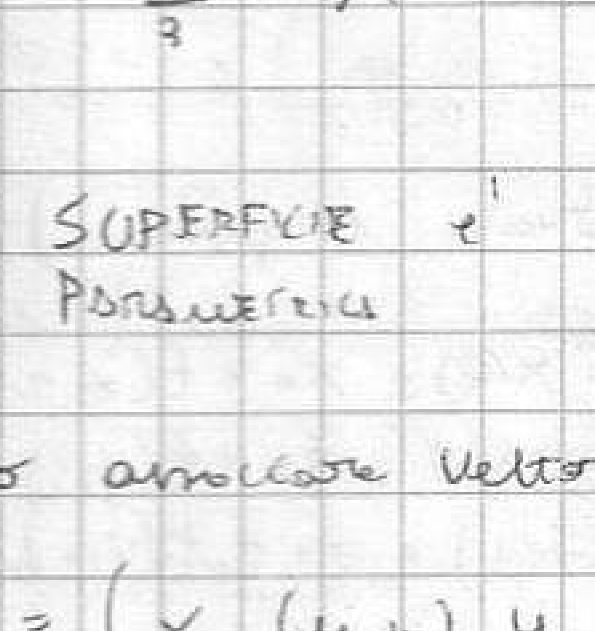
Con 2 vettori tan e indip. determiniamo il vett.

$\perp$ ai due: $\vec{N} = \vec{X_u} \times \vec{X_v}$. Supporremo che

X_v e X_u siano linearmente indipendenti ($\times$ parlare di $\vec{N}$).

Es: $\Phi: [0, 2\pi] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ [cilindro raggio 2 e h = 1]

$(\theta, z) \rightarrow (2\cos\theta, 2\sin\theta, z)$



$\vec{X_\theta} = (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0)$

$\vec{X_z} = (0, 0, 1)$

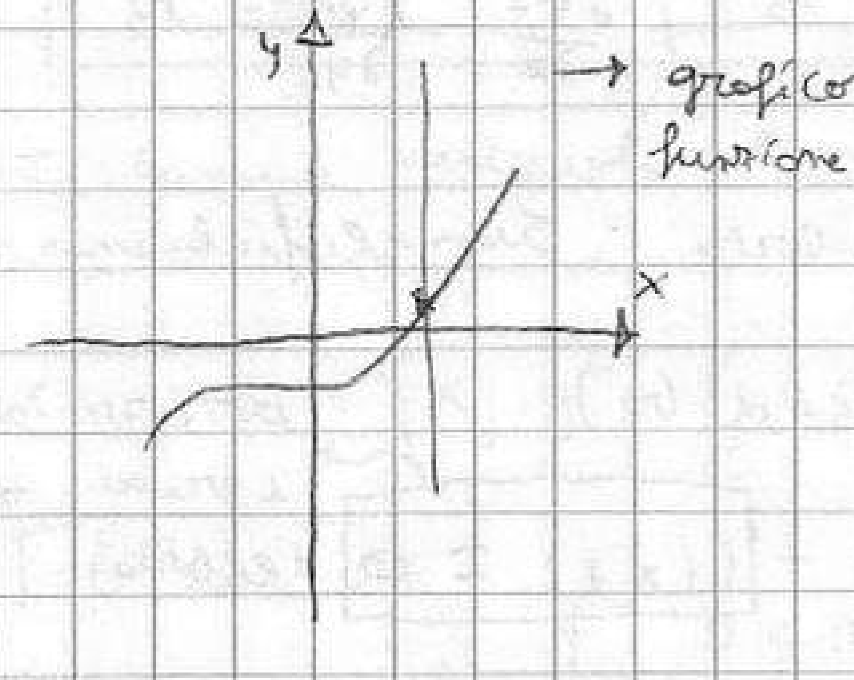
$$\vec{N} = \vec{X_\theta} \times \vec{X_z} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2\sin\theta & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$$

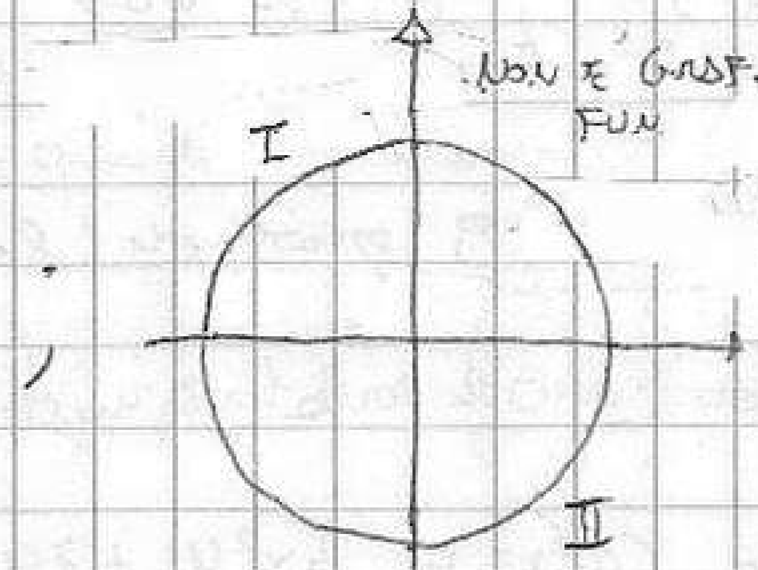
non ha nessuna proiezione su asse z.

SUPERFICI CARTESIANE, i grafici delle $f(x,y)$.

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Costruiamo una $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u,v) \rightarrow (u, v, f(u,v))$

$x_u = (1, 0, f_u)$; $x_v = (0, 1, f_v)$ $\to \vec{N} = \vec{x}_u \times \vec{x}_v = (-f_u, -f_v, 1)$.





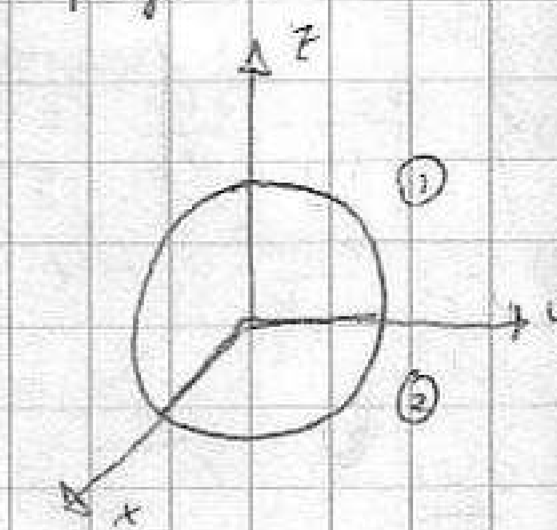
NON È GRAF. FUN $\to$ posso però metterla in due curve che sono grafici di funzioni

I: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; II $g(x) = -f(x)$

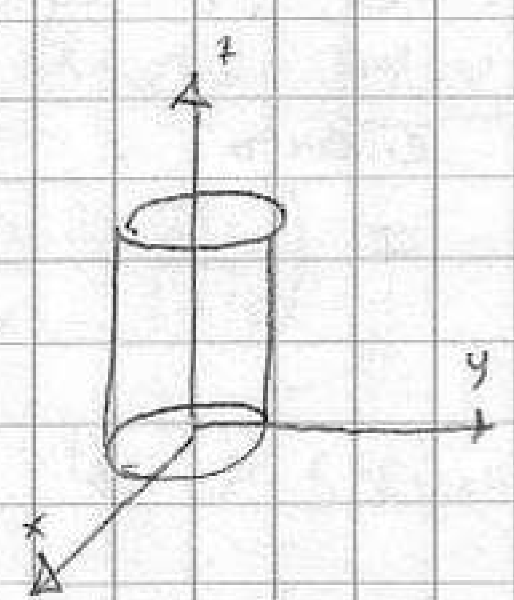
Lo stesso con le superfici

Divido la sfera in due semisfere $\to z^2 = 1 - x^2 - y^2$

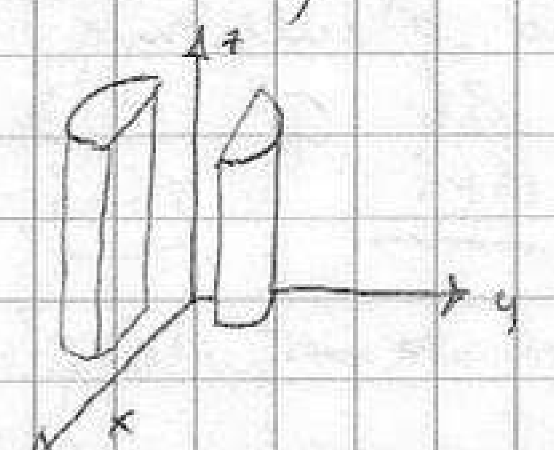
① $z = +\sqrt{1-x^2-y^2}$; ② $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$



Ex: cilindro, lo taglio a metà in xz



$\to$



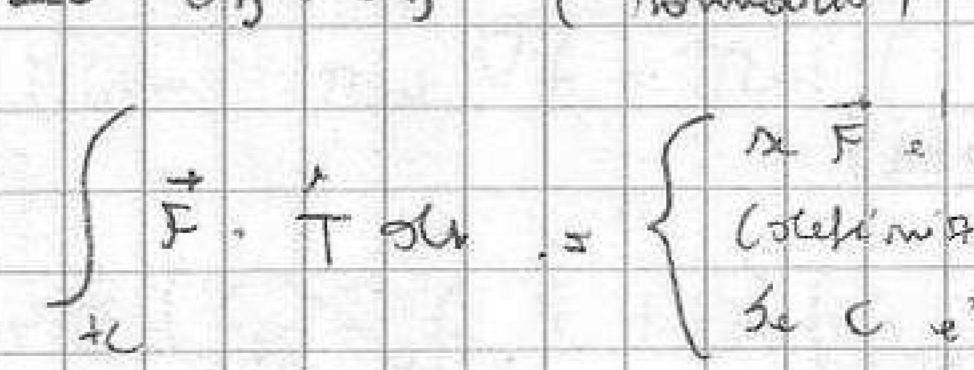
---

23 - 05 - 05 (sommario)

$$\int_{+C} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = \begin{cases} \text{se } \vec{F} \text{ è conservativo: } \Phi(P_1) - \Phi(P_2) \quad \text{(param. segmento)} \\ \text{(definizione)} \\ \text{se } C \text{ è chiusa} \to \text{formule di Green} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \oint_{+C} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy \qquad \begin{cases} x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$$

Ex. 7 3 4 n. 1



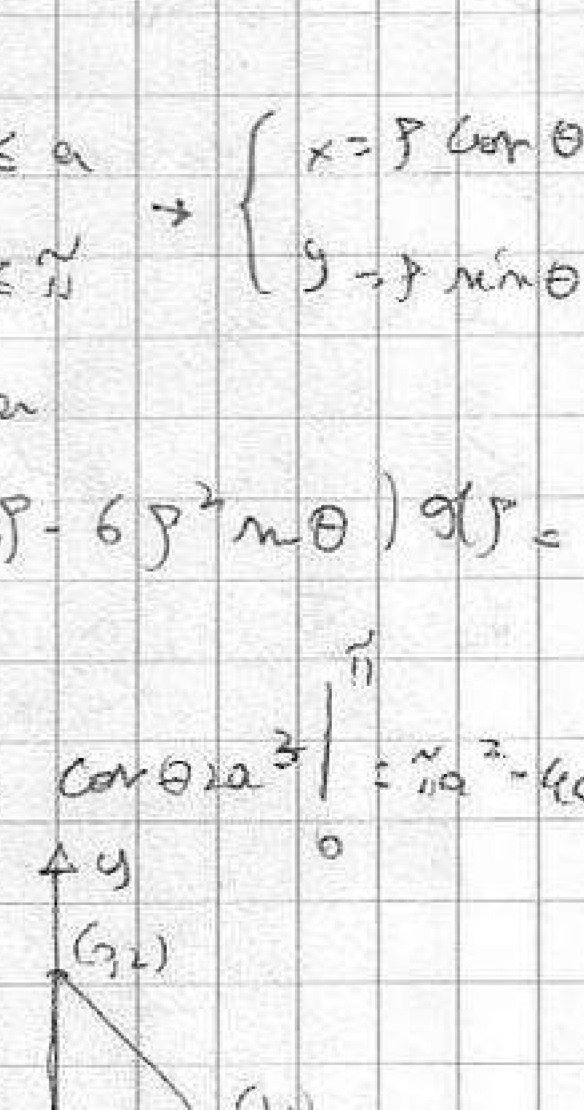
$$\vec{F} = (\sin x + 3y^2, \ 2x - e^{-y^2})$$

$$\hookrightarrow \iint_D (2 - 6y)\, dx\,dy \qquad D = \begin{cases} 0 \le \rho \le a \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases} \to \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^a (2 - 6\rho\sin\theta)\rho\, d\rho = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a (2\rho - 6\rho^2 \sin\theta)\, d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \left[\rho^2 - 2\rho^3 \sin\theta\right]_0^a = \int_0^{\pi} (a^2 - 2a^3 \sin\theta)\, d\theta = \pi a^2 + \cos\theta\, 2a^3 \Big|_0^{\pi} = \pi a^2 - 4a^3$$

