ELETTROTECNICA Prof. A. Salvini

1. CENNI DI ELETTROMAGNETISMO

3. PRINCIPI DI KIRCHHOFF

5. LUNGHEZZA D'ONDA

6. SISTEMA A PARAMETRI CONCENTRATI

9. LEGGI COSTITUTIVE BIPOLI R,L,C

10. CONVENZIONE GENERATORI - UTILIZZATORI / POTENZA

11. PASSIVITÀ BIPOLO / BIPOLI CON MEMORIA

12. INDUTTORE / MUTUA INDUZIONE

13. MUTUA INDUTTANZA

14. SERIE E PARALLELO TRA BIPOLI

15. GRAFO

16. ALBERO / MAGLIA

19. TEOREMA DI TELLEGEN / CIRCUITI PURAMENTE RESISTIVI / Σ FEM IDEALI

20. // I_g IDEALI / Σ FEM e R / FORMA THEVENIN - NORTON

21. PASSAGGIO A/DA NORTON

22. METODO DEI NODI

27. METODO DELLE MAGLIE

29. METODO DEI NODI GENERALIZZATO

31. PRINCIPIO SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI / TEOREMA DI THEVENIN

34. MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA

35. TRASFORMAZIONI STELLA/TRIANGOLO

36. PARTITORI DI TENSIONE E DI CORRENTE

37. CIRCUITI CON MEMORIA / NUMERI COMPLESSI

38. TRASFORMAZIONE DI LAPLACE

39. CARICA DI UN INDUTTORE

40. IMPEDENZA / IMPULSO

41. AMMETTENZE
43. CARICA DI UN CONDENSATORE
45. SCARICA DI UN CONDENSATORE
46. CIRCUITO RLC
47. OSCILLATORIO SMORZATO
48. RLC CON FORZANTE SINUSOIDALE
50. REATTANZA / REGIME PERMANENTE SINUSOIDALE
51. FASORI
53. LEGGI COSTITUTIVE BIPOLI IN DOMINIO FASORI
55. METODO DEI FASORI
57. CALCOLO DELLA POTENZA
58. POTENZA FLUTTUANTE / ATTIVA
59. VALORE EFFICACE
60. POTENZA COMPLESSA / APPARENTE / REATTIVA
61. TEOREMA DELL'ADATTAMENTO DELL'IMPEDENZA
62. RIFASAMENTO
63. SISTEMI TRIFASE
64. TRASMISSIONE / TENSIONI CONCATENATE
65. TH. DELL'UNICITÀ DEL CENTRO STELLA / SFASATORI / MONOFASE EQUIVALENTE

ELETTROTECNICA. Prof. Alessandro Salvini [V. di V. NAVALE 84 - st. 1 - st. 11] 3/10/05

Ricevimento: Tutti i martedì dalle 15.30 alle 17.30

Libro: (Fabricatore) - ELETTROTECNICA e APPLICAZIONI (ed. Liguori) → ex. x l'esame

Esame: ORALE → svolgi exer. poi orale su teoria. Obbligo prenotazione.

(eq. MAXWELL) $\vec{H}$

① $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Chi passa a visione tecnica del problema, si perde caratt. vettoriale). Spesso ∃ calcoli scalari → (circuiti elettrici)

② $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, $\vec{H}$ è CAMPO MAGNETICO, $\vec{J}$ è CORR. CONDUZIONE, $\vec{D}$ è vett. SPOSTAMENTO ELETTRICO.

③ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$; ④ $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_q$. Con MAX. studio fen. elettromagn., ma è difficile. Dobbiamo semplificare, ma ∃ dei limiti.

[ρ_q è CARICA ELETTRICA → C/m^3]. Non sono suff. xkè devo anche trovare LEGGI COSTITUTIVE del MEZZO (materiale nel quale studio campo).

- $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ → attenti a ε (potr. essere tensore, xò lo si considera come scalare) → se è costante c'è rel. lineare → mezzo è LINEARE dal punto di v. elettrico.
[mezzi ELETTRICI]

- $\vec{B} = \mu \vec{H}$ → stessa per B tramite perm. magnetica.
[mezzi MAGNETICI]

- $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ → σ è CONDUCIBILITÀ, $[\vec{J}] = A/m^2 = \frac{C}{m^2 s}$
[mezzi CONDUTTORI]

Ex. mezzo reale noto che non può essere solo puro elettrico / magn / conduttore, ci sono tutte e 3, magari una è prevalente, ex. ACCIAIO è ottimo magnetico, buon cond. scarso elettrico → sarà materiale MAGNETICO, xkè è prevalente. / Ex. RAME (è m. CONDUTTORE), come faccio a capire $\vec{J}$? Non c'è CORRENTE, non so sua CONDUCIBILITÀ. Si introducono altri 2 concetti: (x generare le 3 equazioni ci vuole altro): CONVERSIONE ENERGETICA, MOTORE PRIMO,

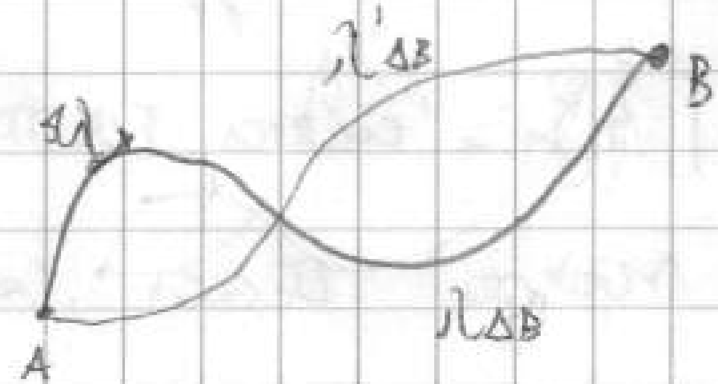
$\vec{E}_m$ e $\vec{J}_m$, CAMPI ELETTROMOTORI → da processo di conv. da grandezze non elettriche a elettriche [ex. PILA, c'è E a causa di processo CHIMICO] [EX. MACCHINA, tramite movimento meccanico ho grandezza elettrica.]
Nel pezzo di rame SE metto I reagisce in base alla E_m fornita.
I punti chiave (CAUSA dei campi elett. mot. non è ELETTRICA).

$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_m\right) + \vec{J}_m$$

↳ conv. di GRANDEZZE, di ENERGIA, anche nelle onde radio,
se non c'è trasmittente radio non funziona → ci vuole SORGENTE, considero solo effetto $\vec{E}_m$

x passare a valori faccio PROD. SCALARE [OPERATORI ELETTROTECNICA]

1) D.D.P. ; presi due punti A e B



voglio ΔV, prendo percorso λ_{AB} (in mt),
Si definisce $\underline{V_A - V_B} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\lambda}$ [prendo tratto $\vec{ds}$, con orientata a ~~sul~~ spostamento]. I casi che non dipendono dal percorso → CAMPO CONSERVATIVO

In ELETTROTECNICA con V definisco la TENSIONE (ex. PILA, se misuro in p.ti diversi ho V diversi); se nell'int. metto $\vec{E}_m$ ho FORZA ELETTROMOTRICE (C. ELM. è irrot.) non posso dire che $\not\exists$ da λ [con $\partial B/\partial t \neq 0$];
genericamente si parla di ΔV come TENSIONE (x che percorsi sono fissi a priori; in un CIRCUITO sono VINCOLATI e non mi interessa la differenza tra tens. e f.e.m.; $\Delta V \equiv \boxed{V}$ → indica diff.)

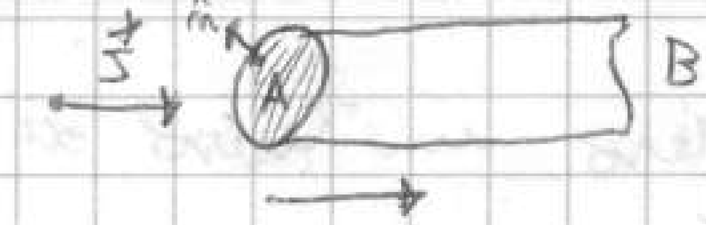
$\vec{J}$ è corr. di CONDUZIONE, se tratto un DIELETTRICO NON POSSO PARLARE di $\vec{J}$, parlo di $\partial\vec{D}/\partial t$ [FLUTTUAZIONI del campo che - macroscopicamente - sembrano cariche in moto], $\vec{J}$ si riferisce a CONDUTTORE, $\partial D/\partial t$ a DIELETT.

La corrente nei circuiti è densità di correnti nei circuiti

② 2) i è immagine scalare di $\vec{J}$, $\underline{i} = \underbrace{\int_S \vec{J} \cdot \hat{n}\, d\sigma}_{[1\text{ def.}]} = \underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{[2\text{ DEF}]}$

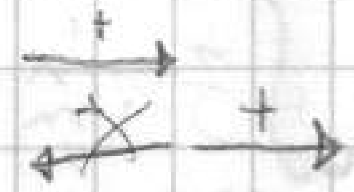
[1. DEF]

(Ovviamente superficie parlo di FLUSSO, conto quante cariche x unità di tempo nella sezione? quando faccio integrale) $\hat{n}$ è versore di giacitura $\perp$ a S) ; nel passaggio allo scalare so solo il numero macroscopico.



[2. DEF] ; Carica vista passare e contata, def. generica.

Cariche hanno segno <>, xò tecnicamente le consideriamo "concordi".

Inversione verso $\equiv$ inv. segno 

Se faccio $\vec{J}\cdot\vec{E}$ ho DENSITÀ di POTENZA.

3) $\vec{P} = \int_{volume} \vec{E}\cdot\vec{J}\, d\,volume = W_{att}\ [W] = V\cdot i$

STAZIONARIETÀ → un regime è stazionario quando grandezze elettriche e magnetiche $\not\propto$ dal tempo ⇒ si semplificano le prime 2 eq. di Maxw.

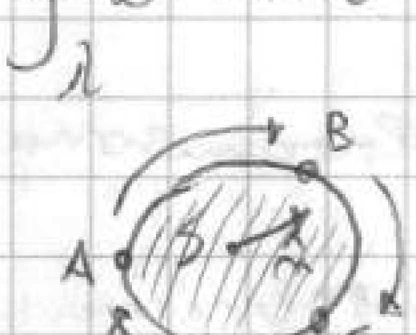
$\frac{\partial}{\partial t} = 0$; C.E. è conservativo e ora parlo di d.d.p. $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$,

$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}}$, non c'è più legame tra $\vec{E}$ e $\vec{H}$. → dimostro,

Applico la divergenza a entrambi! $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H}) = \nabla\cdot\vec{J} \Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{J} = 0}$

(ci portano ai principi di KIRCHHOFF → base approccio circuitale)

Calcolando V lungo un percorso possiamo prenderlo chiuso. $\left[\oint_\lambda \vec{E}\cdot d\vec{l}\right] =$

$= \int_{S_\lambda} (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\hat{n}\, dV = $ (in caso stazionario $\nabla\times\vec{E} = 0$ ⇒ 

$\oint_\lambda \vec{E}\cdot dl = 0$. Linea è decomponibile in un n. arbitrario di tratti, in termini matematici $\lambda = \bigcup_{k=1}^{p} \lambda_k$ (è UNIONE non somma) ; spezzo integrale in somma di int. di linea) $= \sum_{k=1}^{p} \int_{\lambda_k} \vec{E}\cdot d\vec{l}$ [ogni int. di linea è V] $=$

$\sum_{k=1}^{p} V_k = 0$. Ex. Con un voltometro se misuro V tra A e B (deciso prima verso) ho 10 V, se tra B e C ho −5 V, tra C e A ho x forza −5 V. (IMPORTANTE xké ho misura scalare)

Preso un verso di rotazione arbitrario, in condizione di stazionarietà la somma di tutte le tensioni è 0 se il giro è chiuso → 1° PRINCIPIO DI KIRCHHOFF

[Il circuito è qualsiasi percorso chiuso]

x le correnti mi riferisco a $\nabla \cdot \vec{J} = 0$. Prendo volume racchiuso da sup. chiusa; $\int_{\substack{volume\\ [\tau]}} \nabla \cdot \vec{J} \, d\tau = \oint_{s\, chiusa} \vec{J} \cdot \hat{n} \, ds = 0$

↳ [sup. che genera volume, prima era sup. circondata da λ, passaggio da 2 a 3 dim.]; sup. volume è unione di n superfici ⇒ int. è diviso x ogni superficie; essendo $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, ∀ materiale I non si accumula nel volume; $\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$ [PRINCIPIO DI NON ACCUMULAZIONE DI CARICA IN REGIME STAZIONARIO]

Da Maxwell ⇒ Circuiti 4/10/2005

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}\right] \xrightarrow[\text{Stazionarietà}]{\text{Ipotesi}} \left.\frac{\partial}{\partial t} = 0\right] \rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ e } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ si annullano.}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}, \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{J} = 0}$$

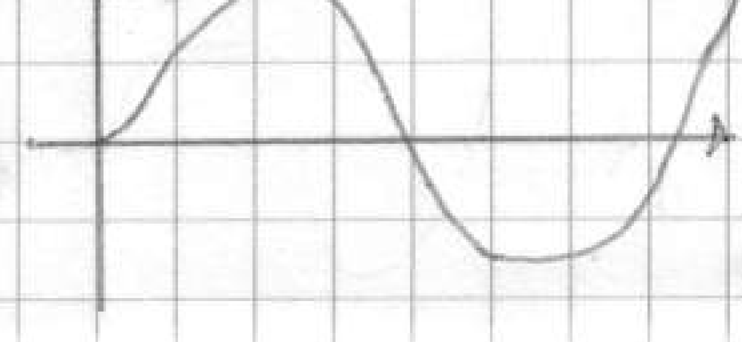
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Principi di Kirchhoff!

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_q$

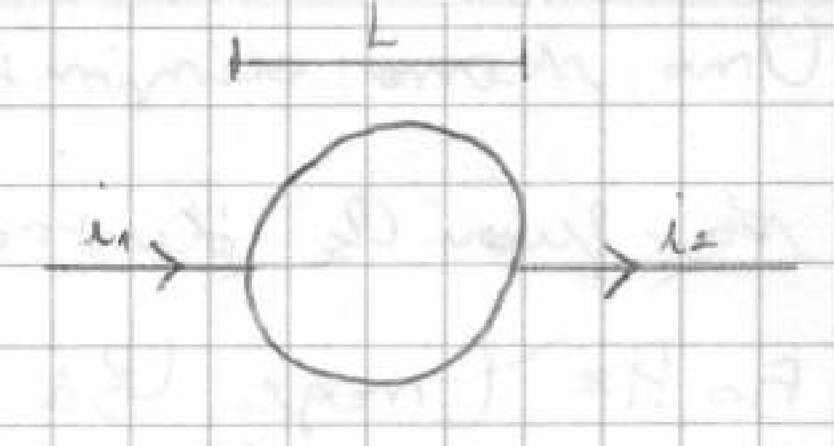
1 Tensione, potenziale: $v = \int_\lambda \vec{E} \cdot d\vec{l}$ (i segni abbandonano senso fisico) 2 Corrente: $i = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS$ [è verso di riferimento, perde sig. fisico]; se faccio int. lungo linea chiusa, 1 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ quindi scelto un verso ho $\sum_{k=1}^{n} v_k = 0$; [in alcuni testi $\sum \pm v_k = 0$]; per 2 si ha che $\sum_{k=1}^{N} i_k = 0$ (qualsiasi superficie CHIUSA), poiché è $= 0$ non importa il segno ⇒ arbitrarietà dei versi [$\sum \pm i_k = 0$].

MA ∃ variazioni del tempo, se grafico ho sinusoide (a meno di disturbi).