Ex. 3 $\quad \vec{F} = (x \sin y^2 - y^2, \ x^2 y \cos y^2 + 3x)$



$$\oint_{+C} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$

D: dom. normale

$$\begin{cases} x \in [0, 1] \\ y \in [x-2, 2-x] \end{cases}$$

$$\int_0^1 dx \int_{x-2}^{2-x} (\cancel{2xy\cos y^2} + 3 - \cancel{2xy\cos y^2} + 2y)\, dy = \int_0^1 dx \int_{x-2}^{2-x} (3 + 2y)\, dy =$$

55

$$= \int_0^1 dx \left[3y + y^2\right]_{x-2}^{2-x} = \int_0^1 (3(2-x) + (2-x)^2 - 3(x-2) - (x-2)^2)\, dx = \int_0^1 (-3x + 6 - 3x + 6)\, dx = \int_0^1 12 - 6x\, dx = 9$$

Ex. 5 (Cenno intorno F. di Green - connesso in calcolo aree)

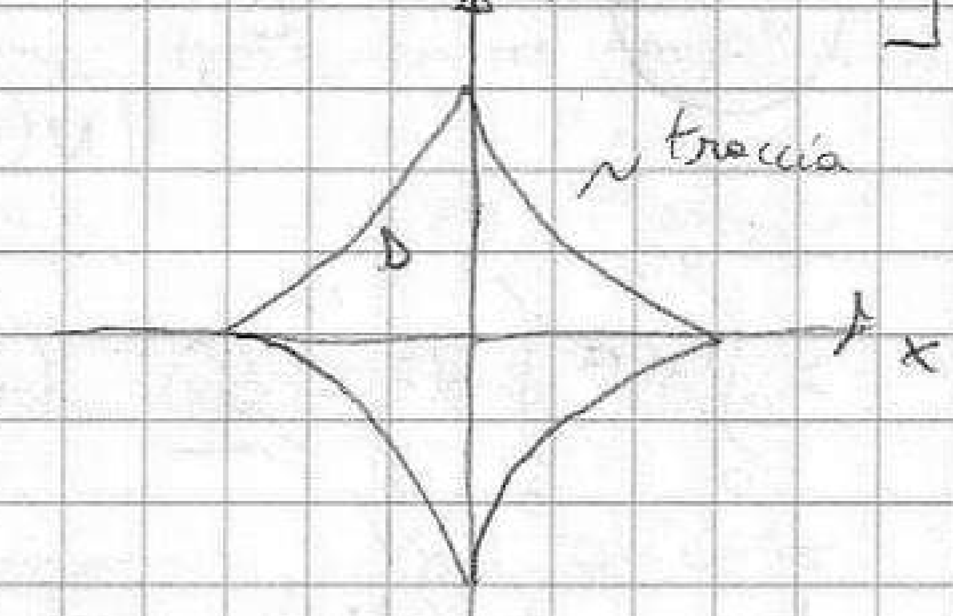
$\text{Area}(D) = \iint_D dx\,dy$. Se $\exists\, \vec F \,/\, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$, allora l'int $= \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\,dy =$

=, per Green, $= \oint_{+C} \vec F \cdot \hat T\, ds$ dove C è ∂D. (ex: $\vec F = (0, x)$) $\Rightarrow$

$\text{Area}(D) = \oint_{+C} (0,x)\cdot \hat T\, ds$ → applicazione all'asteroide:

$\vec r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$\theta \to (a\cos^3\theta, b\sin^3\theta)$

Vogliamo area contenuta nella curva $[\vec F = (0,x)]$



$\text{Area}(D) = \oint_{+C} \vec F \cdot \hat T\, ds = \int_0^{2\pi} a\cos^3\theta \cdot 3b\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta =$

$\int_0^{2\pi} 3ab\cos^4\theta\sin^2\theta\, d\theta = 3ab\int_0^{2\pi}$ [Come calcolare int. di $\cos^{2n}\, d\theta$: $\cos^2\theta = \cos 2\theta + \sin^2\theta \to$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \to \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \to \cos^2\theta = \cos 2\theta + 1 - \cos^2\theta \to 2\cos^2\theta =$

$\cos 2\theta + 1$; se era $\cos^4\theta \to (\cos^2\theta)^2$, applicazione ricorsiva; $\cos^4\theta =$

$(\cos^2\theta)^2 = \left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right)^2 = \frac{\cos^2 2\theta + 1 + 2\cos 2\theta}{4} = \left(\frac{\cos 4\theta + 1}{2} + 1 + 2\cos 2\theta\right) / 4$]

$= 3ab\int_0^{2\pi} (\cos^4\theta - \cos^6\theta)\, d\theta \quad [\cos^6\theta = (\cos^2\theta)^3]$

$\vec F = (F_1(x,y), F_2(x,y))$
$\vec r : [a,b] \to \mathbb{R}^2$
$t \to (x(t), y(t))$

$\int_{+C} \vec F \cdot \hat T\, ds = \int_a^b \big(F_1(x(t),y(t))\, x'(t) + F_2(x(t),y(t))\, y'(t)\big)\, dt$

Se al posto di $\vec r$ si usasse una equivalente allora l'int. rispetto alla nuova curva era uguale se aveva stessa orientazione, opposto con dr diversa.

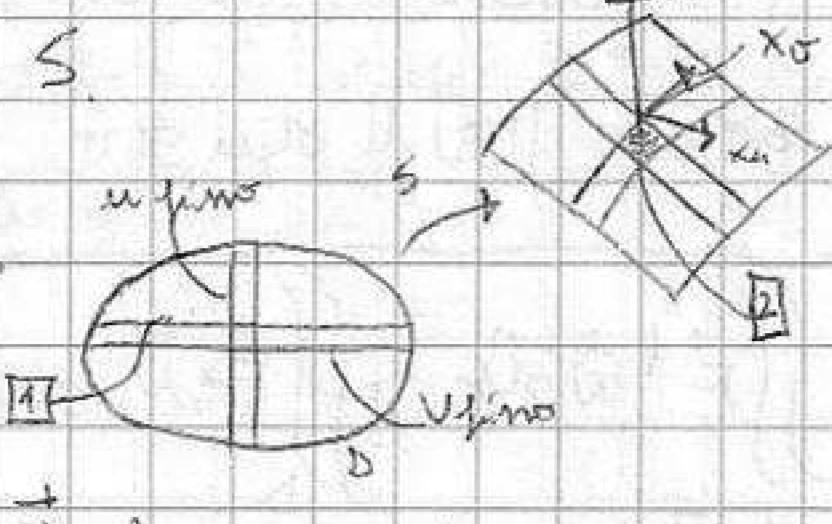
25-5-2005

SUPERFICIE REGOLARE: è una mappa $S: \bar D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa. (D: rett., cerchio, ellisse...)
$(u,v) \to (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

① $x, y, z \in C^1(D)$; ② S è iniettiva; ③ x_u, x_v sono indipendenti

L'immagine di S sarà la TRACCIA della superficie S.

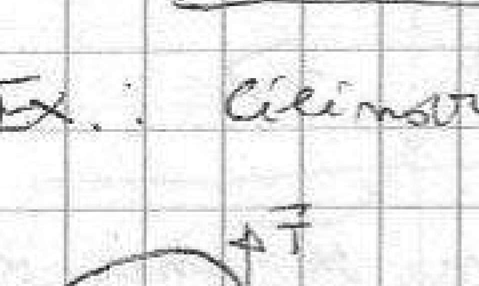
(oggetto bidimensionale in $\mathbb{R}^2$) ① Non ci sono "incrinature", la sup. è liscia; ② la sup. non si autointerseca; ③ $\exists$ un vett. $\perp$ a S. $\vec N = x_u \times x_v$ è $\perp$ a $x_u, x_v \Rightarrow \vec N \perp$ al piano tangente



(x_u: fisso v e viceversa). Usiamo $\vec N$ per def. l'area(S). Se faccio altre curve // [II] ha $\boxed{R}$ approx. all'area del parallelogramma generato da x_u, x_v, dato da $\|x_u \times x_v\| = \|\vec N\|$, area totale è somma rettangoli. $\boxed{R} = R_{ij}$

$\Rightarrow$ Area $(S) = \sum$ area (R_{ij}). Al limite, $\xrightarrow{\sim}$ $\boxed{\iint_D \|\vec N(u,v)\|\,du\,dv}$. [Def.]

Ex.: Cilindro; param. $S: [0,2\pi]\times[0,2] \to \mathbb{R}^3$, $(\theta,z)\to(\cos\theta,\sin\theta,z)$, $\vec N(\theta,z)=(\cos\theta,\sin\theta,0)$



[$\vec N$ ha stessa dir. raggio, quindi ha stesse coordinate]

$\|\vec N(\theta,z)\| = \sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=1$, Area (cil.) $=\iint_{[0,2\pi]\times[0,2]} 1\,d\theta\,dz =$

$= \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 dz = \underline{4\pi}$ (in accordo con $2\pi r\cdot h$).

Non è iniettiva, ma non è necessario che lo sia al di fuori della ∂D.

SUPERFICI CARTESIANE: è una $S: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $(u,v)\to(u,v,f(u,v))$ dove $f: D\subseteq \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ → [rispetto a piano xy]

∃ casi di $S: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $(u,v)\to(u,f(u,v),v)$ → [risp. a xz]

$\vec N = (-f_u,-f_v,1)\to\|\vec N\|=\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}$. Quindi $A(S.\text{cart.})=\iint_D\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}\,du\,dv$

Si può cons. l'int. SUPERFICIALE fun.

Sia S traccia sup. regolare. Sia $f:[S]\to\mathbb{R}$

Allora l'INTEGRALE SUPERFICIALE di S lungo la traccia è

$$\boxed{\iint_{[S]} f\,d\sigma = \iint_D f(\underbrace{r(u,v)}_{\text{param. interna}})\,\|\vec N(u,v)\|\,du\,dv}$$

Questo int ∄ da param. scelta [come per curve e int. di linea]

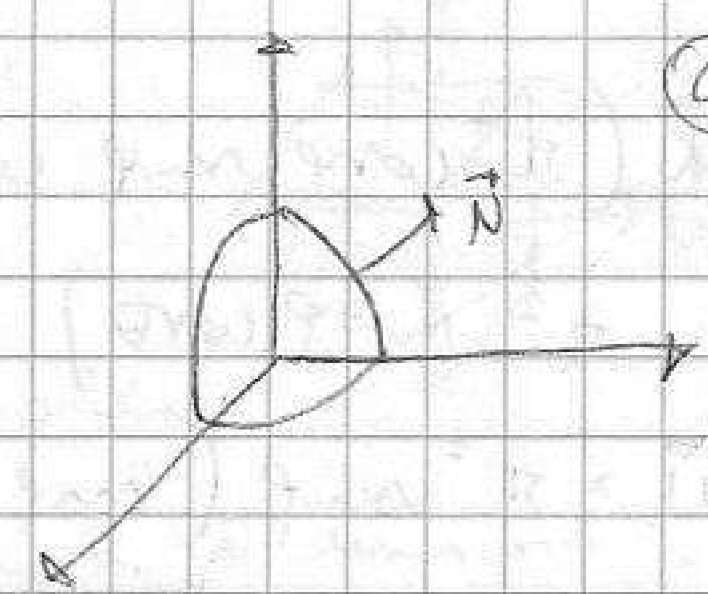
FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

Sia $S: D\subseteq\mathbb R^2\to\mathbb R^3$ sup. regolare e $[S]$ la sua traccia. Sia $\vec F$ (campo vettoriale): $\Omega\subseteq\mathbb R^3\to\mathbb R^3$ continuo con $[S]\subseteq\Omega$. Sia $\hat N$ (il vettore normale normalizzato) $=\vec N/\|\vec N\|$. Allora il FLUSSO del c.v. $\vec F$ attraverso la superficie S è def. come $\iint_{[S]}\vec F\cdot\hat N\,d\sigma$. L'elemento $d\sigma=\|\vec N\|\,du\,dv$, quindi → $\iint_{[S]}\vec F\cdot\hat N\,d\sigma = \iint_{[S]}\vec F\cdot\frac{\vec N}{\|\vec N\|}\|\vec N\|\,du\,dv$ → si ha

$$\boxed{\iint_{[S]}\vec F\cdot\hat N\,d\sigma=\iint_D\vec F\cdot\vec N\,du\,dv}$$

(57) Ex.: Sia $S: B_{(0,1)}\subseteq\mathbb R^2\to\mathbb R^3$, $(x,y)\to(x,y,1-x^2-y^2)$ (sup. cartesiana). La traccia

è un paraboloide $z = 1-x^2-y^2$. Sia $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \to (2x, y, z)$ (4)



Voglio il flusso, $\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1) =$
$= (2x, 2y, 1)$ punta verso l'alto. Quando S è data da funz. non ci sono problemi per $\vec{N}$

$$\iint_D \vec{F} \cdot \vec{N} \, du\, dv \Rightarrow [\vec{F} \cdot \vec{N}] = \underbrace{(2x, y, 1-x^2-y^2)}_{\vec{F} \text{ ristretto a } S} \cdot (2x, 2y, 1) = 4x^2+2y^2+1-x^2-y^2 =$$
$$3x^2+y^2+1 \to \iint_{[S]} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iint_{B_1(0,0)} (3x^2+y^2+1)\, dx\, dy$$

Ex: $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \to (y^2, x\sin(yz), z^2+3x)$ Vogliamo $\int_{[S]} \vec{F} \cdot \hat{N} \, d\sigma$ [S è semisfera]

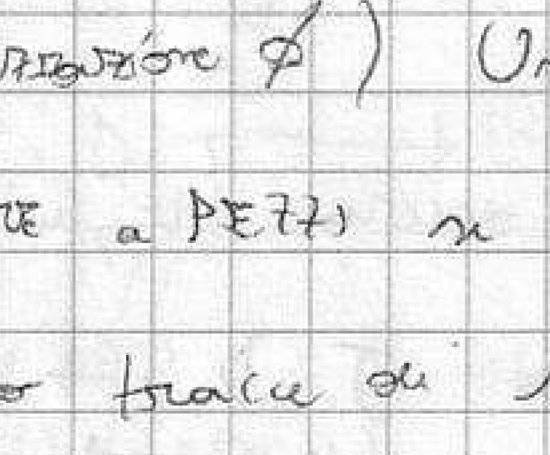
$$\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1) = \left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right); \vec{F}(S) = \left(y^2, x\sin\left(y\sqrt{1-x^2-y^2}\right), 1-x^2-y^2+3x\right)$$

$$\underbrace{\vec{F} \cdot \vec{N}}_{G(x,y)} = \frac{y^2 x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \to ① + \frac{xy \sin\left(y\sqrt{1-x^2-y^2}\right)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \to ② + 1-x^2-y^2+3x \to ③$$
; per calcolare il flusso $\iint_{B_1(0,0)} g(x,y)\, dx\, dy$; ① e ② non danno contributi perché dom. è simm. sia rispetto a x che a y; ① è DISPARI risp. a x

$g①(x,y) = -g①(-x,y) \Rightarrow \iint g① = 0$, ② lo stesso: $g②(x,y) = -g②(-x,y) \Rightarrow$
$\iint g② = 0$. È suff. che sia dispari risp. a 1 variabile e il D sia simm. rispetto a quella variabile; $\iint_{B_1} g(x,y)\,dx\,dy = \iint_{B_1(0,0)} (1-x^2-y^2)\, dx\, dy$

(generalizzazione ϕ) Una regione bidimensionale in $\mathbb{R}^3$ è una SUPERFICIE REGOLARE a PEZZI se può essere decomposta in n sottoregioni $S_1, S_2 \dots S_n$ che sono tracce di superfici regolari.

Ex: CUBO



Ogni faccia è param.: $D = [0,1] \times [0,1]$ x (es x 1 faccia) Superficie
$(y,z) \to (1, y, z)$
Cartesiana; $f(y,z) = 1$

$$\vec{N}: \quad x_y = (0,1,0); \; y_z = (0,0,1) \; ; \; P.V \to \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0)$$

26 - 5 - 2005 Ex: calcolo flusso sup. non cartesiana

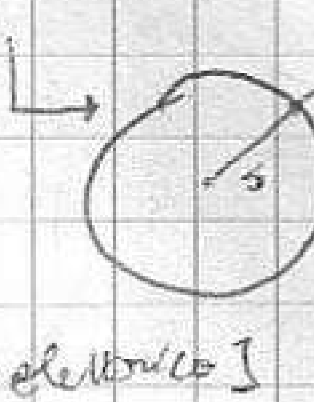
Sia $S: [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $(\varphi, \theta) \to (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$ ($r>0$ e fisso) [N:] $x_\varphi = (r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, -r\sin\varphi)$; $x_\theta = (-r\sin\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\cos\theta, 0)$, $\vec{N} = X_\varphi \times X_\theta =$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (\longrightarrow)$$

$\hat{k}\left(r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\right) + \hat{j}\left(r^2\sin\varphi^2\sin\theta\right) + \hat{i}\big(\ldots$

$\ldots r^2\sin^2\varphi\cos\theta\big) = \vec{k}\left(r^2\cos\varphi\sin\varphi\right) + \hat{j}\left(r^2\sin\varphi^2\sin\theta\right) + \hat{i}\left(r^2\sin\varphi^2\cos\theta\right)$

$\vec{N} = r^2\sin\varphi\underbrace{\left(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi\right)}_{\frac{1}{r}S(\varphi,\theta)} \to \vec{N}$ è multiplo di S. Prendiamo



un c.v. $\vec{F}: \mathbb{R}^3\setminus\{0,0,0\} \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \to \left(\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\right)$ [campo elettrico]

Calcoliamo $\oiint_{[S]} \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma = \iint_D \vec{F}\cdot\vec{N}\,d\varphi\,d\theta$, $\vec{F}_{sfera} = \left(\frac{r\cos\theta\sin\varphi}{r^3}, \frac{r\sin\theta\sin\varphi}{r^3}, \frac{r\cos\varphi}{r^3}\right)$; $\vec{F}_{sfera}\cdot\vec{N} = \sin^2\varphi\cos\theta\cos\theta\sin\varphi + \sin^2\varphi\sin\theta\sin\theta\sin\varphi +$

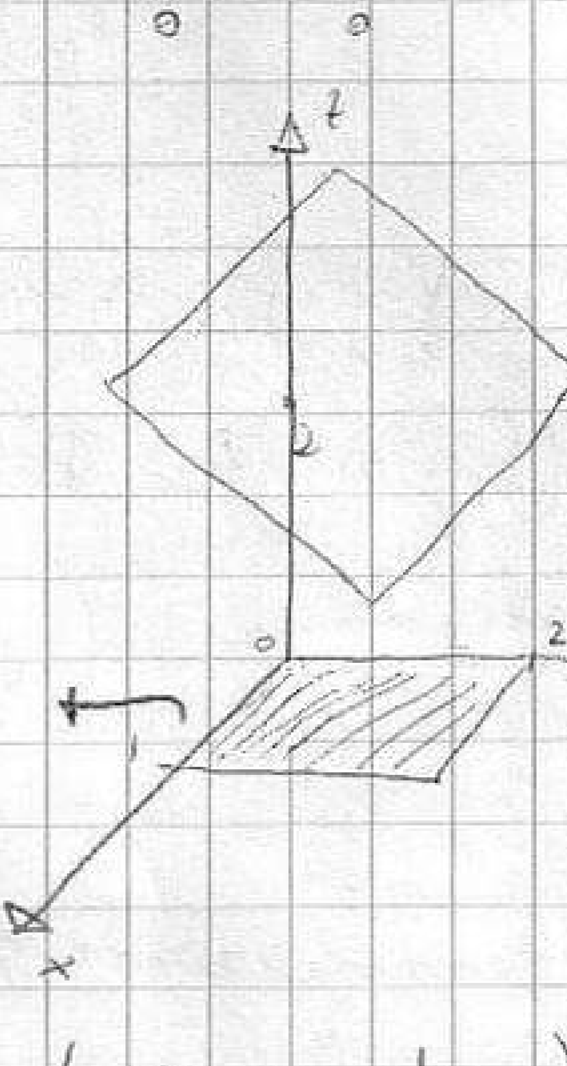
$+ \sin\varphi\cos\varphi\cos\varphi = \sin^3\varphi\cos^2\theta + \sin^3\varphi\sin^2\theta + \sin\varphi\cos^2\varphi = \sin\varphi^3 + \sin\varphi\cos\varphi^2$

$\sin\varphi\left(\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2\right) = \sin\varphi$; $\oiint_{[S]}\vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma = \iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]}\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta = \int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\theta$

$2\pi\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi = \underline{4\pi}$ ($\propto$ r. sfera)

Ex: flusso sup. cartesiana $S: \underset{[\Delta]}{[0,1]\times[0,2]} \to \mathbb{R}^3$
$(u,v) \to (u, v, u+2)$

È univocamente orientata la dir. di $\vec{N}$: $x_u \times x_v = (1,0,1)\times(0,1,0) = (-1,0,1)$



Proiezione su xy del piano ristretto a D

Voglio param. S / $\vec{N}$ ha orientazione opposta.

$\tilde{S}$ [basta cambiare ordine x_v e x_u]: $D' \to \mathbb{R}^3$
$(u',v') \to (v', u', f(v',u'))$ ovvero $(v', u', v'+2)$

immagine è sup. $z = x+2$, $D' = [0,2]\times[0,1]$; ho mappa $J: D \to D'$
$(u,v) \to (v,u)$

$u' = v$; $v' = u$

CAMBIO VARIABILI: $u' = f(u,v)$; $v' = g(u,v)$. La matrice Jacobiana della trasformazione è $\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to$ det. matrice è NEGATIVO, ciò nega orient.

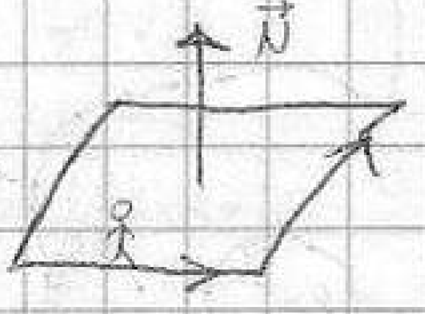
Traccia $\tilde{S} = S$. Calcoliamo $\vec{N}$ per $\tilde{S}$; $\vec{x_{u'}} = (0,1,0)$; $\vec{x_{v'}} = (1,0,1)$

$\vec{N} = \vec{x_{u'}} \times \vec{x_{v'}} = (1,0,-1) = -\vec{N}_S$. Se voglio param. con dir. $\tilde{\vec{N}} = -$dir $\vec{N}$ basta scambiare i parametri.