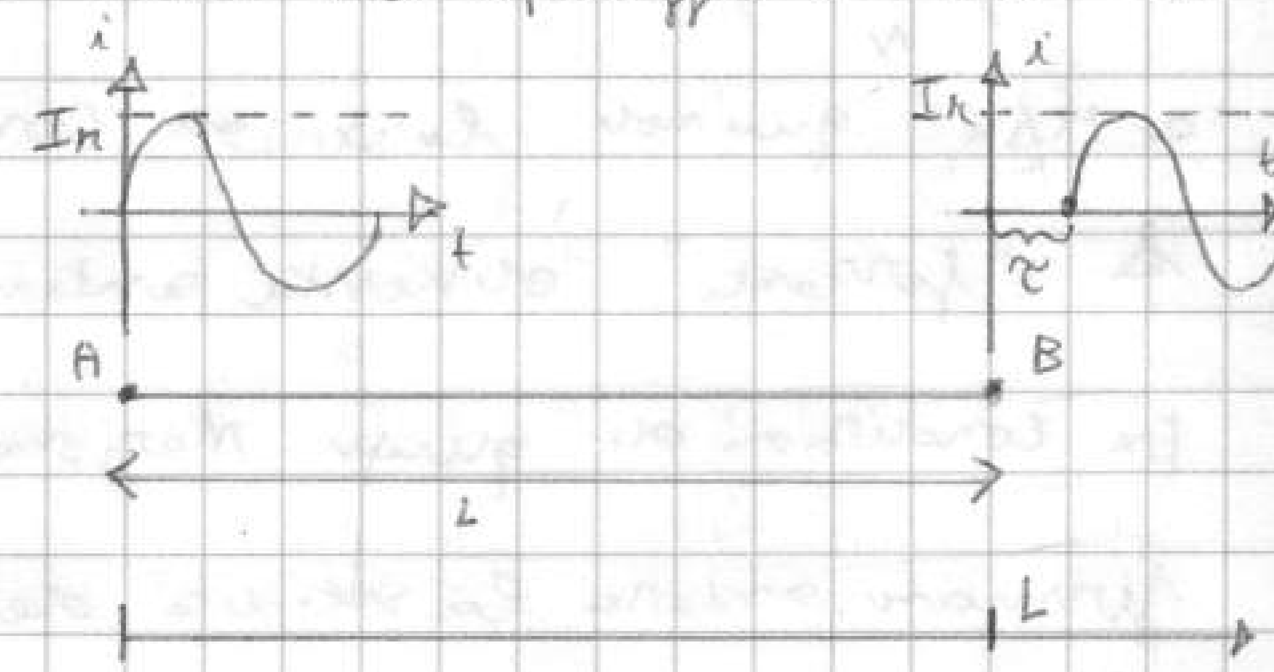


Se ho un regime QUASI-STAZIONARIO ho derivate ≈ 0 $\left[\frac{\partial}{\partial t} \cong 0\right]$, si "approssima".

Ex: superficie con conduttore entrante e uscente, essendo sup. chiusa e ponendo i entrante, per il 1° principio $i_1 = i_2$ [i_2 è concorde con i_1 ma opposta al verso della superficie]. Non "personalizzo" la carica, come se fosse istantaneo, ma "impiegano" del tempo, sembra che sia istantaneo il passaggio di 1 A ad ex [con L arbitrario], una $v = \infty$.



Ex. Conduttore filiforme lungo L. Perturbiamo A [ex. corrente], un osservatore in A vede una sinusoide, in B con stesso cronometro non vedo subito l'onda ma c'è un tempo τ di ritardo ⇒ se prendo sup. che avvolge L non immediatamente la i che entra poi esce [istanti in cui $\sum i_k \neq 0$]. Ci serviamo di sinusoidi (periodiche $\xrightarrow{} T = 2\pi$)



- $i(x=0,t) = I_M \sin(\omega t)$ (I_M è VALORE DI PICCO o MASSIMO)

Seno ha argomento ADIMENSIONALE ⇒ ω è inverso del tempo → ωt deve essere tale che raggiunto $T = 2\pi$ ⇒ $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ → PULSAZIONE (rad/sec),

mentre $\boxed{f = \frac{1}{T}}$ è la FREQUENZA ⇒ $\omega = 2\pi f$ (ogni oscillazione è un ciclo)
↳ misura in $Hz = \frac{1}{s}$

- $i(x=L,t) = I_M \sin(\omega(t-\tau)) = I_M \sin(\omega t - \boxed{\omega\tau})$; quanto vale τ?

[in mezzi non DISSIPATIVI, ex vuoto $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ con $\mu = 4\pi\cdot 10^{-7}$, $\varepsilon_0 \cong 8{,}86\cdot 10^{-12}$ → $c \cong 300.000$ km/s], essendo c la velocità, $c = \frac{L}{\tau} \to \tau = \frac{L}{c}$, sostituendo

$= I_M \sin(\omega t - \overbrace{2\pi f}^{\omega}\overbrace{\frac{L}{c}}^{\tau})$, $\left[\frac{c}{f}\right] = m$ ⇒ definisco λ come LUNGHEZZA D'ONDA (lega la c propria del mezzo nel quale l'onda si propaga e f propria della perturbazione) + raffronto tra caratteristica MEZZO e SORGENTE, ex. ho segnale a 50 Hz [f corrente] ho $\lambda \cong 6000$ km. Considerando $L << 6000$ km [ex. 100 km, linea alta tensione] non c'è problema nel trascurare l'effetto [errore di 100/6000], ho quindi $2\pi\frac{L}{\lambda}$, se $\lambda >> L$, τ è sempre + trascurabile ⇒ $\tau \to 0$. e il regime è QUASI STAZIONARIO.

Uno stesso dispositivo [ex. conduttore di rame] può essere studiato sia fuori che dentro Maxwell. → $c \simeq 300000 \, km/s$, $\lambda = \frac{c}{f} = 6000 \, km$ a $50 \, Hz$ (negli USA si trasmette a $60 \, Hz$); molt. x 10 gli Hz ho $\lambda = 600 \, km$ a $500 \, Hz$, o $\lambda = 6 \, km$ a $50 \, kHz$, o $6 \, m$ a $50 \, MHz$; se [RESISTENZA] $R = \rho \frac{l}{s}$, ad ex a $50 \, MHz$ è oggetto passa dalla quasi stazionarietà a MAX, quindi la i di conduzione è diventata di spostamento $\left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq 0\right]$, il "fornello" diventa antenna, l'ambiente è dispositivo x il campo.

In condizioni di quasi stazionarietà (sebbene le grandezze varino nel tempo) permane ancora la validità del principio di K. alle correnti e alle tensioni.

SISTEMI A PARAMETRI CONCENTRATI

$\tau \to 0$ in Q.S. : Oggetti da modellare hanno loro forma e geometria, $L \to 0$, $c \to \infty$ con $L \to 0$ perdo questa caratteristica.

Ex. CONDENSATORE a f. piane e // di sup. S a distanza d con dentro materiale la sua capacità $C = \varepsilon \frac{S}{d}$ (a prescindere da Kir. presupponendo che il dispositivo non irradia, già trattato in regime Q.S.). Lo stesso x la resistenza $R = \underbrace{\rho}_{\to \text{ resistività}} \frac{l}{s}$ di un cilindro conduttore (come antenna se aumento f rispetto a l); se ad ex era resistore con forma <> valore era <>. [Nei circuiti R e C sono assegnati]

$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \to \infty \; [\Rightarrow \mu \cdot \varepsilon = 0]$

- La regione N è il VUOTO CIRCUITALE (vuoto "matematico" in ambito Q.S.) e $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$, $\sigma = 0$ (conducibilità), $E_m = 0$ (, da $\overrightarrow{J}$), $J_m = 0$. Non c'è nulla, quindi se voglio modellare circuito lo immergo in questo vuoto; il circuito è oggetto delle analisi, il resto non ci dice nulla.

- La regione EQP [—] è dove $\exists$ è EQUIPOTENZIALITÀ (o "CONDUTTORE PERFETTO" o "CORTOCIRCUITO IDEALE" o "TERMINALI DI INTERESSO di una REGIONE" o "MORSETTI D'INTERESSE")
$\mu = 0$, $\varepsilon = 0$ (anche qui né fen. elett. né magn.) $E_m = 0$, $J_m = 0$, ma $\sigma \to \infty$ (non è SUPERCONDUTTORE xhé questi generano campi magnetici)

(6) Da $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_m) + \vec{J}_m$ ho $\infty \cdot 0$ indeterminato. $\Rightarrow \vec{J}$ esiste

finita ma quella formula non é + valida.

- la regione C descrive il CONDENSATORE ideale con $\mu = 0$ (no ind. magn.) $\varepsilon \neq 0$, $E_m = 0$, $J_m = 0$, $\sigma = 0$. A causa di ε qui esiste un dielettrico puro (ex. c. piano a f. //), qui c'é un certo valore di capacita' calcolato a parte con legge del campo e non tramite circuiti.
- La regione R e' RESISTORE IDEALE ($\mu = 0$, $\varepsilon = 0$, $E_m = 0$, $J_m = 0$, $\sigma \neq 0$), anche qui tramite legge del campo si calcola la resistenza.
- Con $E_m \neq 0$ ho regione FEM, GENERATORE IDEALE
- Con la regione LR $\mu \neq 0$ (INDUTTORE IDEALE o MUTUI INDUTTORI IDEALI)
- Con I_g, $J_m \neq 0$ → perche $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ non e' risp.

Queste regioni da sole fanno dei parametri concentrati. Ciascun P.C. e' collegato all'altra x formare un aggregato tramite EQP (ex per collegare regione R e C devo interporre regione EQP che non altera proprietà). Una reg. arbitraria e' data da $\square$, quella equip. —, la R e' $\sim\!\!\sim$ (al simbolo si attaccano i morsetti), la C è $\dashv\vdash$

5/10/2005 [PARAMETRI CONCENTRATI]

$$\text{Da} \begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho_q \end{cases} \quad \text{a STAZIONARIETA' o QUASI STAZIONARIETA'} \rightarrow \begin{cases} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{PRINCIPI DI KIRCHHOFF}$$

$(\lambda >> L)$

↓

SUDDIVISIONE IN REGIONI CARATTERISTICHE

$$\begin{cases} \sum v_k = 0 \ \text{(percorsi chiusi)} \\ \sum i_k = 0 \ \text{(superfici chiuse)} \end{cases}$$

(se $\lambda >>$ lunghezza dispositivo trascuro derivate) [comportamento di "insieme"] [valgono nella struttura nel suo insieme]

$C \to \infty$, $\tau \to 0$, $L \to 0$

→ Prima questa per buona e' come se fosse $\mu\varepsilon = 0$ ⇒ decomposizione in regione diverse, quindi σ, E_m, J_m possono avere qualsiasi valore e determinano regioni <> (importante e' che $\mu\varepsilon = 0$).

- Il VUOTO CIRCUITALE coincide con il foglio (non si rappresenta); V e' misurabile coltovuoto. Il DUALE del vuoto e' la regione EQP o cortocircuito [$\sigma \to \infty$], utile x collegamenti tra regioni "—" (simbolo è segmento"). Se consr. $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_m) + \vec{J}_m$ ho $\infty \cdot 0$ (ind.) [non c'è diff. di pot.], questa legge non è + valida [se disegno solo — , $J=0$, deve essere chiuso] → [associo morsetti d'ingresso a qualsiasi regione].

• La regione CAPACITÀ aveva valori nulli tranne $\varepsilon \neq 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$ [$\mu = 0$], mentre $\nabla \times \vec{H} = \boxed{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$ → ma non $\exists$ mai insieme. Se non collego C al circuito non accade nulla.

Regioni comunicano tranite $\vec{J}$, →▭→ ; dentro a C, $\vec{J}$ si è trasformata in $\vec{D}$ che fa uscire corrente solo tramite morsetti. SE non c'era Q.S. iniettando $\vec{J}$ non potevo dire $\mu=0 \Rightarrow$ accoppiamento $\vec{H}$ e $\vec{E} \Rightarrow$ irraggiamento. ($\vec{J}$ USCIVA dalla regione, ex. ANTENNA). La simbolo della regione C è la ⊣⊢ [⊣⊢]

• regione L [$L\mu$]: $\mu \neq 0$, $\varepsilon = 0$

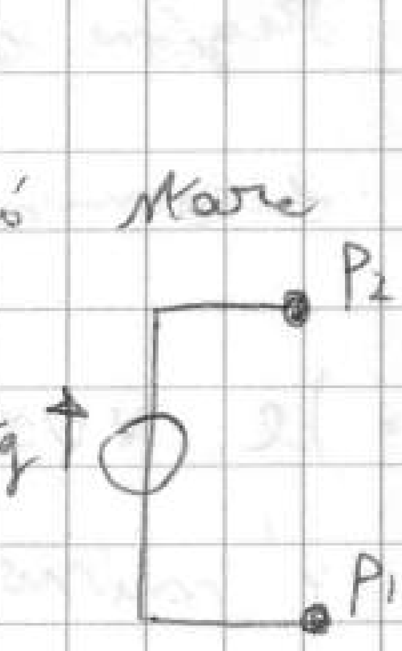
Qui $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$ sembra che viola la legge di k. ma devo considerare TUTTO il circuito (è normale che in alcune regioni sia $\neq 0$). Il simbolo è —⌇⌇⌇— con un valore calcolato a parte: L = INDUTTANZA.

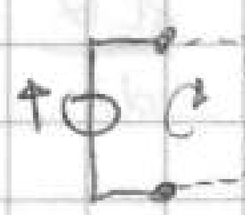
• La regione R, resistore ideale, ha $\sigma \neq 0$, simbolo —ΛΛΛ— → [⊣⊢, —Ⓥ—]

• La regione FEM, generatore ideale ha 2 simboli: —⊖— (sarà definito un valore di tensione) $\overset{A}{\circ}\overset{+}{—}⊖—\overset{B}{\circ}$ $V_A - V_B$ → oppure la freccia (il + indica che termine a lato non ha cambiato segno), può accadere di avere + generatori. [freccia ↙ indica $V_A - V_B$] $\overset{P_1}{\circ}$—⊖—$\overset{P_2}{\circ}$ (10) → gen. di tensione / $V_{P_2} - V_{P_1} = 10$ V, uguale a $\overset{P_1}{\circ}$—⊖—$\overset{P_2}{\circ}$ (−10, V_q), verso di riferimento importante in equazioni

• Il GENERATORE IDEALE di CORRENTE (con $J_m \neq 0$) ha il simbolo —⦶→ i_q [ovviamente va inserito in circuito, altrimenti x kirch, $\sum i = 0$].