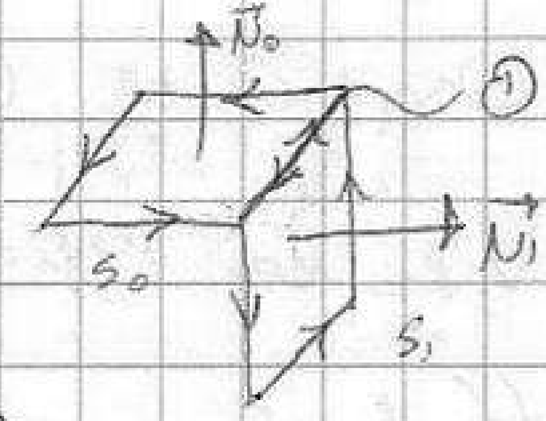
[FLUSSO di C.V. attraverso SUPERFICI REGOLARI a PEZZI], SUPERFICI ORIENTABILI:

(59) Sia S: sup. regolare a pezzi, x semplicità, $S = S_0 \cup S_1$. Sono immagini

di param. regolare ⇒ definiamo $\vec{N}_0$ e $\vec{N}_1$. Il vett. normale

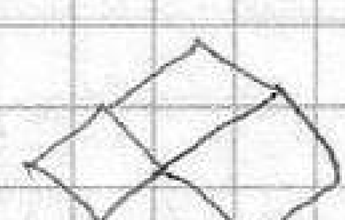


induce un' ORIENTAZIONE sulla frontiera.

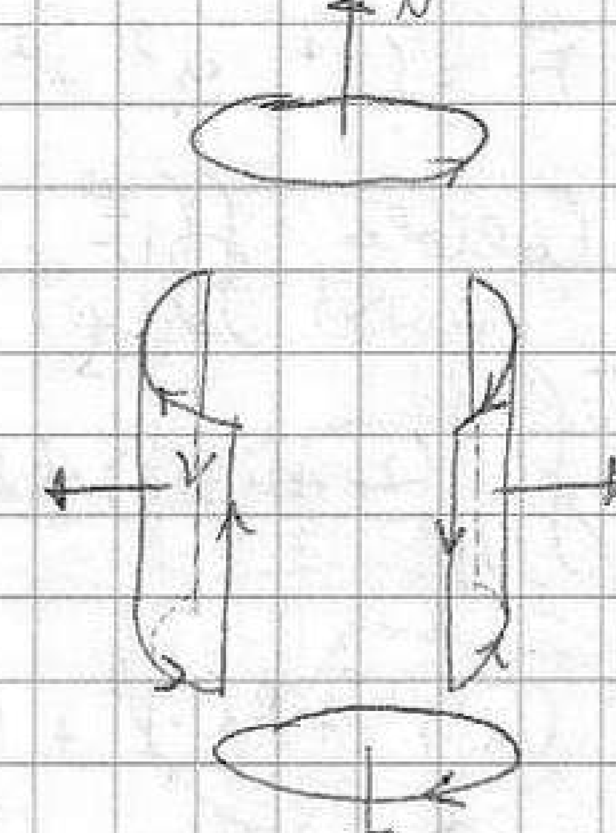


"Omino" camminando lascia dominio alla sua dx → direzione superficie. Lo stesso per S_1. I due pezzi si uniscono in ①, rispetto a $\vec{N}_0$, ① ha una dir, risp. a $\vec{N}_1$ ② ha dir. opposta. Una superficie COMPOSTA è ORIENTABILE se è possibile scegliere un' orientazione su ciascuna componente in modo che le orientazioni indotte sulla curva dalle componenti che si uniscono lungo tale curva sono opposte.

Ex:



le due sup. inducono sulla curva due orientazioni opposte. [Il CUBO è superficie orientabile]



Il CILINDRO è una sup. composta orientabile. (Composta da mant., las sup. e las inf., né è l'U). Ogni pezzo è sup. regolare. Spezzando ulteriormente il cilindro in superfici cartesiane. Devo lasciare dom. alla dx.

Ex: CUBO (vedi sul libro). Non tutte le superfici sono orientabili.

TH. DELLA DIVERGENZA: Sia $\overset{\circ}{D}$ dominio regolare (dominio che è unione di domini che sono x-semplici, y-semplici, z-semplici). Sia $\vec{F}$ un C.V. $: D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \in C^1$. Sia $[S] = \partial D$ (unione di sup. regolari a pezzi)

Si ha:

$$\boxed{\oiint_{[S]} \vec{F} \cdot \hat{N} \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dx\, dy\, dz}$$

Ex: $\vec{E} = \left(\dfrac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \dfrac{y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \dfrac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \right)$, $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} \right) +$

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \right) = \overset{(1° \text{ comm.})}{(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + x\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x} =$

$= (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$, espr. analoga per y e z. Si ha che

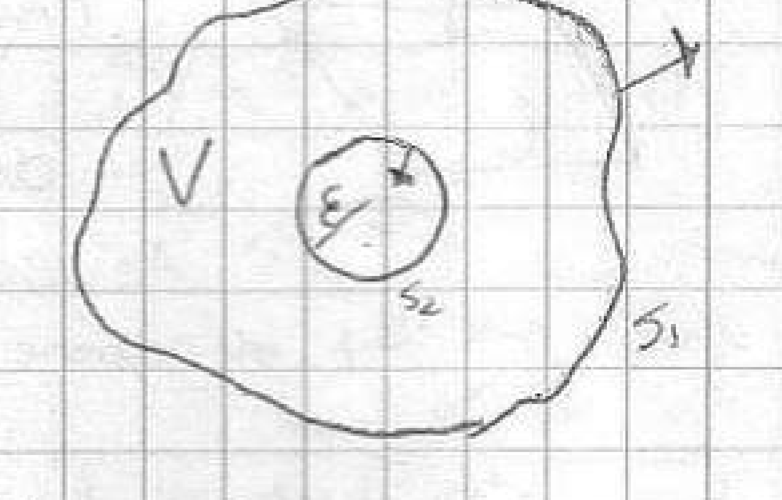
$\operatorname{div} \vec{E} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} + (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} + (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$; sommando si ottiene

$3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(-3x^2-3y^2-3z^2)$, i termini sono

uguali $3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = 0$

Applico th. Conv. sup. chiusa $[S_1] \not\ni (0,0,0)$. Cons. sfera di raggio ε $[S_2]$

V è la regione tra le due sup. Per il th. div,



$$\oiint_{[S]} \vec{E}\cdot\hat{N}\,d\sigma = \iiint \operatorname{div}\vec{E}\,dx\,dy\,dz = 0 \quad \text{Quindi}$$

$[S] \hookrightarrow = [S_1]\cup[S_2]$ $\quad \oiint_{[S]} \vec{E}\cdot\hat{N}\,d\sigma = 0 \rightarrow$ è somma

dei due contributi delle superfici: $\oiint_{[S_1]} \vec{E}\cdot\hat{N}\,d\sigma + \oiint_{[S_2]} \vec{E}\cdot\hat{N}\,d\sigma = 0 \rightarrow$ si

ha che $\oiint_{[S_1]} \vec{E}\cdot\hat{N}\,d\sigma = -\oiint_{[S_2]} \vec{E}\cdot\hat{N}\,d\sigma$; ho già calcolato il 2 termine (flusso

sfera), avendo S_1 e S_2 normali opposte, il flusso di qualsiasi sup. $= 4\pi$.

30-5-2005 Ex. 5 p. 7.4

$\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$; $B_3(2,0,3) \rightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 \leq 9$ $\left[B \text{ gen.} = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq\right.$

Calcolo $\oiint_{[S]} \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma$ (per il th. div.) $= \iiint_{B_3(2,0,3)} \operatorname{div}\vec{F}\,dV$, $\operatorname{div}\vec{F} = 2x + 2y + 2z$

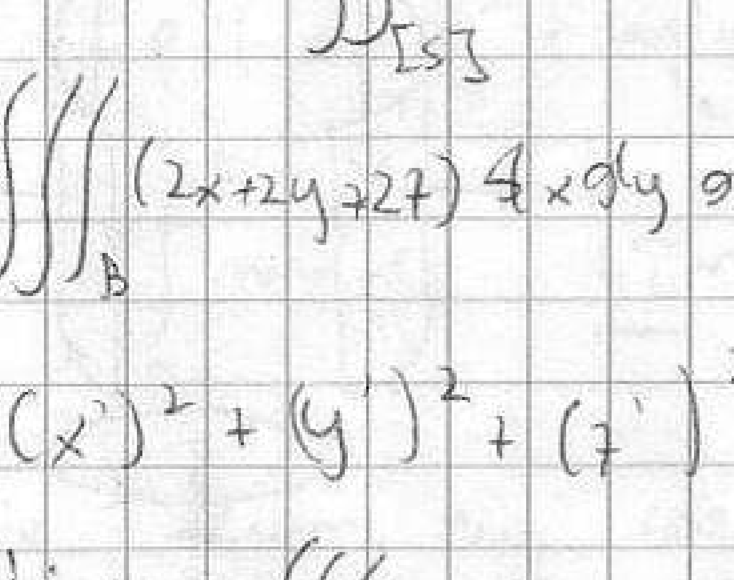
$\iiint_B (2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz$. Applichiamo trasf. $\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y \\ z' = z-3 \end{cases}$ la nuova sfera è

$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \leq 9$ $\left[B_3(0,0,0)\right]$ $\hookrightarrow \begin{cases} x = x'+2 \\ y = y' \\ z = z'+3 \end{cases}$

L'int: $\iiint_{B_3(0,0,0)} \left(2(x'+2) + 2y' + 2(z'+3)\right) dx'\,dy'\,dz'$; sfruttiamo simmetria $\iiint_{B_3(0,0,0)} 2x'\,dx'\,dy'\,dz'$

0; stesso per $2y'$ e $2z'$, si ha $\iiint_{B_3(0,0,0)} 10\,dx'\,dy'\,dz' = 10\,\mathrm{Vol}(B_3(0,0,0)) = 360\pi$

Ex. 11 p. 7.4 Cono alto b e r. base $= a$

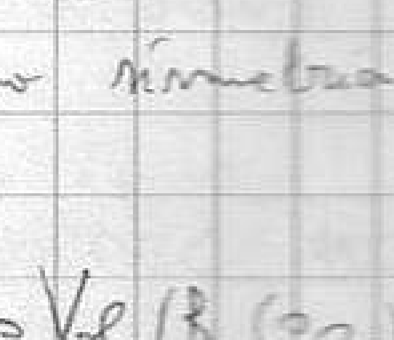


$\vec{F} = \left(x+y^2,\ 3x^2y + y^3 - x^3,\ z+1\right)$ Calcolo $\iint_{[S]} \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma$

uscente dal mantello del cono. Possiamo dire che

$$\iiint_{\text{cono pieno}} \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \left[\oiint_{[S_{tot}]} \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma\right] \longrightarrow \iint_{[S\,lat]} \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma + \iint_{[base]} \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma$$

$$\longrightarrow \iint_{[S\,lat]} \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma = \overset{①}{\iiint_{\text{cono pieno}} \operatorname{div}\vec{F}\,dV} - \overset{②}{\iint_{Base} \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma}$$; ① $\underline{\operatorname{div}\vec{F} = 1 + 3x^2 + 3y^2 + 1} =$



$\underline{2 + 3(x^2+y^2)}$. Esprimo dom. in coord. cilindriche [Cono è

ottenuto ruotando triangolo intorno asse z], p.to $P(R,z)$; $z : (a-R) = b : a \rightarrow$

$\underline{z} = (a-R)\,\frac{b}{a} = b - \frac{b}{a}R \rightarrow \underline{z = -\frac{b}{a}R + b}$, Cono pieno in coord.

cilind. $\left\{(\theta, R, z) \,/\, 0 \leq \theta \leq 2\pi;\ 0 \leq R \leq a;\ 0 \leq z \leq -\frac{b}{a}R + b\right\}$

$$\iiint_{\text{cono pieno}} \operatorname{div}\vec F = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a R\,dR \int_0^{-\frac{b}{a}R+b} (2+3R^2)\,dz = 2\pi\int_0^a (2+3R^2)\left(-\frac{b}{a}R^2+bR\right)dR =$$

$$2\pi\int_0^a \left(-\frac{2bR^2}{a} + 2bR - 3\frac{b}{a}R^4 + 3bR^3\right)dR = 2\pi\left(-\frac{2}{3}ba^2 + ba^2 - \frac{3}{5}ba^4 + \frac{3a^4b}{4}\right)$$

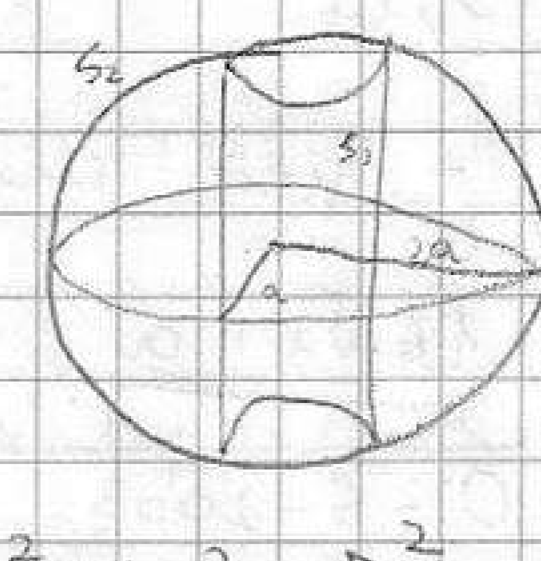
$$= 2\pi\left(\frac{ba^2}{3} + \frac{3ba^4}{20}\right) = \underline{\frac{2\pi ba^2}{3} + \frac{3\pi ba^4}{10}}$$; ora (2) $\iint_{[\text{base}]} \vec F\cdot\hat N\,d\sigma$, prendiamo

n. esterna, base $S: B_a(0,0) \to \mathbb{R}^3$, $(x,y)\to(x,y,0)$ → sup. cartesiana del tipo $(x,y)\to(x,y,f(x,y))$ delle quali conosciamo φ

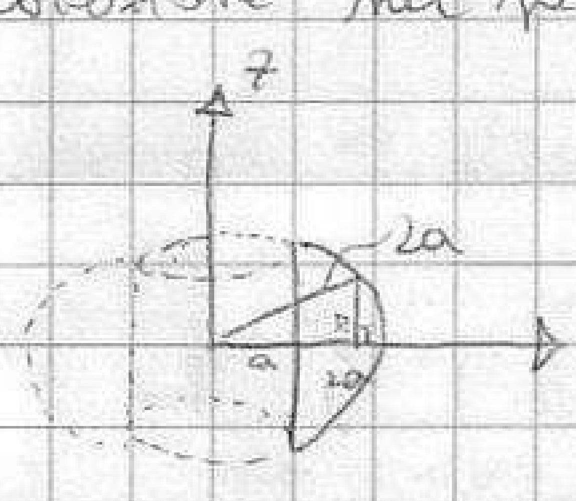
$\vec F_{base} = (x+y^2,\ 3x^2y+y^3-x^3,\ 1)$; $\vec N = (0,0,1)$ → ha dir opposta ⇒ φ sarà opposto al quello cercato. $\vec F\cdot\vec N = 1$, $-\iint_{Base}\vec F\cdot\hat N\,d\sigma = \iint_{B_a(0,0)} 1\,dx\,dy = \underline{\pi a^2}$

Es. 13 p. 7.4

$\vec F(x+yz,\ y-xz,\ z-e^x\sin y)$. Calcoliamo Φ tramite "mela senza torsolo": sfera raggio 2a e cil. coassiale di raggio a (manca da sup. lat.)



Proiezione nel piano: con spicchio ruotato intorno a z.



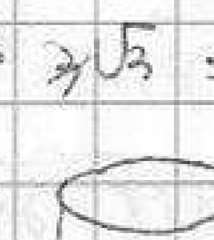
Rapp. regione in coord. cilindriche, relazione tra z e R lungo alt. circ.: $R^2+z^2=4a^2$; $z^2=4a^2-R^2$

$\to z=\pm\sqrt{4a^2-R^2}$; $V=\{(\theta,R,z) \mid 0\le\theta\le2\pi,\ a\le R\le 2a,$
$-\sqrt{4a^2-R^2}\le z\le\sqrt{4a^2-R^2}\}$; $\oiint_{[S]}\vec F\cdot\hat N\,d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\vec F\,dV = \int_0^{2\pi}d\theta\int_a^{2a}R\,dR\int_{-\sqrt{4a^2-R^2}}^{\sqrt{4a^2-R^2}} 3\,dz =$

$2\pi\,3\int_a^{2a} 2R\sqrt{4a^2-R^2}\,dR = 6\pi$ [cambio var. $t=4a^2-R^2$, $dt=-2R\,dR$; se $R=a \to t=$ $4a^2-a^2=3a^2$, se $R=2a\to t=4a^2-4a^2=0$] $\to = 6\pi\left[-\int_{3a^2}^0\sqrt t\,dt\right] =$

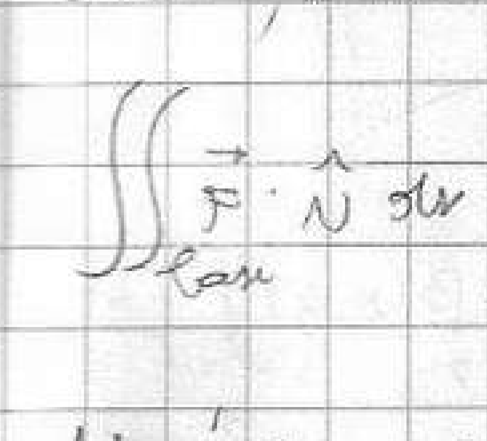
$6\pi\int_0^{3a^2}\sqrt t\,dt = 6\pi\left[\frac{2}{3}t^{\frac32}\right]_0^{3a^2} = 6\pi\,\frac23(3a^2)^{\frac32} = 6\pi\,\frac23(\sqrt3\, a)^3 = 6\pi\,\frac{2}{\cancel{3}}a^3\,\cancel{3}\sqrt3 =$

$\underline{12\pi a^3\sqrt3}$; questo è Φ tot, calcoliamo Φ cil e sottraiamo, usiamo th div. solo che ci sono anche le 2 basi. $\iiint_{\text{cil pien.}}\operatorname{div}\vec F\,dV = \oiint_{S_{tot}}\vec F\cdot\hat N\,d\sigma = \iint_{\text{mantello}}\vec F\cdot\hat N\,d\sigma +$



$\iint_{\text{base}}\vec F\cdot\hat N\,d\sigma + \iint_{\text{Tappo}}\vec F\cdot\hat N\,d\sigma$, si ha $\iint_{\text{lat}}\vec F\cdot\hat N\,d\sigma = \iiint_{\text{cil}}\operatorname{div}\vec F\,dV\ \boxed{1} - \iint_{\text{base}}\vec F\cdot\hat N\,d\sigma\ \boxed{2} - \iint_{\text{Tappo}}\vec F\cdot\hat N\,d\sigma\ \boxed{3}$

N è la normale esterna a cil pieno ; $\boxed{1}$: qual è h cil? $\frac{h}{2} = 4a^2-a^2 = \sqrt3\,a$



cil. pieno : $\{(\theta,R,z): 0\le\theta\le2\pi,\ 0\le R\le a,\ -\sqrt3\,a\le z\le\sqrt3\,a\}$

$\to \iiint_{\text{cil pieno}}\operatorname{div}\vec F\,dV = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a R\,dR\int_{-\sqrt3 a}^{\sqrt3 a}3\,dz = \iiint_{\text{cil p.}} 3\,dV = 3V_{\text{cil}} =$

$3\pi a^2 \; 2\sqrt{3}\, a = \underline{6\sqrt{3}\,\pi a^3}$; $\boxed{3}$ $\vec F_{tappo}$ $\left(\text{PAR. TAPPO} \quad \begin{array}{l} S: B_a(0,0) \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \to (x,y,\sqrt{3}a) \end{array}\right)$

$\vec F_{tappo}$: $\left(\text{non imp}, \text{non imp}, \sqrt{3}a - e^x \sin y\right)$; $\vec N = (0,0,1)$; $\vec F \cdot \vec N = \sqrt{3}a - e^x \sin y$; $\iint_{Tappo} \vec F \cdot \hat N \, d\sigma =$

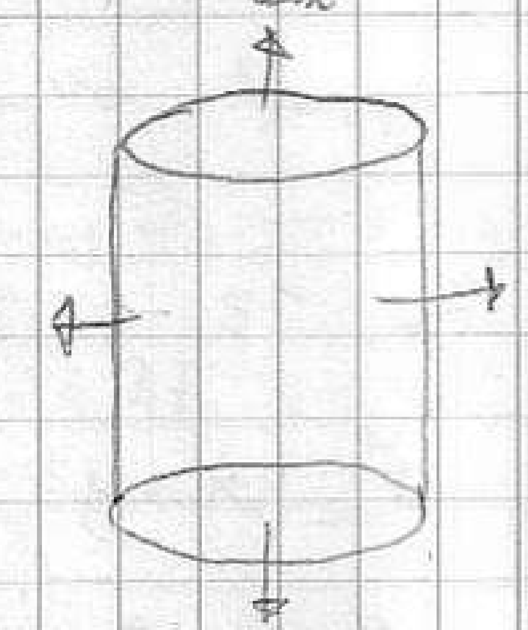
$= \iint_{B_a(0,0)} (\sqrt{3}a - e^x \sin y)\, dx\, dy = \iint_{B_a(0,0)} \sqrt{3}a \, dx\, dy - \iint_{B_a(0,0)} e^x \sin y \, dx\, dy = \underline{\sqrt{3}\pi a^3} - 0$] è

suff. che f sia dispari rispetto a 1 variabile e che ci sia simmetria].

$\boxed{2}$ $\vec F_{base}$ $\left(\text{PAR. BASE} \quad \begin{array}{l} S: B_a(0,0) \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \to (x,y,-\sqrt{3}a) \end{array}\right)$; $\vec N = (0,0,1)$, Φ sarà opposto.

$\vec F_{base}$ $\left(\text{n. imp}, \text{n. imp}, -\sqrt{3}a - e^x \sin y\right)$; $\vec F_{base} \cdot \vec N = -\sqrt{3}a - e^x \sin y$; $\iint_{Base} \vec F \cdot \hat N \, d\sigma =$

$- \iint_{B_a(0,0)} -\sqrt{3}a \, d\sigma + \iint_{B_a(0,0)} e^x \sin y \, dx\, dy \Rightarrow \boxed{3} = \boxed{2}$.



$\Downarrow$

$\iint_{lat.} \vec F \cdot \hat N \, d\sigma \overset{[\partial S_1]}{=} \iiint_{cil.} \mathrm{div}\vec F \, dV - \left(2 \iint_{base} \vec F \cdot \hat N \, d\sigma\right) = \underline{-4\pi a^3 \sqrt{3}}$; ci vuole

"−" perché chiedeva Φ entrante $[S_1]$; ϕ di S_2 : Φ $\phi_{tot} - \phi_{S_1} = 12\pi a^3\sqrt{3} + 4a^3\pi\sqrt{3} =$

$\underline{16\sqrt{3}\,\pi a^3}$.