R, C, L ed EQP sono regioni "passive", il g. di T. può stare da solo, ex: non posso cortocircuitarlo ($V_q \neq 0$), la freccia dice che $V_{P_2} - V_{P_1} \neq 0$ se metto EQP tra P_2 e P_1



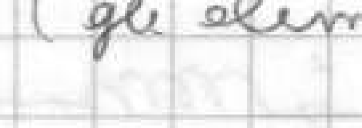
allora $V_{P2} - V_{P1} = 0$ → PARADOSSO (mentre il duale gen. di corrente funziona solo se in circuito). La regione N è come se "chiudesse" la FEM x calcolare Kirch,  V_0, è come se idealmente fosse chiuso nel vuoto, se faccio la circuitazione ↻, il vuoto restituisce V_0 ⇒ $V_g - (\uparrow$ opposto a ↻)

$\xrightarrow{V_g = V_0}$

$V_0 = 0$ → dalla parte del vuoto misuro stessa V del generatore [V_g proviene da $\int \vec{E}_m \cdot dl$ e $\nabla \times \vec{E} \neq 0$, ma Kirchhoff vuole che il vuoto "sistema" tutto]

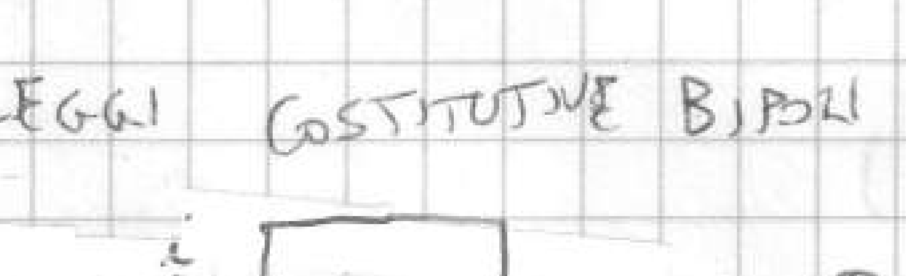
Se ad ex. ho  farò $V_g - V_R = 0$ → $V_R = V_g$. Con gen. di tensione a volte posso capire V a capi di reg. passiva. Ma ad ex quanto vale i? Non lo so.

Da leggi costitutive del mezzo si passa a leggi cost. delle regioni, le reg. legg. sono "cortocircuito" o "morsetti", mentre le altre accessibili da queste sono i BIPOLI. | BIPOLI ATTIVI provengono da generatori di V o i; R, C, L non danno fenomeni elettrici senza (aver mai visto) generatori → si chiamano BIPOLI PASSIVI.

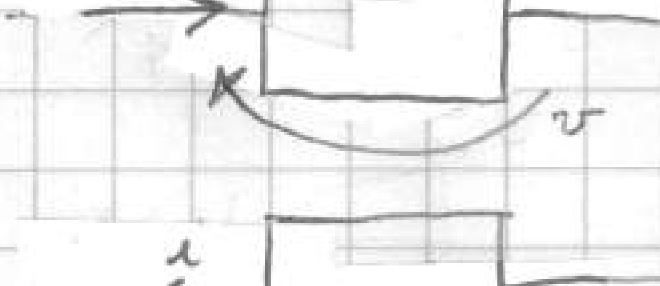
I Bip. C e L ricordano la presenza di un generatore e si chiamano BIPOLI CON MEMORIA (nella "genesi" di C uno è scarico, se è carico qualche gen. l'ha caricato). Si possono definire la R, L, C come FUNZIONI del TEMPO (gli elementi sono IDEALI → simulo componenti REALI), ex RESISTORI TEMPO-VARIABILI o sintonia tra L e C (ex. sintonizzatore radio che è da prodotto C e L, modulo capacità C). Per indicare grandezze variabili si fa così:  (noi tratteremo i TEMPO INVARIANTI).

//

LEGGI COSTITUTIVE BIPOLI R, L, C

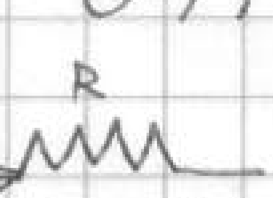


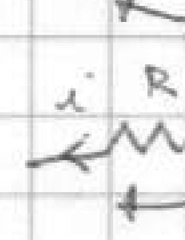
(1) [← rappresenta tensione, → verso x scrivere leggi, verso corrente (V e i sono SCALARI, non c'entrano

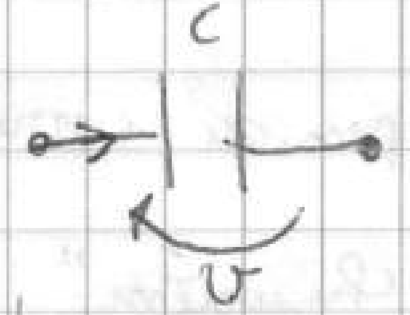


(2) vettori, versi di riferimento, ≠ da segno flusso cariche)]

Si devono legare V e i (CONVENZIONE degli UTILIZZATORI (1) e CONVENZIONE DEI GENERATORI (2)),

- R:  vale la LEGGE di OHM $\boxed{V = R i}$

 vale $\underline{V = -Ri}$

– C:  Noto il valore della capacità, $\boxed{i = C\frac{dv}{dt}}$

Poiché $Cv = Q$ su un'armatura, $\frac{d}{dt}(Cv) = \frac{dQ}{dt} = i$, il 1° termine

$$C\frac{dv}{dt} + \underbrace{v\frac{dC(t)}{dt}}_{} = i$$ → in circuiti T. inv. sarà pari a 0

[Con l'altra convenzione il segno sarà opposto]

– L: è INDUTTORE IDEALE è duale di C [lega v e i risp. a C]

$\boxed{v = L\frac{di}{dt}}$ → proviene da accopp. magnetici

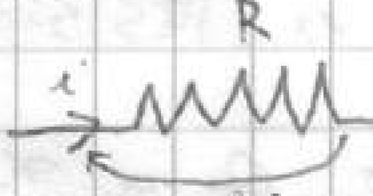
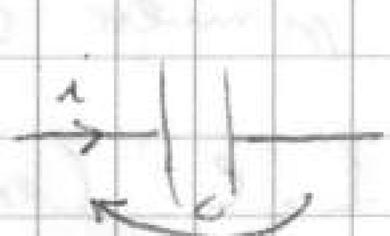
⇕

Le leggi costitutive di v e i sono già scritte, xké sono indipendenti tra loro, FEM ha ΔV ∄ da i e viceversa x generatore di i, la i ∄ da v.

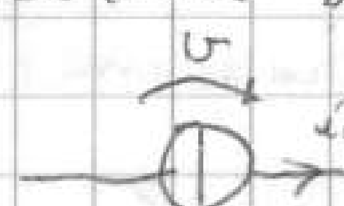
EQP è come FEM che eroga $v=0$ oppure R con resistenza $=0$ (solo x collegamenti)

(www.des.uniroma3.it ; laboratori elettrotecnica → intro. ai circuiti) 6/10/2005

[LEGGI COSTITUTIVE BIPOLI] (legate v e i)

 $v = Ri$;  $i = C\frac{dv}{dt}$;  $v = L\frac{di}{dt}$

BIPOLI PASSIVI / CONVENZIONE DEGLI UTILIZZATORI

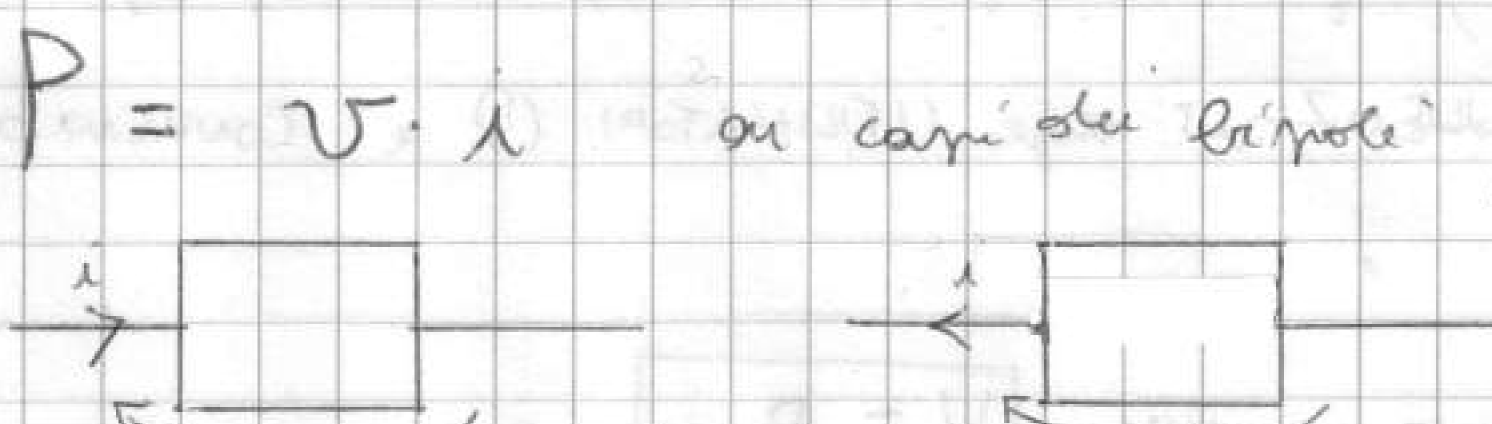
 v_g assegnata $\forall i$,  i_g assegnata $\forall v$

BIPOLI ATTIVI (CONVENZIONE dei GENERATORI)

⇕

POTENZA [W] - WATT

$$P = v \cdot i \text{ ai capi del bipolo}, \quad P \gtreqless 0$$



P ASSORBITA P EROGATA

- Fissata la conv., se $P > 0$ il comportamento di quel bipolo è concorde e ASSORBE ENERGIA

- Se ho conv. generatori, una $P > 0$ è / che bipolo FORNISCE POTENZA

Fissata una convenzione se $P < 0$ bipolo è discorde.

Ex: resistore, ho $v = 10V$ e $i = 2A$; se $i = -2A$ avrei scelto altra conv.

$i = 2A$ R

$v = 10V$

$$P \; v = Ri \; (> 0)$$

$$\boxed{P} = v \cdot i = R i \cdot i = \boxed{R i^2} = 20\,W \; (> 0) \rightarrow P. \text{ assorbita}$$

Con la convenzione opposta la i sarebbe stata $< 0 \rightarrow i = -2A \Rightarrow P = -20\,W$

Bipolo eroga $-20\,W \Rightarrow$ assorbe $20\,W$. Qui $P = v i = \boxed{-} R i \, i = -Ri^2 = -20\,W$
→ Convenzione <>

H

PASSIVITÀ DI UN BIPOLO (assorbe potenza)

$$\underset{\text{energia}}{E} \; [\text{Joule}] = [N\,m] \; ; \; \underset{\text{potenza}}{P} = \frac{dE}{dt} = \left[\frac{\text{Joule}}{s} \right]$$ - limitato da tempo x sprecare energia

Il "fabbisogno energetico" è meglio esprimerlo come "fabbisogno di potenza"

$\mathcal{E}$ va accoppiata a tempo di sprigionamento.

PASSIVITÀ:

utilizzando la conv. degli utilizzatori

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{t} v \cdot i \, dt \; [P\,dt]$$ (t } istante osservazione) ; se $\mathcal{E} \geq 0$ è PASSIVO, se $\mathcal{E} < 0$ è ATTIVO

- Applicando a $\boxed{R}$ ho sempre > 0 $\quad [\,P = Ri^2 \geq 0 \;\; \forall i \text{ in c.d.u.}\,]$
- Verificando $\boxed{C}$ (ideale):

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{t} v \, C \frac{dv}{dt} \, dt$$, cambio [integro, estremi nella v] → assumo come ipotesi che all'inizio fosse $v = 0$ ai suoi capi

$$\mathcal{E} = \int_{0}^{v(t)} C v \, dv = \frac{1}{2} C v(t)^2$$ → sempre $\geq 0 \Rightarrow$ sempre PASSIVO

- Anche per L stessa cosa, essendo duale con C, $\mathcal{E} = \frac{1}{2} L \, i(t)^2 \Rightarrow$ sempre PASSIVO

H

BIPOLI CON MEMORIA

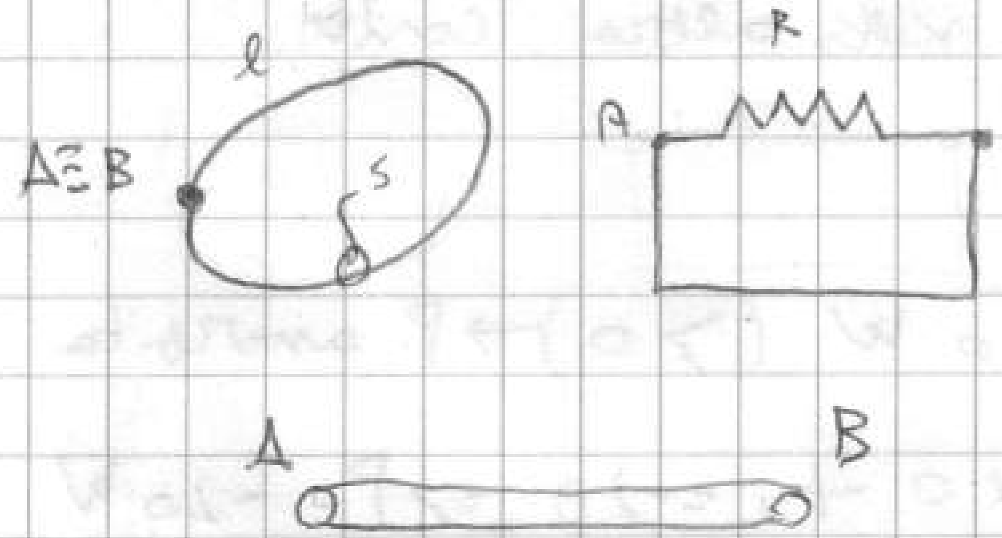
$$i = C \frac{dv}{dt} \rightarrow \int_{v(0)}^{v(t)} dv = \int_{0}^{t} \frac{1}{C} \, i \, dt \rightarrow v(t) - v(0)$$ → MEMORIA INDUTTORE (x L c'è $i(0)$)

è come partire con certa memoria.

H

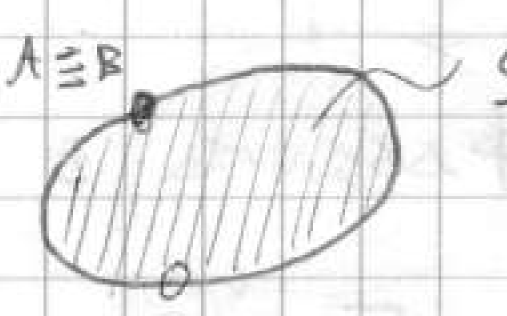
INDUTTORE

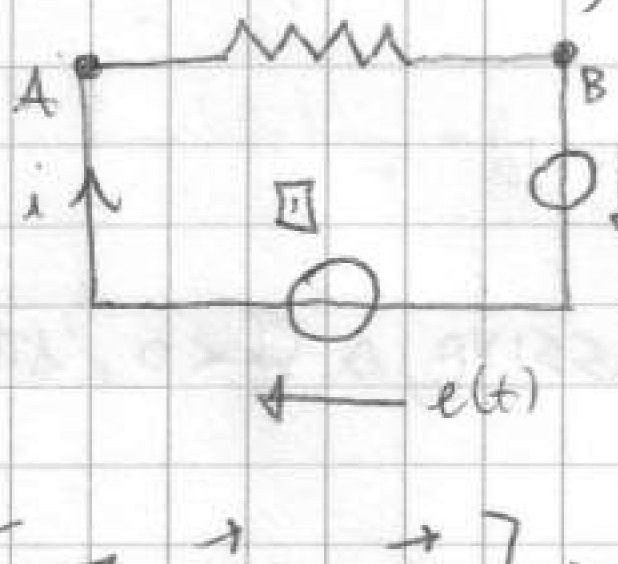
(cilindro di rame che forma una spira adagiato in regione di spazio)



Se è conduttore di rame $R = \rho \frac{l}{S}$, potrebbe essere un resistore ma è incompleto, xké i morsetti non sono identificabili; come simulare? Devo dire che a hai pot. di b → uso sup. EQP

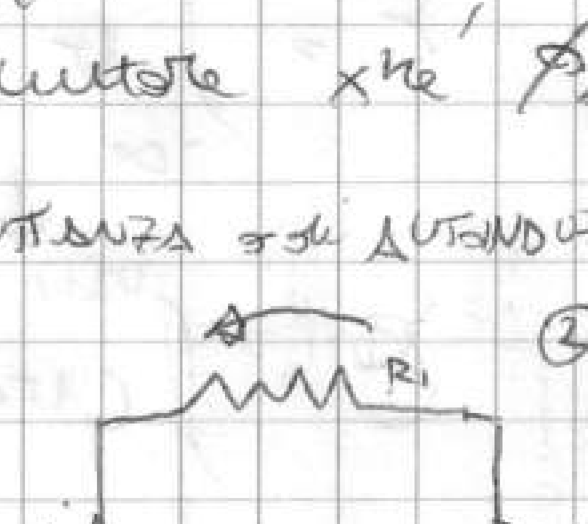
Ora dall'esterno c'è sorgente in grado di produrre B variabile nel tempo, captato dalla spira in S_ϕ, c'è campo magnetico esterno che varia nel tempo, conoscendo μ, $\vec{B} = \mu \vec{H}$. Per capire il flusso captato dalla spira: $\int_{S\phi} \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS_\phi = \phi_E(t)$, → altrimenti non si capta. Legge afferma che sorge FEM $e(t) = -\frac{d\phi_E}{dt}$ [F/N/LENZ], c'è campo elettromotore, considero $e(t)$ concentrata nel generatore di tensione $\boxed{1}$





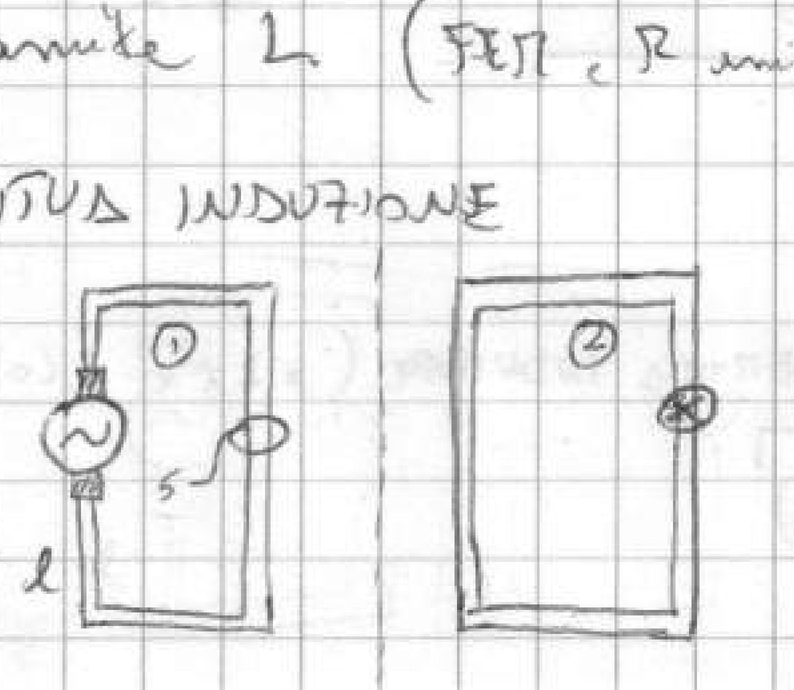
con un verso opp. alla var. di flusso, ma circuitalmente orientamento i è arbitrario. Se nella spira circola altra corrente, anch'essa genera altro campo magnetico $[\nabla \times \vec{H} = \vec{J}]$ → in st. di equilibrio ho flusso <> da calcolare, perché $\phi_{TOT} = \phi_E + \phi_{AUTOPRODOTTO}$, c'è flusso di reazione dovuto a corrente che gira, quindi dovrei mettere un altro generatore: $e_L = -\frac{d\phi_{AUTOPRODOTTO}}{dt}$ $\boxed{2}$ con un verso che ostacola $e(t)$. Si ricorre quindi all'induttore xké $\phi_{AUT.}$ = (proporzionale a corrente che scorre) $L\,i$ → COEFFICIENTE D'INDUTTANZA o di AUTOINDUZIONE

Il modello risultante sarà ②:



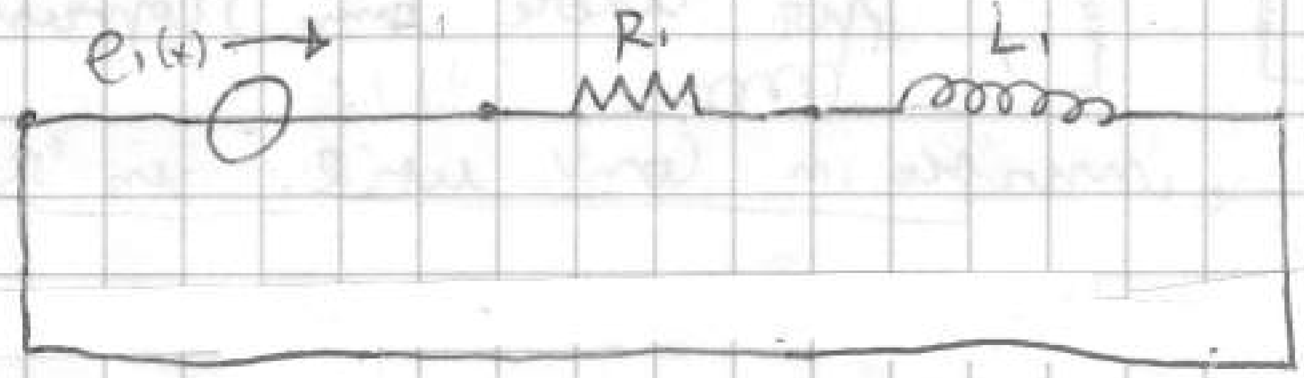
Se inserisco generatore considero effetto tramite L (FEM, R uniformi nel circuito)

MUTUA INDUZIONE



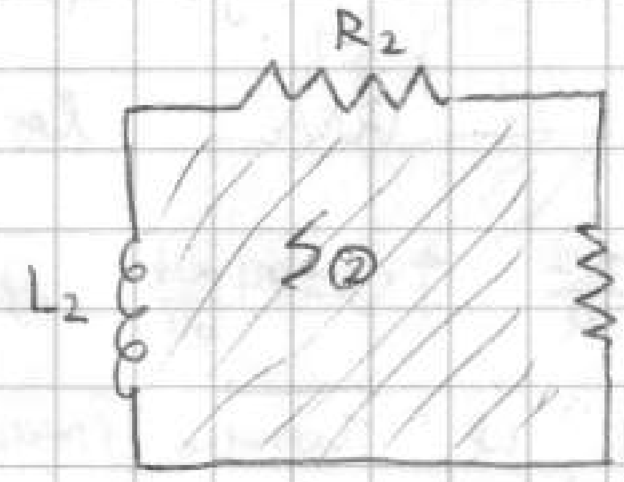
Con conduttore di rame e ora circuito reale, e a lato filo di rame con lampadina.

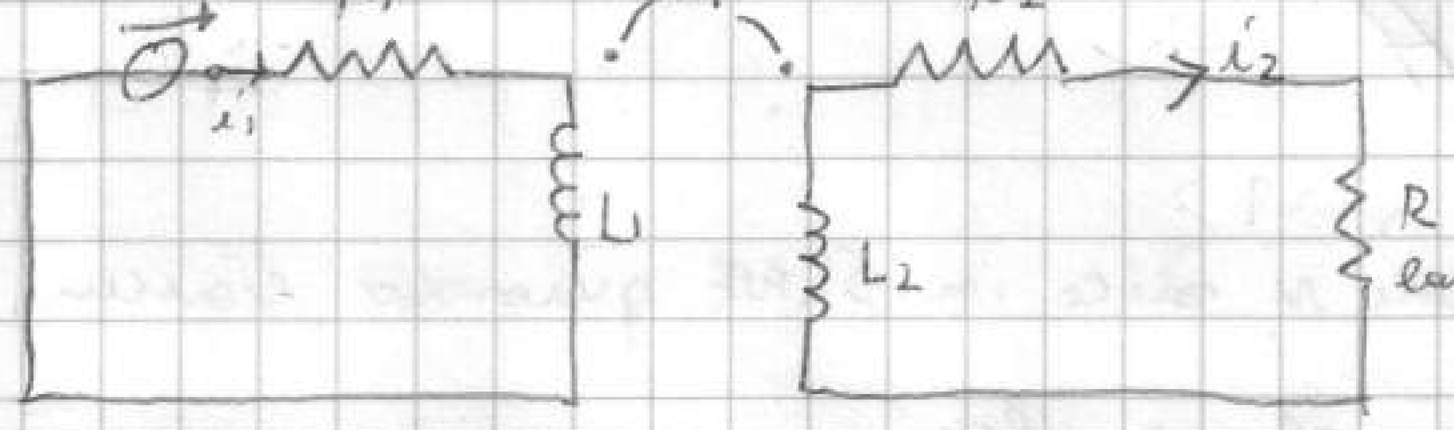
① Studio componenti. Prendo il generatore ideale che simula comportamento;



filo lungo e con sezione S che ha una certa resistenza, è variabile scorre e c'è L, chiudo.

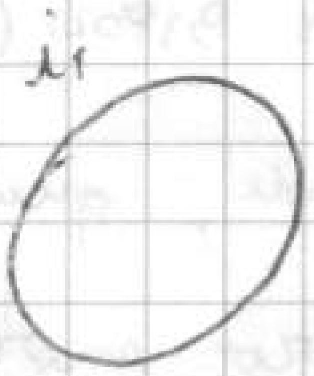
② Ho questo schema con lampadina schematizzata come resistenza, potrei chiudere, ma come si accende lampadina? In realtà ① genera flusso che si concatena con $S_②$ ⇒ inserisco induttore, ma il generatore? c'è altro flusso concatenato da parte di ② | MUTUA INDUZIONE. C'è effetto magnetico autoprodotto e effetto di mutua induzione dai due circuiti.

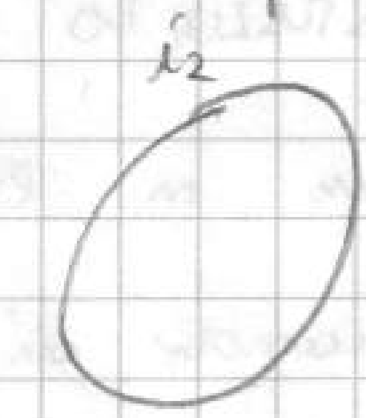




MUTUA INDUTTANZA 07/10/2005

Due spire creano flusso dovuto a mutua induzione det. dal parametro M. Φ_1 è quello "abbracciato" da spira 1 (2 da varie) $= \Phi_{11} + \Phi_{12}$ (flux. conc. con 1 dovuto a i_1 + ... dovuto a i_2) e





$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}$. Trattando mezzi / materiale lineari, affermo: + M non è funzione, è costante

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_1 i_1 \boxed{\pm} |M| i_2 \\ \Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21} = L_2 i_2 \pm |M| i_1 \end{cases}$$

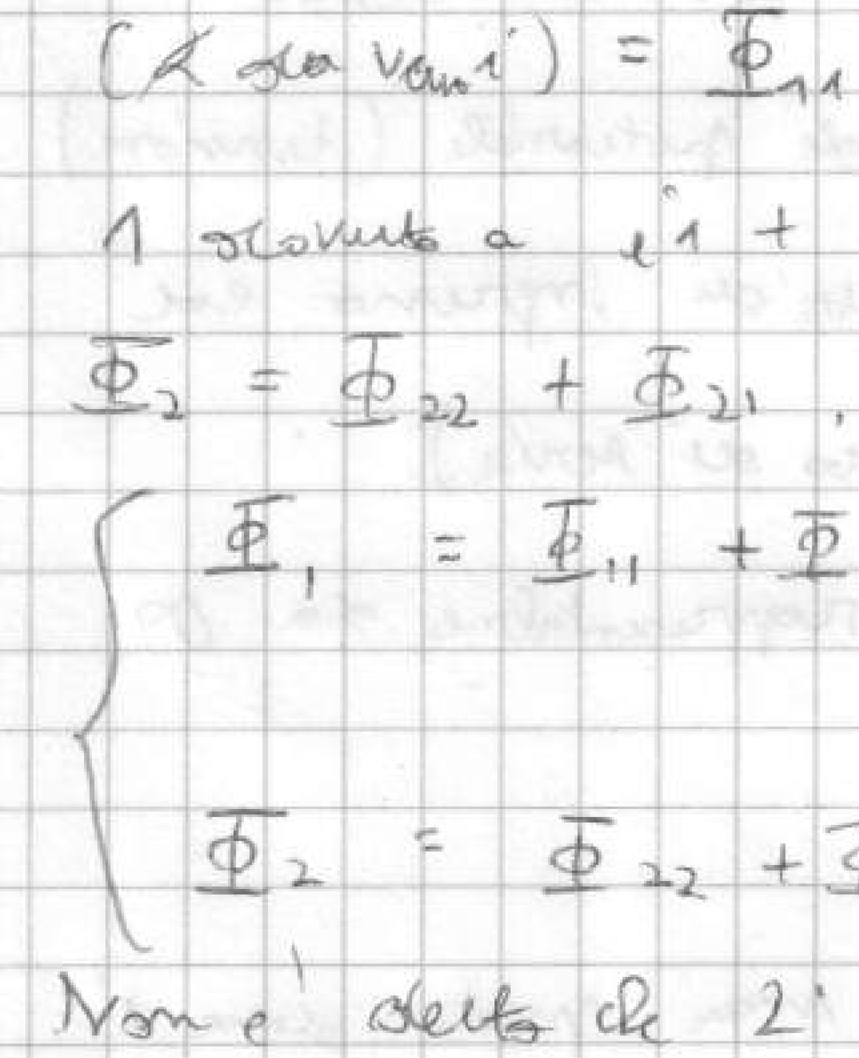
+ più errore - ; unica + L

→ PRINCIPIO SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI valido solo se mezzo è LINEARE

Non è detto che 2° contributo è sempre positivo (è Σ algebrica) $M \gtrless 0$

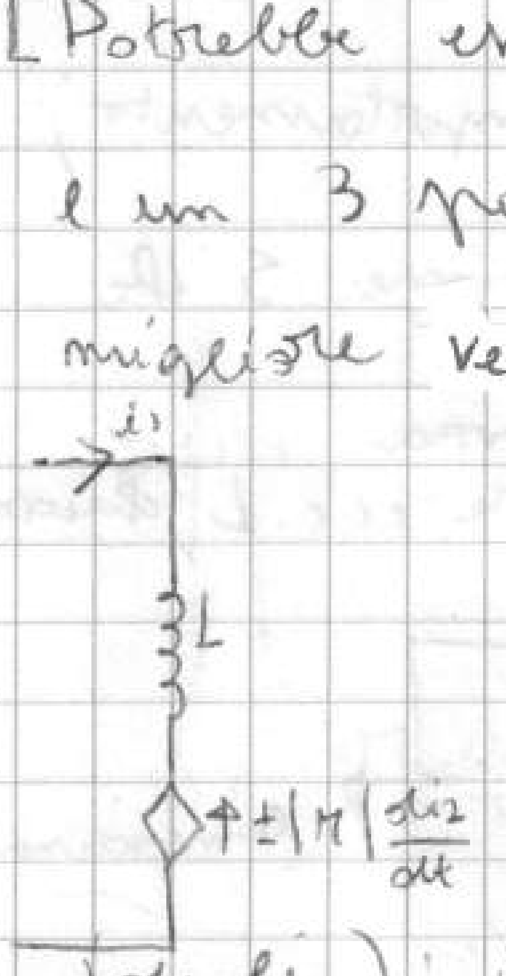
legge LENZ $e = -\frac{d\phi}{dt}$ [conv. generatori], considerando conv. utilizzatori $v = -e = \frac{d\phi}{dt}$

↳ Non c'è semplice bipolo + non c'è rapporto fisso tra v ai morsetti e i



Mi accorgo che compare i_2 ① perché $v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} \pm |M| \frac{di_2}{dt}$ e per ②, $v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm |M| \frac{di_1}{dt}$ [v_1 e v_2 sempre accoppiate]. Devo pensare tutto il blocco così ho un DOPPIO BIPOLO o 2-PORTE (cons. le due coppie di morsetti).