01-6-2005 Dim th. divergenza:

V: dominio regolare con $\partial V = S$ (S-superficie regolare a pezzi). Se ho $\vec F \in C^1$ definito su un aperto $\Omega \subset V$, allora $\oint\!\!\!\oint_{[S]} \vec F \cdot \hat n \, d\sigma = \iiint_V \mathrm{div}\vec F \, dV$ dove $\hat n$ è normale esterna (e S con orientazione secondo $\hat n$).

Dim: (nel caso di dominio x-semplice, y-semplice, z-semplice)

Se $\vec F(x,y,z) = \left(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)\right)$ possiamo scriverlo come somma di:

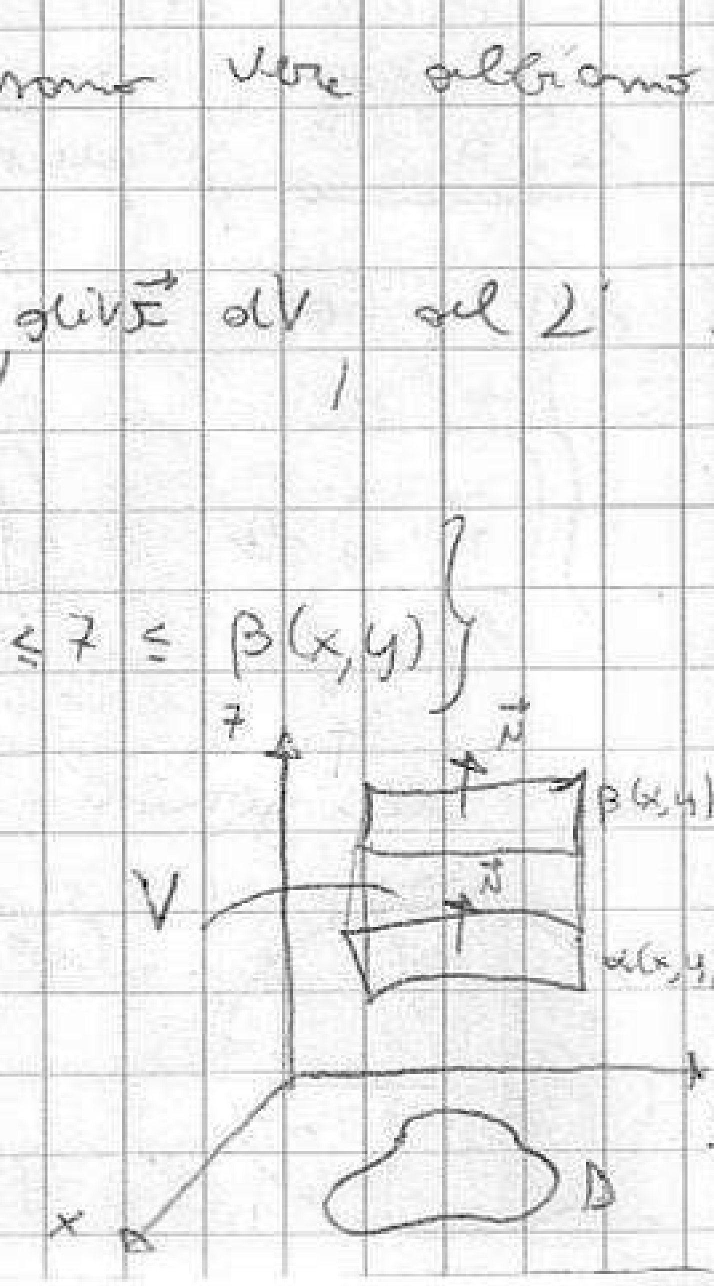
$\vec F_1 = (F_1, 0, 0)$, $\vec F_2 = (0, F_2, 0)$, $\vec F_3 = (0, 0, F_3)$. TH: $\iiint_V \frac{\partial F_1}{\partial x} dx\,dy\,dz = \oint\!\!\!\oint \vec F_1 \cdot \hat N \, d\sigma$;

$\iiint_V \frac{\partial F_2}{\partial y} dx\,dy\,dz = \oint\!\!\!\oint_{[S]} \vec F_2 \cdot \hat N \, d\sigma$; $\iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dx\,dy\,dz \overset{\boxed{3}}{=} \oint\!\!\!\oint_{[S]} \vec F_3 \cdot \hat N \, d\sigma$. Se sono vere abbiamo

dim.; sommando le uguaglianze ho al 1° membro $\iiint_V \mathrm{div}\vec F \, dV$, al 2° membro ho $\oint\!\!\!\oint_{[S]} \vec F \cdot \hat N \, d\sigma$. Analizziamo $\boxed{3}$.

V si può vedere (z-semplice) $= \left\{ (x,y,z) \,/\, (x,y) \in D,\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y) \right\}$

Calcolo $\iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dx\,dy\,dz$; essendo dom. ⊥ lo scrivo



$\iint_D dx\,dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz = \iint_D dx\,dy \, F_3(x,y,z)\Big|_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} = \iint_D F_3(x,y,\beta(x,y)) -$

$F_3(x,y,\alpha(x,y))\, dx\,dy$

La stessa espressione la avrò $\iint_{[S]} \vec{F}_3 \cdot \hat{N} \, d\sigma$. S ha 6 facce [4 laterali + base e tappo]. Il ϕ alle le 4 facce è $= 0$. Quando regione è normale a z, le facce laterali hanno $\vec{N} = (\alpha x, \beta y, \boxed{0})$ → comp. 0 lungo asse z $\Rightarrow \vec{F}_3 \cdot \vec{N} = (0, 0, F_3) \cdot (*, *, 0) = 0 \Rightarrow \iint_{[S, laterali]} \vec{F}_3 \cdot \hat{N} \, d\sigma = 0$. Unici contributi sono base e tappo.

$S: D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to (x, y, \beta(x,y))$; $\vec{N} = (-\beta_x, -\beta_y, 1)$. $\vec{F}_3 \cdot \vec{N} = (0, 0, F_3) \cdot (-\beta_x, -\beta_y, 1) = F_3$

ma sarà ristretto a $[S] \Rightarrow F_3(x, y, \beta(x,y))$

Quindi $\iint_{tappo} F_3 \cdot \hat{N} \, d\sigma = \iint_D F_3(x, y, \beta(x,y)) \, dx\, dy$; base: $S: D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to (x, y, \alpha(x,y))$

$\vec{N} = (-"x", -"y", 1)$ Punta verso l'alto, quindi ϕ sarà opposto. $\vec{F}_3 \cdot \vec{N} = (0, 0, F_3(x, y, \alpha(x,y))) \cdot (-\alpha_x, -\alpha_y, 1) = F_3(x, y, \alpha(x,y))$. Quindi $\iint_{base} \vec{F}_3 \cdot \hat{N} \, d\sigma = -\iint_D F_3(x, y, \alpha(x,y)) \, dx\, dy$. Sommando i contributi $\iint_{[S]} \vec{F}_3 \cdot \hat{N} \, d\sigma = \iint_D \big(F_3(x, y, \beta(x,y)) - F_3(x, y, \alpha(x,y))\big) \, dx\, dy = \iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx\, dy\, dz$ [da prima] $\Rightarrow$ C.V.D.

//

TEOREMA DI STOKES

Le formule di Green dicono che se ho dominio D in $\mathbb{R}^2$ con ∂D = curve reg. a tratti orientate a sx, se $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, \Omega \supseteq D$, allora $\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_{+C} \vec{F} \cdot \hat{T} \, d\sigma$ dove $C = \partial D$. Scriviamolo per campi in $\mathbb{R}^3$:

D

↓

Sia $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (F_1(x,y), F_2(x,y))$. Consideriamo $\vec{\mathcal{F}}: \Omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \to (F_1(x,y), F_2(x,y), 0)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & 0 \end{pmatrix} = \hat{i}\,(\overset{F_2 \,\not\ni\, z}{0}) + \hat{j}\,(\overset{\text{lo stesso}}{0}) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{F}} =$$

$= \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$. Calcoliamo flusso $\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{F}}$ attraverso D. D è piano, ma posso vederlo come sup. in $\mathbb{R}^3$: $S: D \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \to (x, y, 0)$, $\vec{N} = (0, 0, 1)$

$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{N} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ ↳ Quindi $\iint_D \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{F}} \cdot \hat{N} \, d\sigma = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy =$

$= \oint_{+C} \vec{F} \cdot \hat{T} \, d\sigma = [C = \partial D]$, se al posto di $\vec{F}$ metto $\vec{\mathcal{F}}$ è uguale perché C è curva piana e $\vec{F}$ e $\vec{\mathcal{F}}$ differiscono solo in z. In $\mathbb{R}^3$, $\hat{T} = (*, *, 0)$

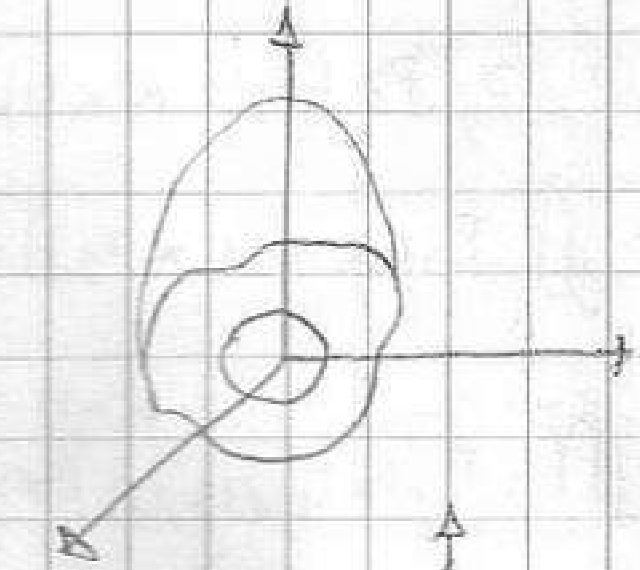
$\Rightarrow = \oint_{+C} \vec{\mathcal{F}} \cdot \hat{T} \, d\sigma$

↓

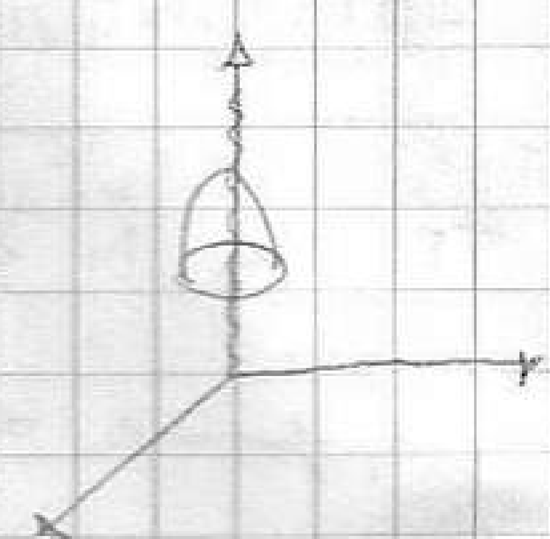
Sia $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 e Ω dominio regolare. Sia $S: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow$ una superficie regolare a pezzi la cui traccia è $\subseteq \Omega$ $[S] \subseteq \Omega$ e la cui frontiera sia una curva regolare a pezzi. Si ha che $\boxed{\iint_{[S]} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{N}\, d\sigma = \oint_{+C} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds}$

$[C = \partial S]$

Ex. cond. necessaria affinché un campo vett. di classe C^1 sia conservativo è che $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, il dominio deve essere semplicemente connesso [in $\mathbb{R}^2$ dom. non ha buchi]. In $\mathbb{R}^3$ un dominio Ω è SEMPLICEMENTE CONNESSO se $\forall$ curva chiusa è la FRONTIERA di una superficie interamente contenuta in Ω.