[Potrebbe essere 3° circuito => avrei distinte le M => avrei un QUADRUPOLO e un 3 porte.] Mutua induzione]$\overset{M}{\wedge}$[, per avere una rappresentazione migliore vedo la legge costitutiva e inserisco in conv. util. un "rombo"

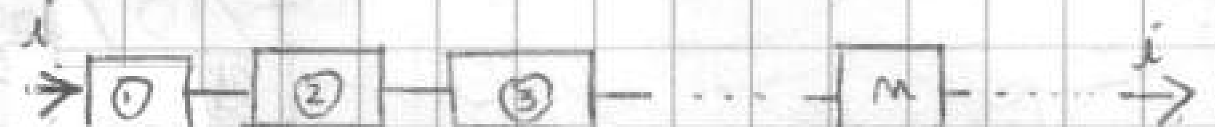


considerato come generatore di tensione di valore $\pm|M|\frac{di_2}{dt}$, lo stesso nell'altra porta, dopo non sono v a prescindere di i, ma non sono INDIPENDENTI ($\neq$ da gen. di tensione ideale), il "rombo" indica gen. di tensione "controllato" da altra grandezza, CONTROLLATO IN CORRENTE oppure GENERATORE PILOTATO DALLA CORRENTE (proviene da parte legge di Lenz). [possono essere <> tipi di dipendenze]

#

SERIE TRA BIPOLI (CORRENTE)

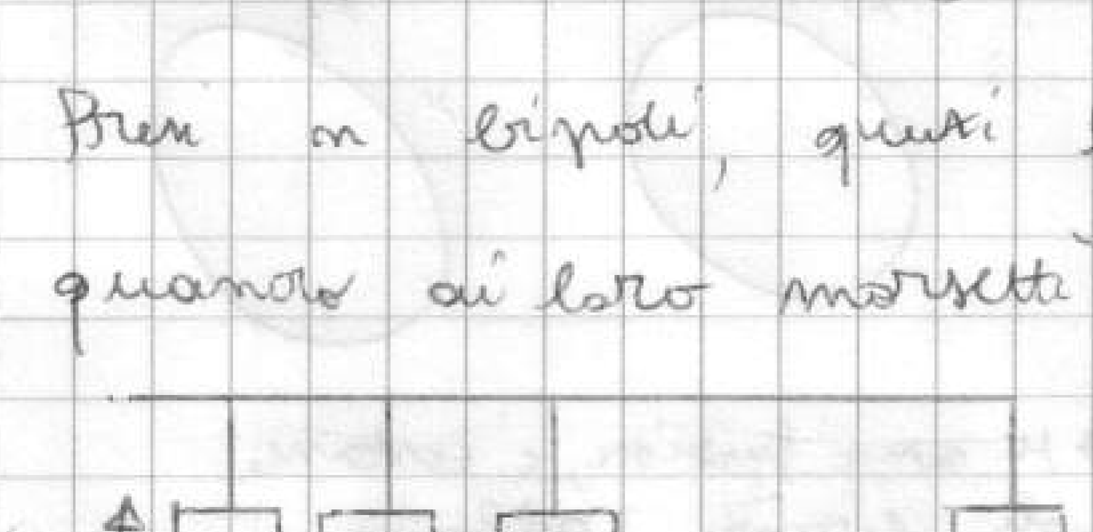
Un numero n arbitrario di bipoli si dice in SERIE quando ciascun bipolo è percorso dalla stessa i degli altri.



#

PARALLELO TRA BIPOLI (TENSIONE)

Presi n bipoli, questi formano un PARALLELO o si dicono in PARALLELO quando ai loro morsetti agisce la stessa differenza di potenziale (tensione).



] eqp. tra TUTTI i morsetti di ingresso e uscita. (DUALE del concetto di serie).

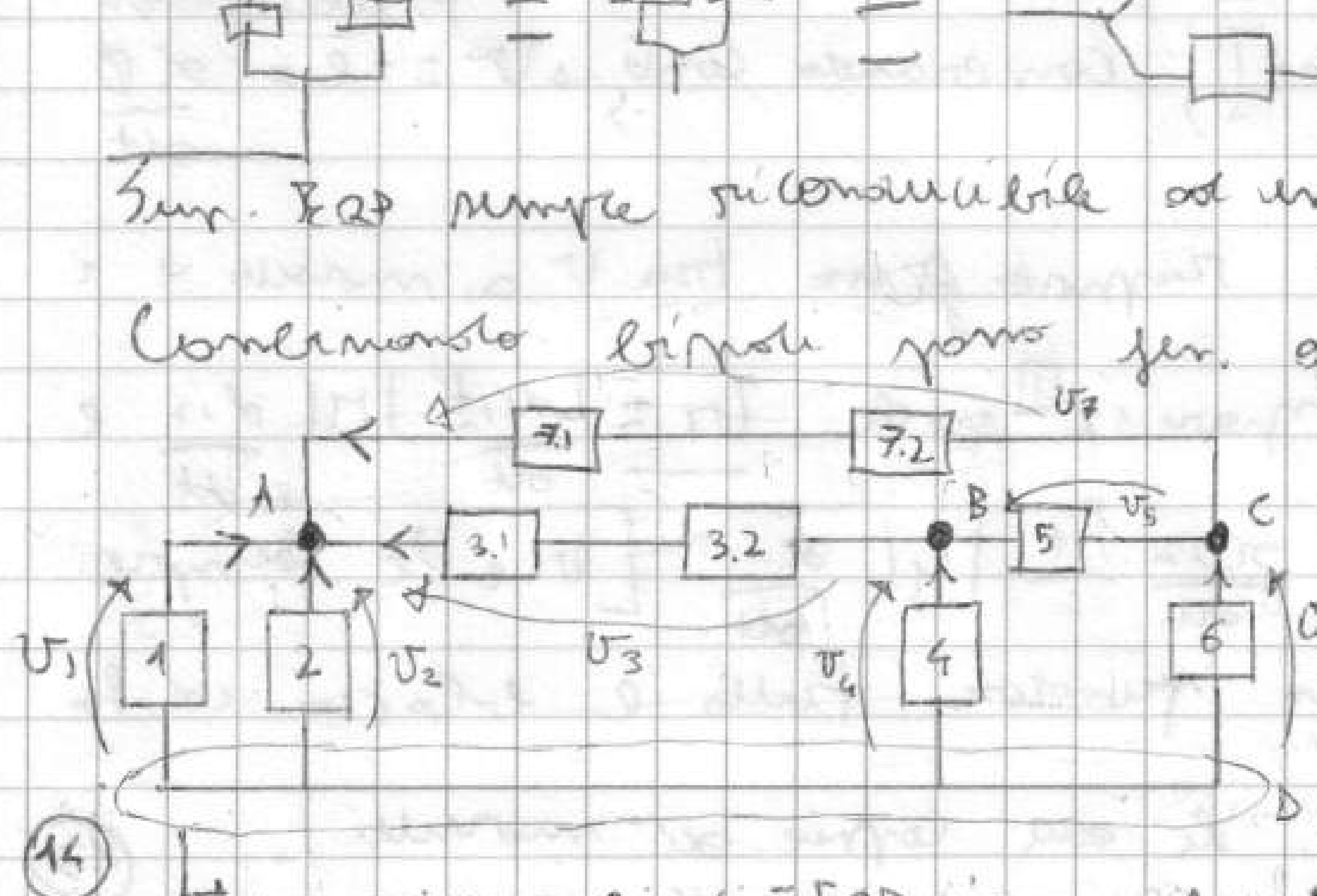
[Stessa rit. elettrica è rappresentabile da ∞ circuiti <>]

#

[Non c'è mai punto dove i va da altra parte]

Superf. EQP sempre riconducibile ad un punto (•) → unico morsetto d'ingresso.

Combinando bipoli posso gen. qualsiasi circuito. Ex:



Ho sempre bisogno di percorso chiuso [tranne gen. i che non può chiudersi nel vuoto altrimenti genera i nulla]

↳ non agiscono bipoli ≡ EQP, è come se fosse • dove convergono 1, 2, 4, 6 => è il 4° nodo D

LATO: è luogo, percorso, dove i non cambia (costituito da bipolo o Σ di bipoli) [memoria]

NODO: un qualsiasi pto del circuito dove convergono almeno 3 lati, dove troviamo 2 lati lo si cons. come "NODO DI CALCOLO". [lett. maiusc.]

EQP è mutuo D, attento xché ancora a vedere la ΔV.

In ex. abbiamo disegnato circuito con 7 lati e 4 nodi. Problema è calcolare le V e le i ai capi dei lati circuito. Se tutti fossero passivi (esclusi cond. con memoria $\neq 0$) avrei $V=0$ e $i=0$. Se invece trovo almeno 1 gen. indipendente valori saranno stravolti.

Da un lato ho i P.d.K. e dall'altra le LEGGI COSTITUTIVE BIPOLO, da combinar.

P.d.K. alle i dice che $\forall$ sup. intorno a circuito Σ $i=0$.

P.d.K. alle V dice che $\forall$ circ. ho ΣV, presa V. percorrenta $\pm \Sigma V = 0$.

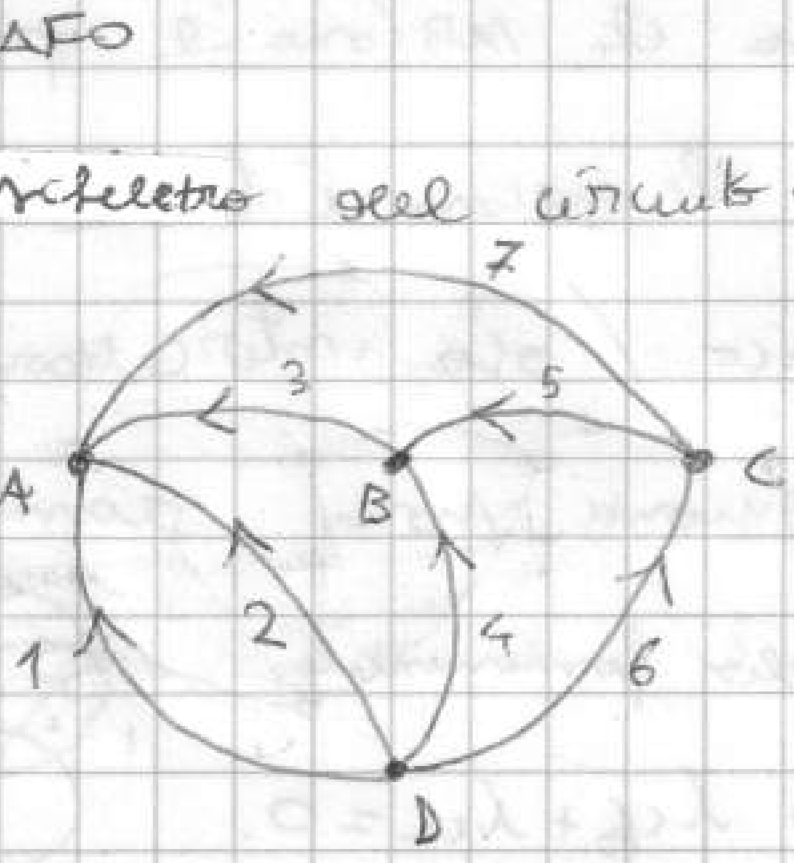
Quante eq. devo scrivere x dare senso a sistema? Incognite sono i che fluiscono (immaginiamo che $\exists$ solo gen. di tensione $\Rightarrow$ so che ho certa V), negli altri bipoli ho $V = Ri$, $V = L\frac{di}{dt}$, $i = C\frac{dV}{dt}$ $\Rightarrow$ note le i ho anche le V. → quante eq. a percorsi e sup. chiuse devono fare

Ho tante incognite quanti sono i LATI del circuito (dalla def.). i [n. di lati] = 7 equazioni. (posso scriverne tot di 7, ma solo queste hanno senso a sistema). Mettendo le V a ciascun lato, facendo un percorso chiuso di lati, la $\Sigma V = 0$. Ex. $V_1 \mp V_3 - V_4 = 0$, potrei anche prendere $V_1 - V_7 - V_6 = 0$.

Per le i che coinvolgono sup. chiuse considero tagli che separa in 2 parti il circuito. È come si facesse conv. generatori sui lati. Frecce nel circuito sono arbitrarie xché il valore numerico prende quei V. di riferimento.

GRAFO

È scheletro del circuito dove i • sono i nodi [stilizzazione]. Dall'ex:



Lato unisce sempre 2 nodi [è "orchetto"]

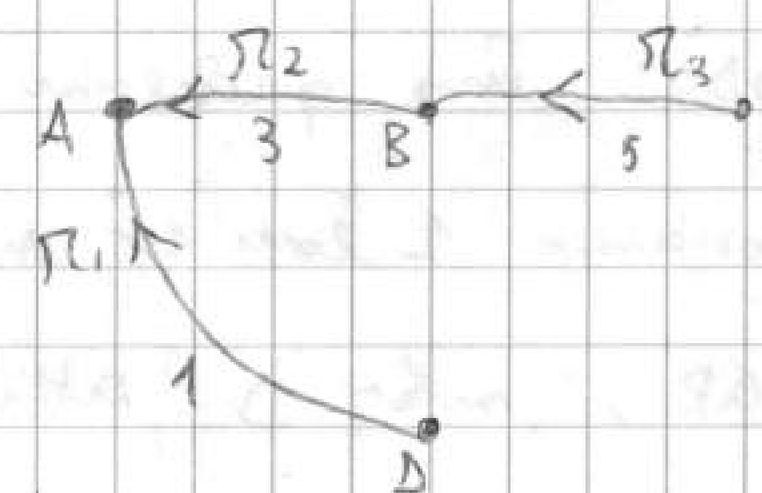
Con orientazione scelta, con frecce ho GRAFO ORIENTATO

Su ogni lato c'è conv. generatori (esterno dai bip.)

2 è in // con 1 etc..

Trucco è prendere dal grafo UN mio "ALBERO"

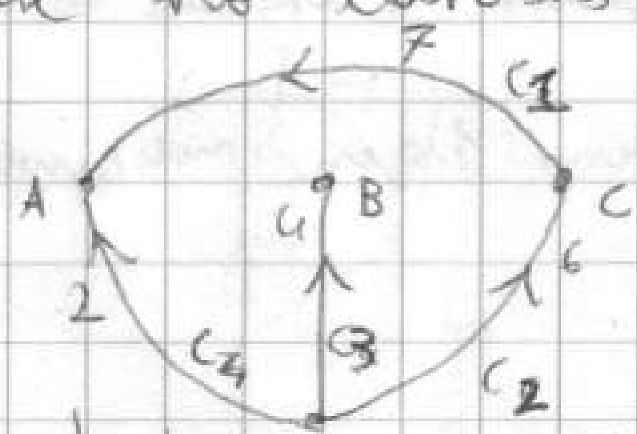
L'ALBERO è insieme di lati che devono toccare tutti i nodi ma non creare percorsi chiusi. Parte dai nodi. (dall'ex)



Ho toccato nodi senza creare percorsi chiusi

(poteva essere 1, 4, 6 ... etc).

Si chiama COALBERO il complementare grafico dell'albero (tutto il resto che ho lasciato). Dall'ex:



→ Danno albero + percorsi chiusi.

[r] LATI ALBERO = RAMI ; CORDE = LATI COALBERO [c]

È ininfluente la numerazione. → importante è ordine.

Proprietà: presa una ed una sola corda dal coalbero e la aggiungo nell'albero, creo uno ed uno solo PERCORSO CHIUSO.

Ex: C_2 aggiunta crea C_2, r_1, r_3 percorso chiuso.

Poiché corda è 1 ed 1 sola, scrivendo il principio di K. esso sarà UNICO.

∀ albero ho sempre 3 rami e ∀ co-albero ho 4 corde ⇒ ho minimo n. di eq. indipendenti [4 princ. K] ; 1 ed 1 solo è il circuito, ∄ degli altri.
pari a n. CORDE, non al n. di NODI

Ex. corda n. 1 aggiunta; $v_{c1} - v_{r2} - v_{r3} = 0$

" n. 2 " $v_{c2} - v_{r1} + v_{r2} + v_{r3} = 0$

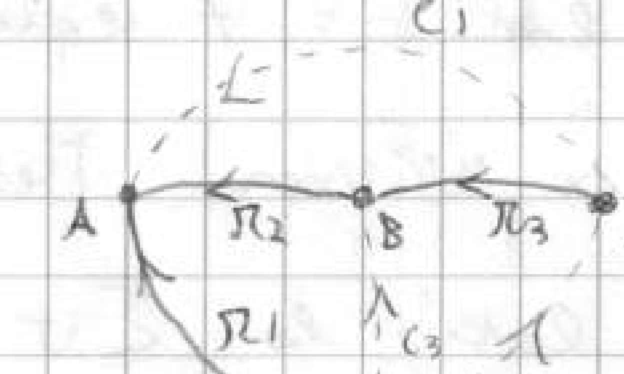
" n. 3 " [collegata a B] $v_{c3} - v_{r1} + v_{r2} = 0$

" n. 4 " $v_{c4} - v_{r1} = 0$

— 4 eq. x princ. alle tensioni

⇓

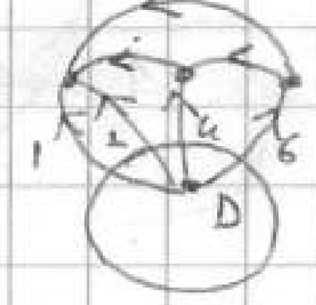
3 eq. x princ. alle i



Chiamato TAGLIO o TAGLIO INDIPENDENTE
||

Ho tante eq. x princ. alle i quanti sono i rami. (C'è dualità tra 2 principi). Prendo una sup. chiusa che seziona il grafo + ho parte interna e esterna che colloquiano con lati che portano i ($/ \Sigma i = 0$) forando la superficie. Se opero TAGLIO del grafico / deve intercettare TUTTE CORDE ed 1 solo ramo e scrivo tante eq. di K. quanti sono i rami ∄.

Ex: qui 1, 2, 4, 6 son corde, 1 è ramo ⇒ taglio fondamentale.

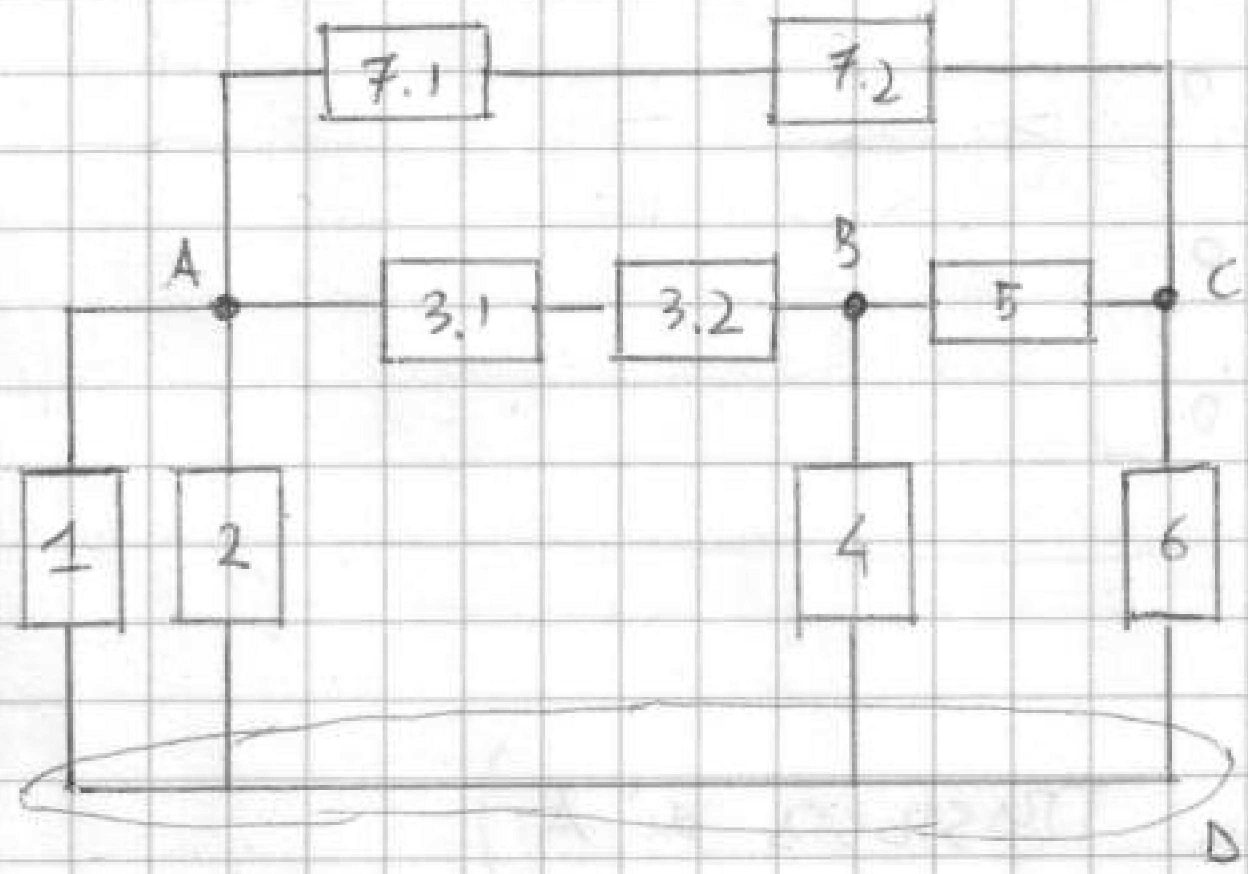


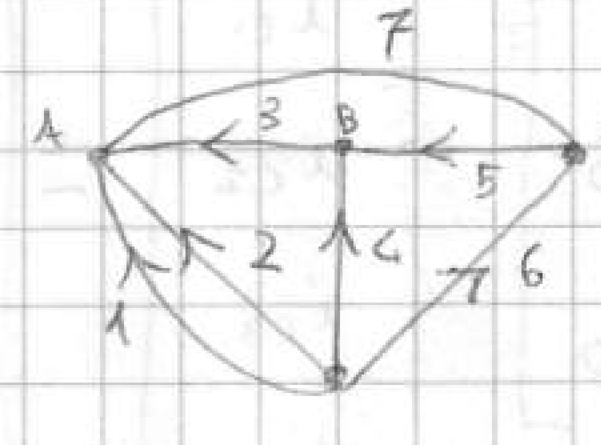
Dirò che i_{r1} darà verso +: $i_{r1} + i_{c4} + i_{c6} + i_{c2} = 0$.

Numero di rami = numero dei nodi − 1 ∀ det. struttura.

11 / 10 / 2005

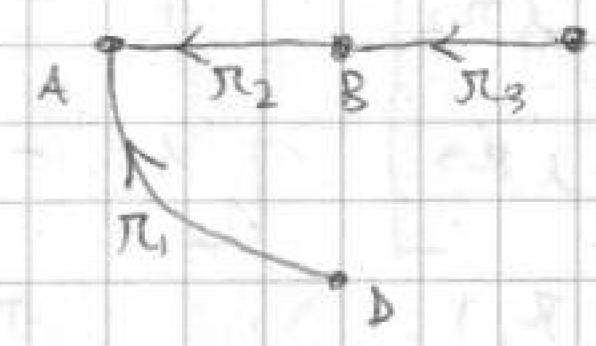
CIRCUITO



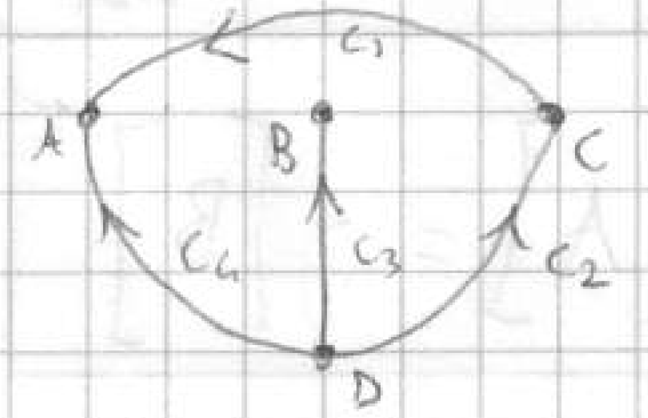


GRAFO ORIENTATO

ALBERO



CO - ALBERO



[prendiamo verso circuitazione concorde con verso corde]

$$\begin{cases} \text{- corda } 1: & V_{c1} - V_{r2} - V_{r3} = 0 \\ \text{- corda } 2: & V_{c2} + V_{r3} + V_{r2} - V_{r1} = 0 \\ \text{- corda } 3: & V_{c3} + V_{r2} - V_{r1} = 0 \\ \text{- corda } 4: & V_{c4} - V_{r1} = 0 \end{cases}$$

→ scriviamo le eq. di p.d.k. in forma matriciale

↓

Accelerano i calcoli e semplificano la conoscenza delle proprietà dei circuiti [eq. sono righe]

↓

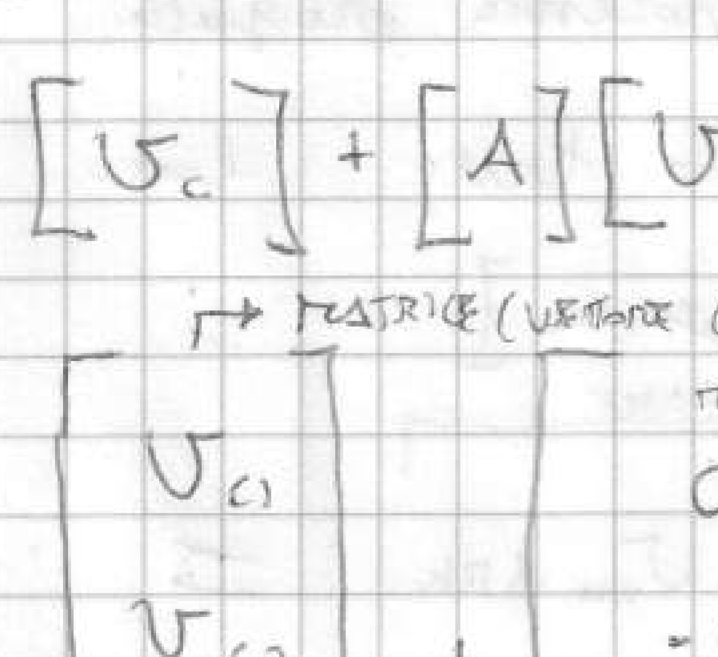
$$[V_c] + [A][V_r] = [0]$$ (scrivi sempre sotto righe, colonne)

→ matrice (vettore colonna) delle tensioni di corda → Vettore delle tensioni di ramo

$$\underset{\substack{c,1 \\ (4,1)}}{\begin{bmatrix} V_{c1} \\ V_{c2} \\ V_{c3} \\ V_{c4} \end{bmatrix}} + \underset{\substack{c,r \\ (4,3)}}{\begin{array}{ccc} r_1 & r_2 & r_3 \\ \hline \end{array}\!\!\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \cdot \underset{\substack{r,1 \\ (3,1)}}{\begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \end{bmatrix}} = \underset{c,1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

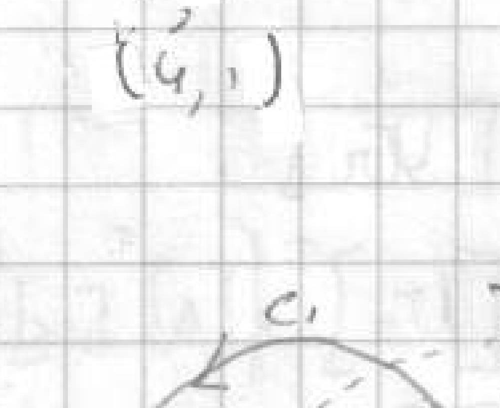
→ MATRICE DI INCIDENZA CORDE - RAMI

[al PRINCIPIO DI K.]



[grafo tagliato in 2 sub-grafi che comunicano con insieme di lati da 1 ramo e n arbitrario corde (def. duale di prima)]

T_1 relativo a ramo 1; T_2 prende r_2 (include r_3), T_3 intorno a C



$$\begin{cases} i_{r1} + i_{c4} + i_{c3} + i_{c2} = 0 \\ i_{r2} + i_{c1} - i_{c2} - i_{c3} = 0 \\ i_{r3} + i_{c1} - i_{c2} = 0 \end{cases}$$

(forma matriciale) $[i_R] + [B][i_C] = [0]_{C,1}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{R3} \end{bmatrix}}_{R,1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R,C} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i_{C1} \\ i_{C2} \\ i_{C3} \\ i_{C4} \end{bmatrix}}_{C,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATRICE DI INCIDENZA RAMI - CORDE

$\Downarrow$

$$\boxed{[A] = -[B]^T}$$ $\forall$ grafo (B è $-$ la TRASPOSTA di A)

$\Downarrow$

PRINCIPI DI KIRCHHOFF TRA LORO NON SONO INDIPENDENTI!

$\Downarrow$

Vere incognite in ex. non sono l, ma basta ad ex sistema per $R = 3$.

DEVO verificare il BILANCIO ENERGETICO. ($\sum W = 0$)

Estendo concetto di convenzione a tutto il lato → grafo fatto in conv. dei generatori. Preso il lato k-esimo, se ho $V_k \cdot i_k$ ottengo potenza erogata. Se è > 0 erogo, se < 0 assorbe dal resto del circuito. Se sommo tutti i lati

$$\boxed{\sum_{k=1}^{l} V_k \cdot i_k = 0}$$ [x forza! si violerebbe principio di conservazione]

$\downarrow$

Dim: Divido potenze in 2 sottogruppi: $\overbrace{\sum_{k=1}^{C} V_{Ck} i_{Ck}}^{\text{CORDE}} + \overbrace{\sum_{k=1}^{R} V_{Rk} i_{Rk}}^{\text{RAMI}} =$

(devo trasporre V_C x for. prodotto tra matrici):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_{C1} & V_{C2} & V_{C3} & V_{C4} \end{bmatrix}}_{[V_C]^T} \cdot \begin{bmatrix} i_{C1} \\ i_{C2} \\ i_{C3} \\ i_{C4} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{(totale): } [V_C]^T [i_C] + \text{(lo stesso per i rami)} + [V_R]^T [i_R] = \sum_{k=1}^{l} V_k i_k$$

Dalla forma matriciale precedente ricavo e sostituisco $[V_C]$ e $[i_R]$:

$$\begin{cases} [V_C] = -[A][V_R] \\ [i_R] = -[B][i_C] = [A]^T [i_C] \end{cases} \rightarrow \{-[A][V_R]\}^T [i_C] + [V_R]^T \{[A]^T [i_C]\}$$

(nella trasposta tra matrici si invertono le matrici)

$$\underbrace{-[V_R]^T [A]^T [i_C]}_{} + \underbrace{[V_R]^T \cdot \{[A]^T [i_C]\}}_{} = 0 .$$ → GRANDEZZE SI BILANCIANO

$\overset{.}{H}$

Un grafo può descrivere ∞ circuiti diversi.