Ex dom. sempl. connesso in $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^3 \setminus B(0,0,0)$. Ogni curva chiusa è ∂ di qualche superficie [palla non crea problemi]



Ex dom non sempl. connesso: $\mathbb{R}^3 \setminus$ asse z

Qui "cappello" interseca asse z $\to$ non tutto $\subseteq$ in Ω

Dim. [se $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ e Ω sempl. connesso in $\mathbb{R}^3$, $\vec{F}$ è conservativo]

$\vec{F}$ è conv. $\Longleftrightarrow \oint_{+C} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = 0$ $\forall$ curva chiusa C. C è ∂S qualsiasi

Per Stokes $\oint_{+C} \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = \iint_{[S]} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{F}}_{0} \cdot \hat{N}\, d\sigma = 0 \Rightarrow \vec{F} =$ conv.

$\vec{F}$ ammette un potenziale vettoriale se $\exists\ \vec{G}$ / $\vec{F} = \text{rot}\, \vec{G}$. Cond. necessaria $\text{div}\, \vec{F} = 0$ $\times$ alcuni dom. è sufficiente [se $\text{div}\, \vec{F} = 0$, $\vec{F}$ è SOLENOIDALE]

Ex: $\vec{F} = (x, 0, -z)$, $\text{div}\, \vec{F} = 0$

$G = (G_1, G_2, G_3)$; $\vec{\nabla} \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial z}\right) +$

$+ \hat{k}\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right)$. Eguaglio le componenti. [3 gradi di libertà e 3 eq.]

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = F_1 \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = F_2 \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = F_3 \end{cases}$$

Pongo $G_2 = 0$. [$\exists y$]

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} = x \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = 0 \\ -\frac{\partial G_1}{\partial y} = -z \end{cases} \to \begin{cases} G_3(x,y,z) = xy + \boxed{C(x,z)} \to [-2°] = 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} = \frac{\partial G_3}{\partial x} = y \to G_1(x,y,z) = yz + C(x,y) \\ z + C_y(x,y) = z \end{cases}$$

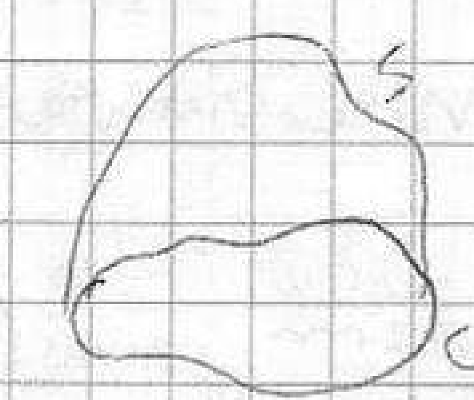
$C(x,y) = \boxed{C(x) = 0}$ [$-1°$]

$\Rightarrow G = (yz, 0, xy)$. Il P.V. è definito a meno di $\vec{\nabla}$ funzione

$(\text{rot grad } \vec{F} = 0)$. Se ho $\vec{G} + \nabla \Phi$ (Φ di classe C^2) dove $\vec{G}$ è P.V. di $\vec{F}$

ho che: $\text{rot}(\vec{G} + \nabla\Phi) = \text{rot}(\vec{G}) + \text{rot}\nabla\Phi = \vec{F}$ anche $\nabla\Phi$ è P.V.

Ulteriore metodo di calcolo Φ C.V.



Vogliamo $\iint_{[S]} \vec{F} \cdot \hat{N}\, d\sigma$ con $\partial S = C$. Se $\vec{F}$ ha potenziale vettoriale, allora $\vec{F} = \text{rot}\,\vec{G}$, allora il flusso diventerà

$= \iint_{[S]} \vec{\nabla} \times \vec{G} \cdot \hat{N}\, d\sigma$ e - per Stokes - è $= \oint_{+C} \vec{G} \cdot \hat{T}\, ds$. Th. Stokes è generalizz.

Il fond. calcolo $\left[\int_a^b F\, dt = G(b) - G(a) \right]$ (G è primitiva). Devo trovare $G \,/\, G' = F$, poi la valuto agli estremi. Anche qui: primitiva è $\vec{G}$ valutata su frontiera, e vale a dire $\oint_{+C} \vec{G} \cdot \hat{T}\, ds$ [a, b sono frontiera intervallo, come C]

06-6-2005 - (SUCCESSIONI e SERIE)

SUCCESSIONE: $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longrightarrow a_n$ (→ naturali) (si dice di solito) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Ex: $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ [Si può parlare solo di $\lim_{n \to +\infty}$]

[converge]

- $l = \lim_{n \to +\infty} a_n$ se $\forall \varepsilon > 0 \;\exists\, n_\varepsilon > 0 \,/\,$ se $n > n_\varepsilon$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon$

Sia ex $f: [1, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ Possiamo costr. successione restringendo D a $\mathbb{N}$ → da f costruiamo la successione $a_n = f(n)$

Ex: $f: [1, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow 1/x$ ⇝ $a_n = \frac{1}{n}$; Ex: $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x/(1+x^2)$ $\to a_n = \frac{n}{1+n^2}$

$a(1) = \frac{1}{2}$, $a(2) = \frac{2}{5}$ ... [Se $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ allora $\exists$ il $\lim_{n \to +\infty} a(n) = l$] (può $\exists$ lim della succ. senza che esista $\lim f(x)$)

Ex: $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{1+n^2}$; Consideriamo la f. associata $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a(n) = 0$

Ex: $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, la f. associata è $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Se ho a^b posso scriverlo come $e^{b \log a} \Rightarrow f = e^{x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$; $\lim_{x \to +\infty} e^{x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

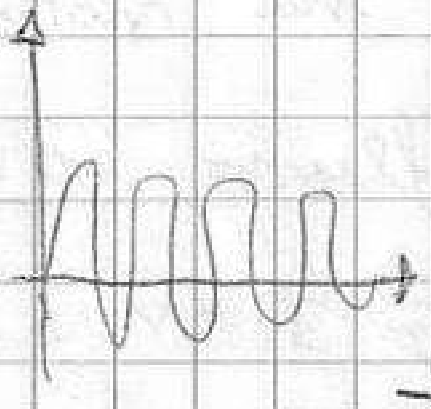
Cambio di var: $t = \frac{1}{x}$ ⇝ $\lim_{t \to 0^+} e^{\frac{1}{t} \log(1+t)}$, $\lim_{t \to 0^+} \frac{\log(1+t)}{t} =$

per Hôp $\to \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{1+t} / 1 = 1 \Rightarrow \lim_{t \to 0^+} e^{\frac{\log(1+t)}{t}} = e \Rightarrow$

$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Caso in cui il th. e' INUTILE: cons. $a_n = \sin(2\pi n)$

- Vale sempre 0! $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Possiamo cons. $f(x) = \sin(2\pi x)$: $\nexists$

$\lim_{x\to+\infty} \sin(2\pi x)$



f oscilla. Il $\lim a(n)$ $\exists$ xke' abbiamo preso solo alcuni valori.

- Ex: $a_n = (-1)^n$ $\to$ se n è pari $a_n = 1$ / $\to$ se n è dispari $a_n = -1$ $\rightsquigarrow$ succ. che non ammette limite

- Successione può divergere a $\pm\infty$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se $\forall M > 0$ $\exists n_\varepsilon > 0$ / se $n > n_\varepsilon \to a_n > M$

Ex: $a_n = \frac{n^2+n+3}{n+2} \rightsquigarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$\exists$ successioni che non si possono scrivere come $f(x): D \to \mathbb{R}$. Ex: FATTORIALE, definito ricorsivamente: $1! = 1$, $n! = n(n-1)!$; $2! = 2\cdot 1! = 2$,

$3! = 3(3-1)! = 3\cdot 2 = 6$; $4! = 4\cdot 3! = 4\cdot 6 = 24$

$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$ [$n!$ è sicuramente $\geq n$ $\forall n$]

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n\cdot n\cdot n\cdots n\cdot n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-2)}{n}\cdot$

$\cdots \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n} \leq 1\cdot 1\cdots\frac{1}{n}$; $\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \frac{n!}{n^n} \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

SERIE. Cons. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione. A partire da questa costruisco successione detta $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$. In generale

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Se la successione S_n ammette limite finito l, allora la serie $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ e' CONVERGENTE ed ha per somma l $\Rightarrow$ si scrive anche

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l}$$

[SOMMA GEOMETRICA]

Cons. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$; $S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$; $S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$. In genere $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Calcolo S_n; Prendiamo $a \in \mathbb{R}$. Cons. $1 + a + a^2 + a^n = \bar{S}_n$ (a diff. di S_n, il 1° termine è 1). Moltiplico ambo i membri $\times a$: $a + a^2 + a^3 + a^{n+1} = \bar{S}_n \cdot a$

Ora sottraggo dalla 2ª la 1ª rimane $a^{n+1} - 1 = a\bar{S}_n - \bar{S}_n \to (a-1)\bar{S}_n$

Se impongo $a \neq 1$ posso dividere per $(a-1) \Rightarrow \frac{a^{n+1} - 1}{a-1} = \bar{S}_n \to$ <u>somma di una progressione geometrica di ragione a.</u>

Vogliamo S_n; $S_n = a + a^2 + a^n$; $\bar{S}_n = 1 + a + a^2 + a^n$. Cons. $\bar{S}_{n-1} = 1 + a + \dots + a^{n-1}$; moltiplichiamo per $a \to S_n = a\bar{S}_{n-1} \Rightarrow S_n = a\bar{S}_{n-1}$ e lo conosciamo: $= \frac{a(a^n - 1)}{a-1} \to \boxed{\frac{a^{n+1} - a}{a-1}}$; Calcolo ex): $S_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} \to$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}^{\to 0} - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1$. Quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ è CONVERGENTE e ha per somma 1.

Ex: $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$; $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ [trucco x calcolare SOMMA TELESCOPICA] Scelgo A e B / $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$; $\frac{Ak + A + Bk}{k(k+1)} \to \begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \to \begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \end{cases}$

Verifica: $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$ ✓. Dico che $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ Esplicitiamo; $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ | termini interni si cancellano $\to$ rimangono il 1° e l'ultimo $\Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ è convergente ed ha per somma 1.

(di solito è difficile calcolare la somma $\to$ si vuole solo criterio convergenza).

SERIE a TERMINI NON NEGATIVI $[a_n \geq 0]$. Accade che se queste serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o CONVERGONO o DIVERGONO [non accade che $\nexists \lim$]

S_n — ammette limite: $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{l}{+\infty}$; $\not\exists \lim$; Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\left[a_n = \frac{1}{n!} > 0\right]$

TH: CRITERIO DEL RAPPORTO. Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l$ allora $\begin{cases} l > 1 & \boxed{1} \\ l = 1 & \boxed{2} \\ l < 1 & \boxed{3} \end{cases}$

$\boxed{1}$ $\sum$ è conv. ; $\boxed{2}$ non si può dire nulla ; $\boxed{3}$ è divergente

(Vedi dietro la Foglia)

Ex:
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\cdot(n+1)! = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = +\infty \; (>1$$

$\to l>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ è CONVERGENTE (Criterio poco utile perché spesso $l=1$)

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; $a_n = \frac{1}{n}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\cdot n+1 = 1 \to$ (non posso

dire nulla col criterio del rapporto (in realtà serie diverge)); Se ad ex.

ho $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\left[a_n = \frac{1}{n^2}\right]$ allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\cdot(n+1)^2 = 1$, anche qui il

criterio è inconclusivo (in realtà serie è convergente). Per il criterio le a_n

devono essere >0.

CRITERIO INTEGRALE: Cons. $f:[1,+\infty] \to \mathbb{R}$; 1) $f(x)\geq 0$, 2) f è

4) f continua [non crea in realtà problemi]

decrescente, 3) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Cons. a_n la successione associata ad

$f \to a_n = f(n)$. Allora $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ è CONVERGENTE $\Longleftrightarrow$ è CONVERGENTE

$$\boxed{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}$$

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è convergente? Associamo $f(x) = \frac{1}{x}$ che soddisfa le propriet[à]

1), 2), 3), 4). Applichiamo C.I. $\to$ deve convergere $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx}$

$= \lim_{n\to\infty} \log n = +\infty \Rightarrow$ Int. improprio diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è DIVERGENTE

(a volte si scrive è $= a +\infty$)

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (soddisfa le propr.). $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n} \frac{1}{x^2}\,dx =$

$\lim_{n\to+\infty} \left(-x^{-1}\Big|_1^n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow$ serie CONVERGE. ($\nexists$ relazione

con somma serie)

08-6-2005 / CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano a_n e b_n due successioni >0. $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ con $l\in(0,+\infty)$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è CONVERGENTE $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è CONVERGENTE.