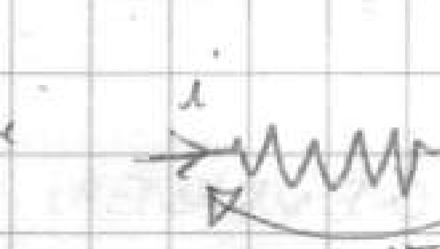
(18) Ex: Calcolo V_m in circuito e i nell'altro [circuiti <> con stesso grafo]
[CIRCUITO I] [CIRCUITO II]

Per cir. I ho $[v_c'] + [A][v_R'] = [0]$, per cir II ho $[i_R''] + [B][i_C''] = [0]$

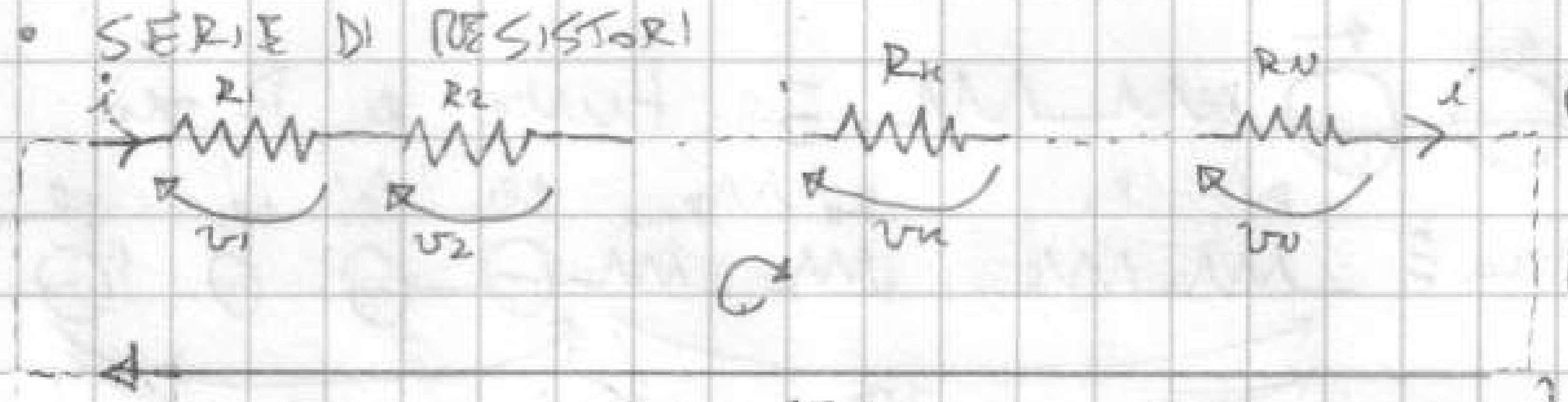
Quindi $\sum_{h=1}^{l} v_{h}' i_h'' = \sum_{h=1}^{c} v_{ch}' i_{ch}'' + \sum_{h=1}^{r} v_{rh}' i_{rh}''$, rifacendo l'intera dim. riottengo = 0 pur non avendo alcun nesso fisico (anche se "potenza" non ha senso fisico). Modello garantisce anche il bilancio delle POTENZE VIRTUALI = [Circuito ↔ MODELLO MATEMATICO] = TEOREMA DI TELLEGEN: tutti i circuiti con lo stesso grafo bilanciano le potenze virtuali.

H

RETI DI RESISTORI (SENZA MEMORIA) - CIRCUITI PURAMENTE RESISTIVI

Ci saranno generatori di corrente e resistori  $v = Ri$

• SERIE DI RESISTORI



C'è interesse nella v di lato. Qui lato è in conv. utilizzatori. v è come se fosse osservata LATO VUOTO.

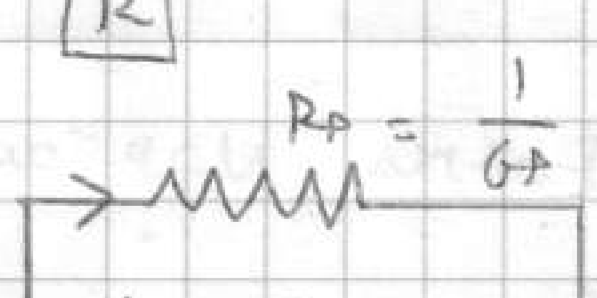
$v - \sum_{h=1}^{N} \overbrace{R_h \cdot i}^{v_h} = 0 \Rightarrow v = \left(\sum_{h=1}^{N} R_h\right) \cdot i$, se ci fosse un'unica R_s del valore = alla somma di tutte le altre misurerei la stessa v di lato. 

RESISTENZA SERIE: $R_s = \sum_{h=1}^{N} R_h$

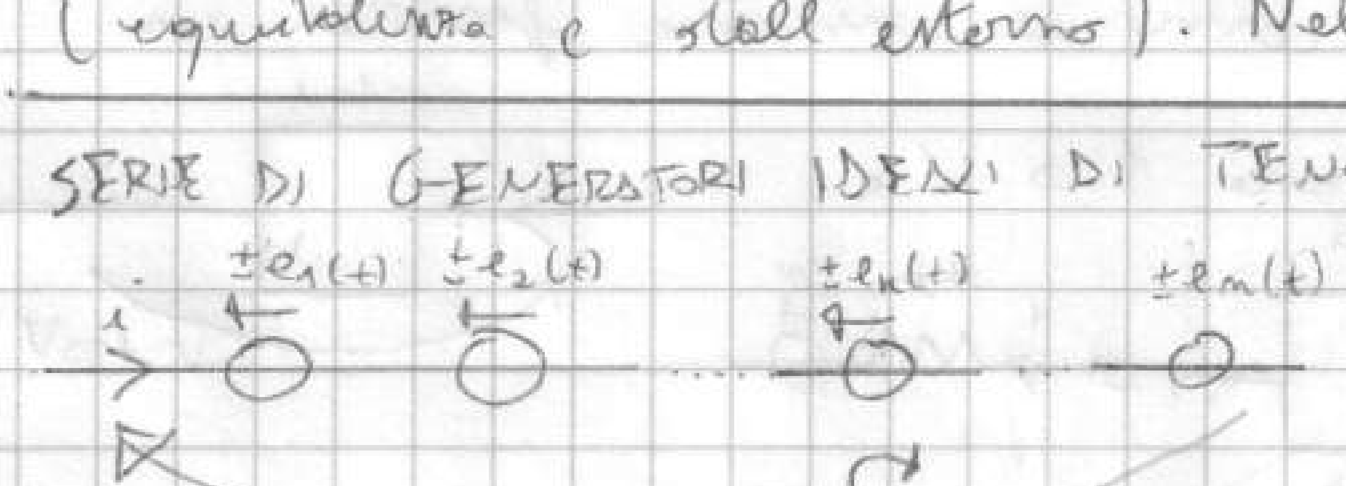
• PARALLELO DI RESISTORI

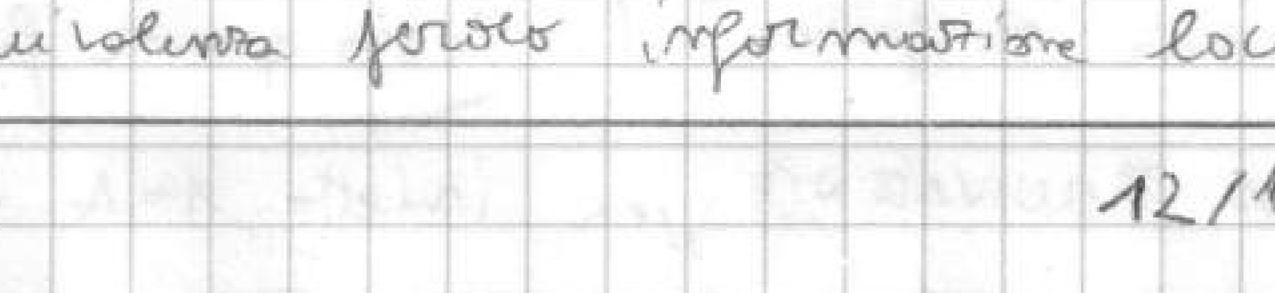
Ora ho n lati in parallelo con ciascuno 1 solo resistore. Ho $\neq i$ e stessa v [DUALE SERIE]. Per il 1° princ. di K. applicato a taglio T: $i - \sum_{h=1}^{N} i_h = 0$, dalla legge costitutiva $i = \boxed{\frac{1}{R}} v = Gv$, $\frac{1}{R} = G$: CONDUTTANZA

↳ $i = \left(\sum_{h=1}^{N} G_h\right) \cdot v$ ⇒ definisco un unico par. equivalente

CONDUTTANZA PARALLELA: $G_p = \frac{1}{R_p}$; il grafico qui diventa  (equivalenza è dall'esterno). Nell'equivalenza perdo informazione locale.

SERIE DI GENERATORI IDEALI DI TENSIONE 12/10/2005



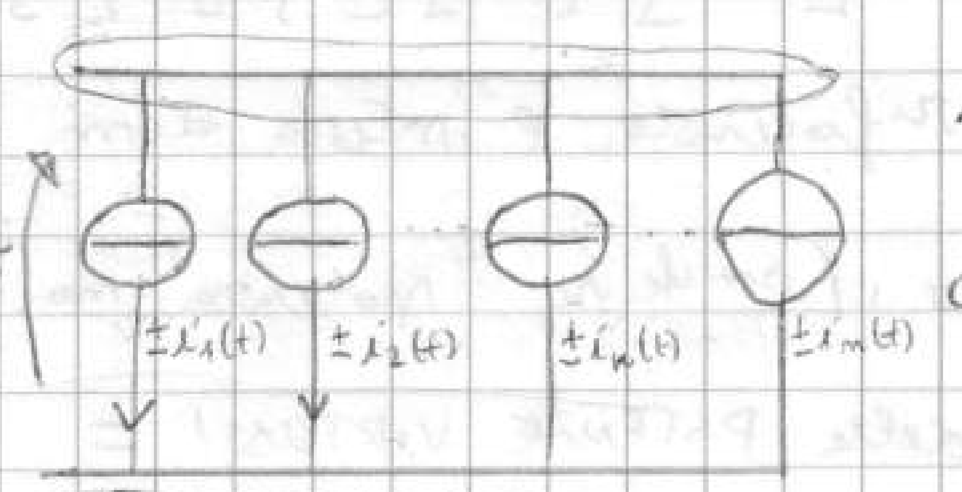


Corrente non partecipa a legge costitutiva. Applicando LKT si ha

$v - \sum_{h=1}^{m} \pm e_h(t) = 0$ Anche qui c'è GENERATORE EQUIVALENTE

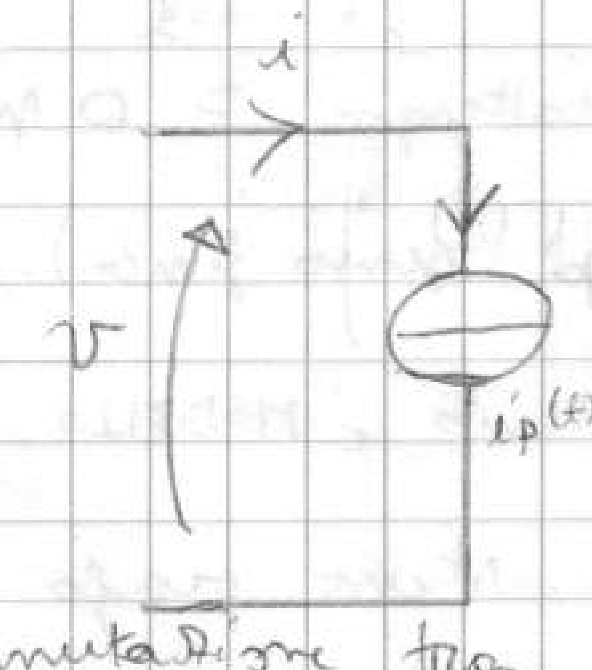
$v - E_s(t) = 0 \rightarrow E_s(t) = \sum_{h=1}^{m} \pm e_h(t)$

PARALLELO DI GENERATORI IDEALI DI CORRENTE



$i - \sum_{h=1}^{m} \pm i_h(t) = 0$. Anche qui posso vedere tutto come un lato unico equivalente

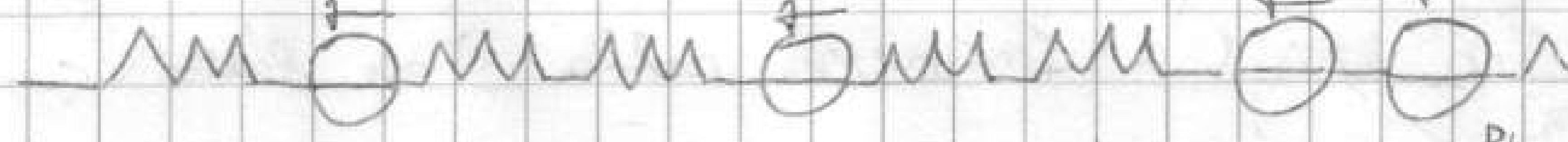
$i - i_p(t) = 0$



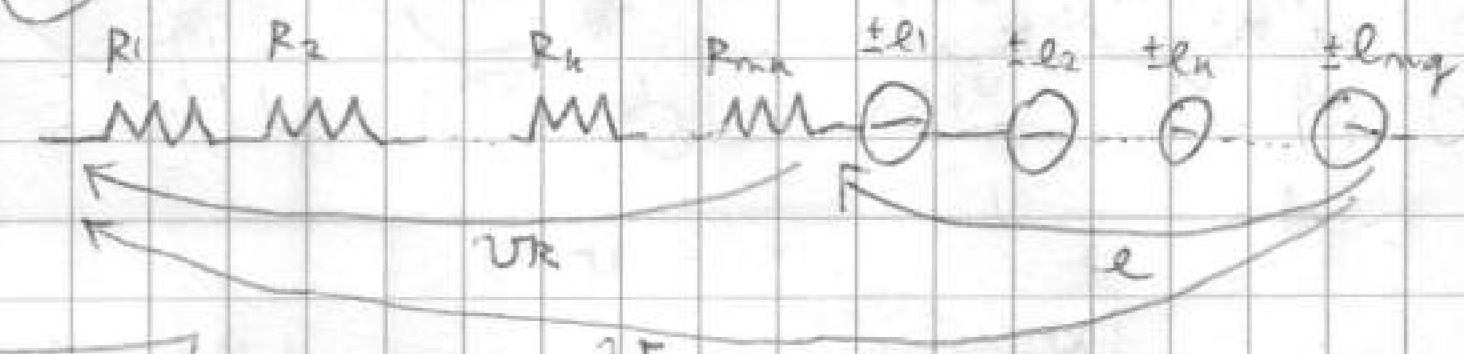
$$\boxed{i_p(t) = \sum_{h=1}^{m} \pm i_h(t)}$$

In questi 2 casi di equivalenza non cambia se faccio permutazione tra oggetti (come in Σ M e // M) $\not\exists$ $\left[R_s = \sum_{h=1}^{m} R_h \ ; \ G_p = \sum_{h=1}^{N} G_h \right]$