Ex. Cons. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{n^3+3n^2+6}$ per $n >>$ si comporta come $\frac{1}{n}$. Cons. $a_n = \frac{n^2+5}{n^3+3n^2+6}$

(69)

e cons. $b_n = \frac{1}{n}$. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2+5}{n^3+3n^2+6}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+5n}{n^3+3n^2+6} =$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{3}{n}+\frac{6}{n^3}\right)} = \underbrace{1}_{\in(0,+\infty)} \Rightarrow$$ a_n ha stesso carattere serie $\frac{1}{n}$, poiché $\frac{1}{n}$ è DIVERGENTE $\Rightarrow$ anche a_n è DIVERGENTE

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ $\left[\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1\right]$ È equiv. a $\frac{1}{n^2}$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$

Chiamo $t=\frac{1}{n}$. Se $n\to+\infty \to t\to 0^+ \to \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t^2)}{t^2}$ $s=t^2 \to$

$\lim_{s\to 0} \frac{\log(1+s)}{s} = 1 \to$ la serie CONVERGE poiché $\frac{1}{n^2}$ CONVERGE

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ $\left[\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\right]$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}{n^{-\frac{3}{2}}}$ [

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^{\frac{1}{2}}}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}\cancel{n^{\frac{1}{2}}}} = \left(x=\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\Big] \to \text{Converge} \left[\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{conv}\right]$$

$\frac{1}{n^\alpha}$ [$\alpha>1$]

SERIE A SEGNI ALTERNI

Def: Una serie a segni alterni è una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ dove $a_n \geq 0$.

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $\left(a_n = \frac{1}{n}\right)$

CRITERIO DI LEIBNIZ

Se ho serie a s. alt. $\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n\right)$ essa è CONVERGENTE se:

1) a_n è decrescente
2) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ a $\overbrace{\left[\frac{1}{n}\right]}^{a_n}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$; a_n è decrescente $\Rightarrow$ è convergente

SERIE DI POTENZE

Serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Se al posto di x metto valore numerico posso stab. conv. e div.

TH: $\exists\, \rho \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$ / se $|x| < \rho$ allora la serie CONVERGE, se $|x| > \rho$ allora la serie DIVERGE; se $|x| = \rho$ non si può dire nulla

Inoltre $\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. [Se $\rho = 0$ la serie converge solo per $x=0$; se $\rho = +\infty$ serie conv. $\forall x$]

Ex: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $a_n = \frac{1}{n!}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} =$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} = +\infty \rightarrow$ serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$ [ρ = RAGGIO DI CONVERGENZA DELLA SERIE

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $a_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \rightsquigarrow \rho = 1$

questa serie converge se $|x| < 1$, diverge se $|x| > 1$. Studiamo se $|x| = 1$:

$x = 1$ o $x = -1$, Se $x = 1$ ho $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow$ serie DIVERGE

Se $x = -1$ ho $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow$ conv. x Leibniz.

$\Downarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge in $[-1, 1)$ e diverge all'esterno

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ con $\rho > 0$. In $(-\rho, \rho)$ è definita la funzione

[TH. derivata]

- $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. g è DERIVABILE e la sua derivata $g'(x) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $\quad [n a_n x^{n-1} = D(a_n x^n)]$

[TH. Integrale]

- Possiamo calcolare $\int_0^x g(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\forall x \neq 1$, $1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. Se prendo

$|x| < 1$ e faccio $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, $x^{n+1} \rightarrow 0$, il 1° tenderà a

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1} = 1$ / Se $x = \pm 1$ serie non converge

Serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ conv. solo per $|x| < 1$

$\Downarrow$

Ora: Se metto $-x$ ho $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$.

Integro $\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \rightsquigarrow \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\,dt =$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ [se $|x| < 1$]

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$. Cambio x in x^2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$. Integro

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt \rightarrow \underline{\operatorname{atan}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}} \quad (1)$$ Valida

se $|x|<1$. Che accade se $x=1$? Se fosse valida: $\underline{\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1}}$ $\rightarrow 1$

Abbiamo approssimazioni di $\pi/4$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots$$

Se ho $g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergente in $(-\rho, \rho)$ so che è derivabile e $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n\, x^{n-1}$, $g'(0)$? $g'(x) = a_1 \cdot 1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 \cdot x + a_3 \cdot 3 \cdot x^2 + a_4 \cdot 4 \cdot x^3 + \dots$ $\Rightarrow g'(0) = a_1$. Iterando $\underline{g''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}}$, $g''(0)$?; $g''(x) =$ $= a_2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x + \dots$, $g''(0) = 2a_2$. Iterando $g'''(x) =$ $\sum_{n=3}^{+\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1)(n-2)\, x^{n-3}$, $g'''(0) = 6a_3$. In generale $\underline{g^{(k)}(x) =}$ $\underline{\sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n(n-1) \dots (n-k+1)\, x^{n-k}}$, $\underline{g^{(k)}(0)} = a_k \cdot k(k-1) \dots 1 = \underline{a_k\, k!}$

Da (1). Quanto vale $g^{(5)}(0)$? $[g(x) = (1)]$. $g^{(5)}(0) = a_5 \cdot 5!$, $a_5 =$ $= (-1)^2 \frac{x^5}{5}$ $(n=2)$ $\Rightarrow a_5 = \frac{1}{5} \Rightarrow g^{(5)}(0) = \frac{1}{5} \cdot 5! = 4! = 24$

23-6-2005

SERIE DI TAYLOR

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = g(x)$ [∞ derivabile in $(-\rho, \rho)$], $g^{(k)}(0) = a_k\, k! \longleftrightarrow a_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$. Sia $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in (a,b)$, $f \in C^{\infty}$. Costruiamo la serie di potenze $\rightarrow$ $\boxed{g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k}$. 1) Per quali x la serie è convergente?

2) La somma della serie è $=$ ad f? [Ho f, fino in punto, e genero serie di potenze]

Ex: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow e^x$. Sia $x_0 = 0$. $f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = 1$, $f''(x) = e^x \rightarrow f''(0) = 1$ $\Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \rightarrow f^{(n)}(0) = 1$. Quindi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x-0)^n$ $\rightarrow$ FORMULA DI MACLAURIN diventa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. Calcoliamo $\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\frac{(n+1)!}{1} = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$

Serie converge $\forall x$.

la somma è $= a\ e^x$! Dim: TH: $\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$. Sia $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. TH:

y è soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ [si sa che l'unica sol. del problema è e^x]. $y(x)$ deve essere soluz. del problema → Dim:

$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{n} x^{n-1}}{\cancel{n}(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ Cons. $n' = n-1 \Rightarrow n = n'+1$

Se $n=1$ $n'=0$ ⇒ serie diventa $\sum_{n'=0}^{\infty} \frac{x^{n'}}{n'!} = \left(\text{indice non importa}\right) = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = y}$

Quindi $y' = y$. Inoltre $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightsquigarrow y(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{0!} = 1$. La funz. soddisfa Cauchy. Essendo

$\hookrightarrow 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots$

sol. unica, $y(x) = e^x$

Ex.

$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$; $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} D\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 2x^{-3}$. Essendo

l'exp. + "forte", $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$. È suff. che $\exists f^{(n)}(0)$ e $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n$.

Costruiamo $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 x^n = 0$ $\forall x$. Non è vero che

[$g(x) \neq f(x)$ se $x \neq 0$] serie è $=$ a f di partenza

Ex:

$\underline{f(x) = \sin(x)}$; $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin(x)$; $f'''(x) = -\cos(x)$; $f''''(x) = \sin x$

Calcolate in 0: $f'(0) = 1$; $f''(0) = 0$; $f'''(0) = -1$; $f''''(0) = 0$

Le derivate pari sono $=$ a 0. Le der. dispari sono tra 1 e -1. Si conclude che

$f^{(2k)}(0) = 0$ $\forall k$; $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Scriviamo la serie di Taylor del sin:

$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \text{serie dei pari} \text{ e serie dei dispari} = \cancel{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{2k!} x^{2k}}^{\text{[pari]}} + \right.$ → sempre $= a\ 0$

$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right]$. Serie Deve soddisfare questo problema → $\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ x essere $=$ a $\sin x$

→ Otteniamo Serie per il cos.

↳ $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Deriviamo: $\underline{\cos x} = \sum_{\boxed{k=0}}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1) x^{2k}}{(2k+1)!} =$

in genere da 1, ma ← manca costante

(73) $\underline{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}$. Se ho serie $\sum_{n=0} a_n x^n$ derivando $\sum_{n=1} a_n n x^{n-1}$. Ma

qui $\cancel{I}$ termine di grado 0. Esplicitiamo serie $\sin x = \frac{x}{1} + (-1)\frac{x^3}{3!} + (-1)^2 \frac{x^5}{5!} \dots$; $\cos x = (-1)^0 + \frac{(-1)x^2}{2!} + (-1)^2 \frac{x^4}{4!}$

Ex (BSDUE). Sia
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
Trova c / da essere f continua e scrivere serie di Taylor.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \text{Termini di grado superiore} - \cancel{x}}{x^3} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + (\text{T.d.g.s.})}{x^3} = \lim_{x \to 0} -\frac{x^3}{6} \cdot \frac{1}{x^3} + \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{\text{TGS}}^{\to x^9, x^6, \dots + \text{veloci di } x^3}}{x^3} = -\frac{1}{6} + 0$$

Termini di grado superiore "=" $o(x^3)$. Sia f / $f(x) \to 0$ per $x \to 0$. $g(x)$ è un $o(f(x))$ [o piccolo] se $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Ex: $x^3 = o(x^2) \to \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$]. In generale, se abbiamo

$\underline{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$ posso sempre dire che $\underline{f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)}$

Da prima: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - \cancel{x}}{x^3} = -\frac{1}{6} \Rightarrow c = -\frac{1}{6}$

È anche derivabile. [al posto di $\sin x \to$ s.T]

$$f(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} - x}{x^3} = \quad \text{Per } n=0\ \Sigma = x \Rightarrow = \frac{\cancel{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \cancel{x}}{x^3} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{-3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}$$

Ex:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4} & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
[Trova c]. Serie di Taylor. $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$, $\frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4} =$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} - 1 - x^2}{x^4} \quad \begin{matrix}[\text{Per } n=0 \text{ ho } 1] \\ [\text{Per } n=1 \text{ ho } x^2]\end{matrix} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} - \cancel{1} - \cancel{x^2}}{x^4} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \cdot x^{-4} = \underline{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-4}}{n!}}$$

Ex ($\to$)

Calcoliamo la serie di Taylor di $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x+3)}$. Passiamo in fratti semplici: $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$, $\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x}{(x-2)(x+3)} \rightarrow x(A+B) + 3A - 2B = x$

$\rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 3A-2B=0 \end{cases} \rightarrow A = \frac{2}{3}B \rightsquigarrow \frac{2}{3}B + B = 1 \rightsquigarrow \begin{cases} B = \frac{3}{5} \\ A = \frac{2}{5} \end{cases}$; La serie di potenze la consideriamo: $\frac{1}{x-2}$; (sappiamo che $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$) $\Rightarrow$

$-\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n$, (lo stesso per $x+3$) Converge per $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \rightarrow |x| < 2$. $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{x}{3}+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)} =$

$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^n \rightarrow$ Converge per $|x| < 3$. Prendo il + piccolo e quindi la convergenza è per $|x| < 2$

FINE CORSO - 9/6/05