SERIE DI RESISTORI E DI GENERATORI IDEALI DI TENSIONE



$\equiv$ tutte le R da una parte e tutti i gen. dall'altra $\equiv$



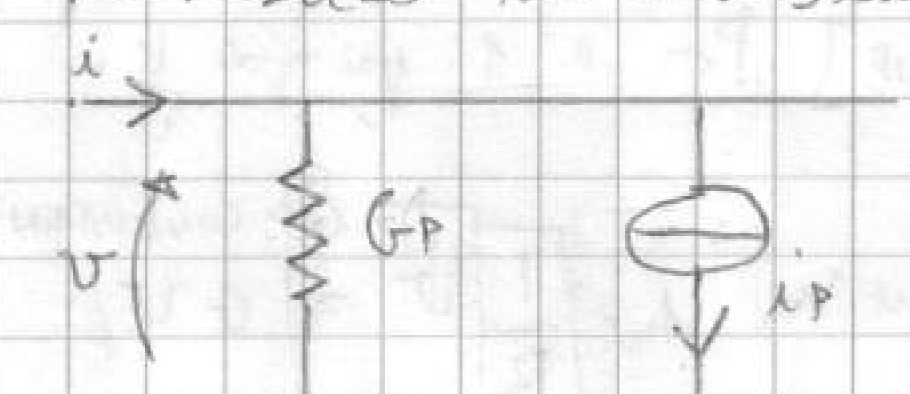
[$m_R \neq m_q$ in caso generale]

$v_R = R_s i$ ed $e = E_s$, $\boxed{v = R_s i + E_s}$

Possiamo ridisegnare semplicemente il circuito. quando si ha resistore in serie con generatore il lato è in forma THEVENIN

Con la DUALITÀ si "scambiano" tensioni e correnti:

PARALLELO TRA RESISTORI E GENERATORI DI CORRENTE

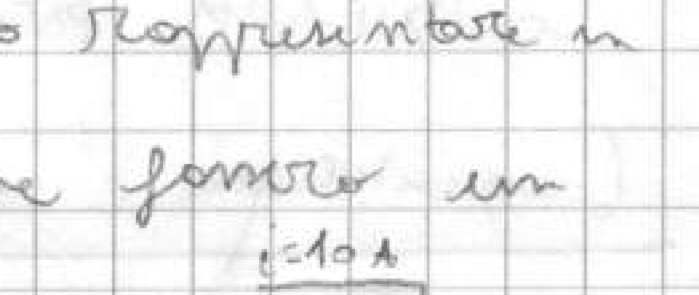


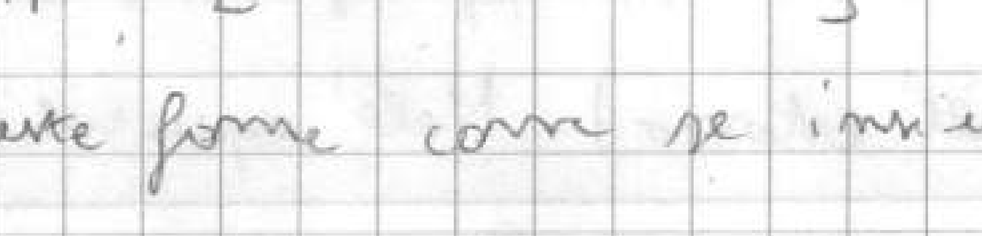
È come si agisse unico resistore con conduttanza G_P // con $i = \sum_{h=1}^{m} \pm i_h(t)$ al generatore

$$\boxed{i = G_P v + i_P}$$

FORMA NORTON

Si possono invertire le 2 rapp. [NORTON e THEVENIN] Posso rappresentare in N. come se fosse T. Vedo queste forme come se insieme formino un BIPOLO EQUIVALENTE, ex. inietto 10 A e misuro 100 V e viceversa (che equazione trovo)





Si possono usare entrambi.

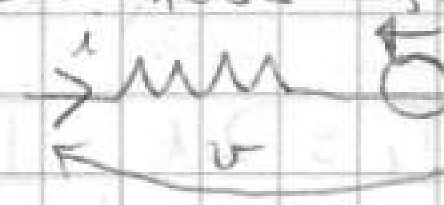
$\not\exists$

PASSAGGIO DA NORTON A THEVENIN e VICEVERSA

- da THEVENIN:

(20) ho $v = R_s i + E_s$ [R_s ed E_s sono valori noti].

Voglio ricondurmi a $i = G_P v + i_p$; è sufficiente porsi in 2 situazioni "semplici" (2 incognite): Siamo in F.T. a VUOTO $\Rightarrow \exists$ solo lato.



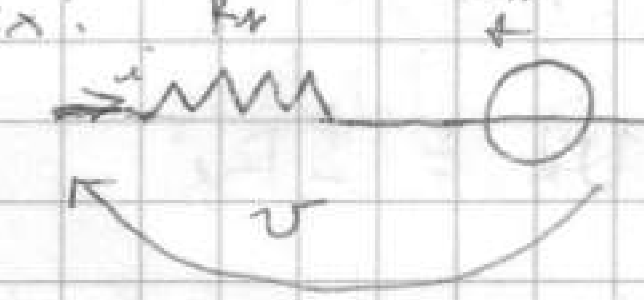
$i = 0$ (prendo sup. chiusa per LKC deve essere nulla) quindi

$v = E_s$ (a vuoto R non fa sentire suo effetto) [ex. batteria macchina quando accendo fari, luci...]; $G_P\, v + i_p = 0 \rightarrow \underline{i_p = -G_P E_s}$

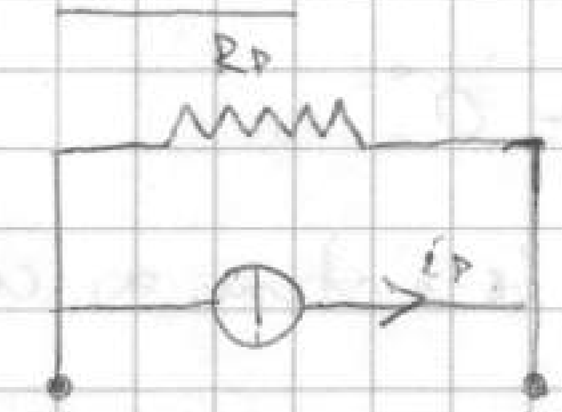
- in CORTOCIRCUITO $v = 0$ [duale del vuoto] $R_s i + E_s = 0 \Rightarrow i = \frac{-E_s}{R_s} = -E_s G_s$

quindi $i = \underline{i_P}$ [R non dà contributo nel parallelo → EFFETTO SHUNT, cortocircuitare resistenza] $= \underline{-E_s G_s}$

Facendo il rapporto tra le 2 sit, $\underline{G_P = G_s}$

Ex: 

lo voglio trasformare nell'equiv. NORTON



$R_P = 10\ \Omega$ e $i_P = -G_s E_s = -E_s/R_s = -5/10 = -\frac{1}{2}$ A

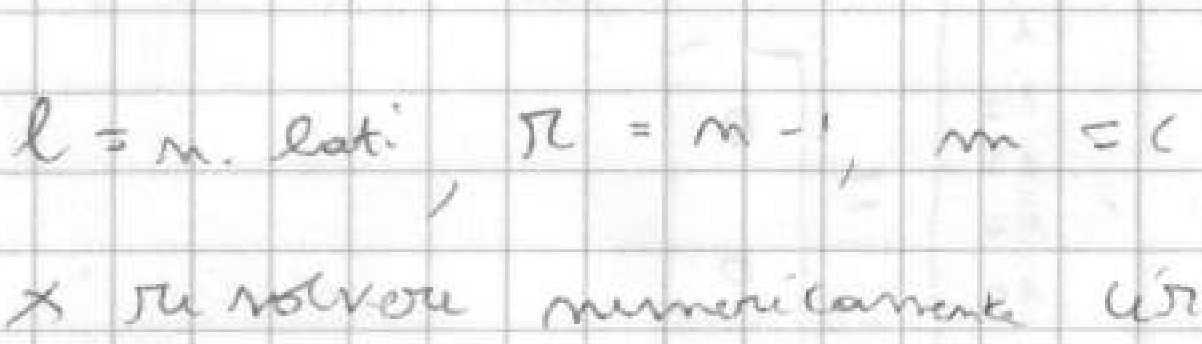
(orientato i_P opposto a i_s quindi viene negativo

Si passa da T a N, ponendo il generatore di corrente orientandolo come il generatore di tensione e di valore pari al prodotto della conduttanza T. x la v. int; in parallelo si pone un resistore con R = Resistenza Th.

Ovviamente è duale l'altro passaggio. Noto NORTON, x passare a TH. ho $R_s = R_P$ ed E_s (orientato come NORTON) + $\boxed{E_s = R_P\, i_P}$ (inverti la dim.)

//

l = n. lati, $n = m-1$, $m = c$ [n. maglie] Non è necessario il grafo x risolvere numericamente circuiti [: CIRCUITI PLANARI; disegnabili su un piano]

Ex: 

Subito indi. n. nodi N.

Si prende nodo a piacere si esclude dal calcolo, e x gli altri si applicano il PRINC.

Ex prendo nodo D che chiamo NODO DI RIFERIMENTO o DI SALDO. Scriviamo eq. ai nodi. [$m = c \Rightarrow$ n. percorsi chiusi = n. corde]

Noto l, ho qui $N = 4$, $l = 7$, $n = 4-1 = 3 \Rightarrow c = m = l - n = 4$.

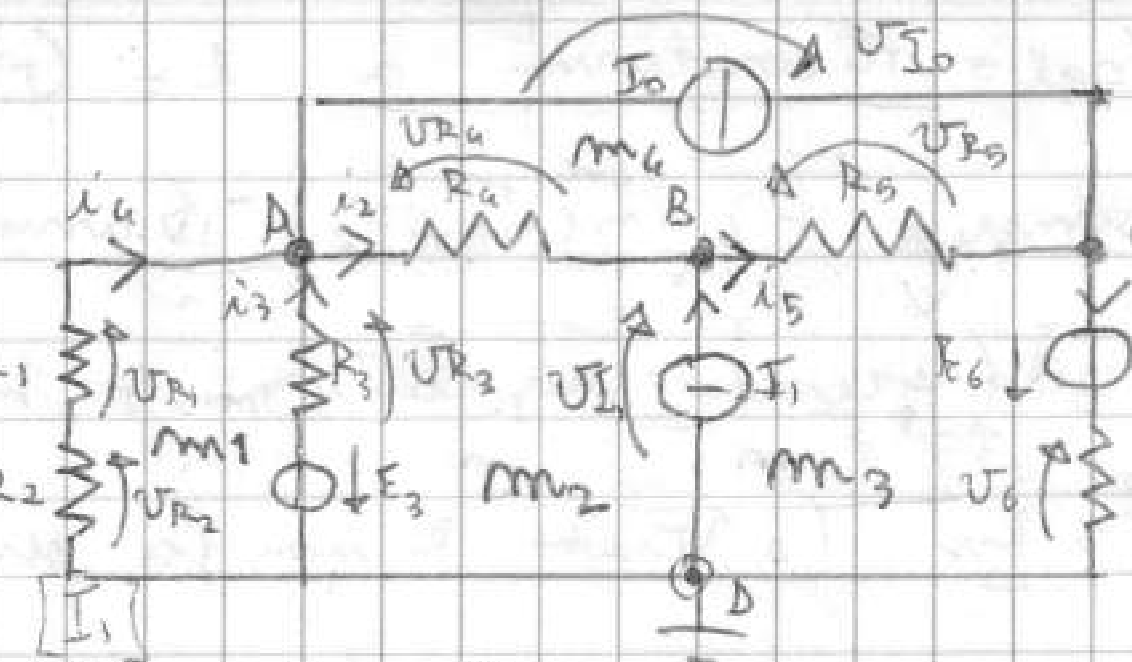
Posso prendere quei percorsi chiusi che non ne contengono altri [ex DACD non lo tratto, prendo ↻ Chiamate MAGLIE (non fondamentali)].

Posso sostituire R e ben a caso nel circuito

Potremmo porre $R_k = 1\Omega$, $E_3 = 10V$, $E_6 = -20V$,

$I_1 = 2A$, $I_0 = 1A$. Nominiamo correnti

LKC ∀ nodo:



- A) $i_4 + i_3 - i_2 - 1A\,[I_0] = 0$, - B) $i_2 + 2 - i_5 = 0$,
- C) $1 + i_5 - i_6 = 0$. A queste devo associare le 4 eq. alle maglie

□ m_1) [Versi tutti orari] $V_{R2} + V_{R1} - V_{R3} + E_3[10V] = 0$

□ m_2) $-E_3[10] + V_{R3} - V_{R4} - V_{I_1} = 0$

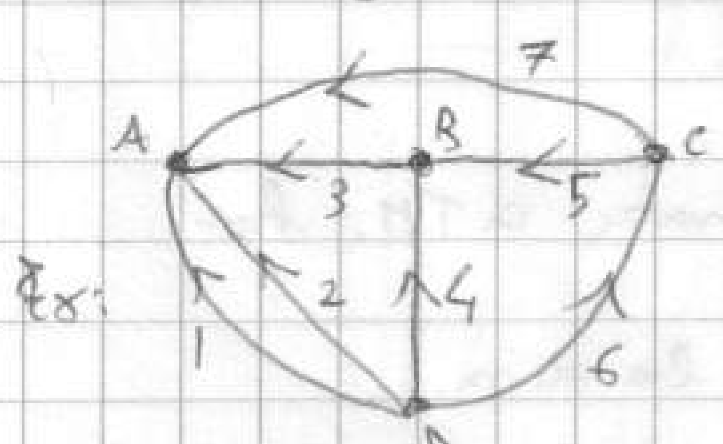
□ m_3) $V_{I_1} - V_{R5} + E_6[-20] - V_{R6} = 0$

□ m_4) $V_{R5} + V_{R4} + V_{I_0} = 0$

Incognite sono i_4, i_3, i_2, i_5, i_6 e tens. ai capi R. In realtà $V_R = \pm Ri$ nelle tensioni resistive seguendo convenzione ⇒ incognite diventano solo le i.
Sostituendo ad es. a m_1) ho $-R_2 i_4 + R_1 i_4 - (-R_3 i_3) + 10 = 0$. Alla fine ho 7 eq e 7 inc.

METODO DEI NODI 13/10/2005

Ex:



↳ LKC può essere scritto in forma matriciale. Si può risolvere il circuito con $n-1$ eq. Si esclude quindi un nodo (ex: D). In f. matriciale $[A]_{n-1,\,l}\,[i_{lato}]_{l,\,1} = [0]_{n-1,\,1}$

$$\begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(arbitrario prendere versi entranti, la scelta va mantenuta altrove)

Si introduce una nuova variabile incognita: POTENZIALE NODALE

Per ip. D, nodo di riferimento ha pot. = 0 ⇒ $V_D = 0$.

Cerchiamo relazioni tra pot. nod. $[V_k]$ e tensioni di lato $[v_k]$.

$$\begin{cases} v_1 = V_A - V_D \to = V_A\ ; \quad v_2 = V_A\ ; \quad v_3 = V_A - V_B \\ v_4 = V_B\ ; \quad v_5 = V_B - V_C\ ; \quad v_6 = V_C\ ; \quad v_7 = V_A - V_C \end{cases}$$

↳ rendiamo in forma matriciale:

$$\underset{l,1}{\left[v_l \right]} = \underset{l,\,n-1}{\left[B \right]} \underset{n-1,\,1}{\left[V_{no} \right]} \rightarrow \text{(È un artificio, con nuove variabili)}$$

Dall'esempio:

$$\begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{ccc} \text{(A)} & \text{(B)} & \text{(C)} \\ \multicolumn{3}{c}{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right]} \end{array} \cdot \left[\begin{array}{c} V_A \\ V_B \\ V_C \end{array}\right]$$

→ tensioni di [illegible] (A)

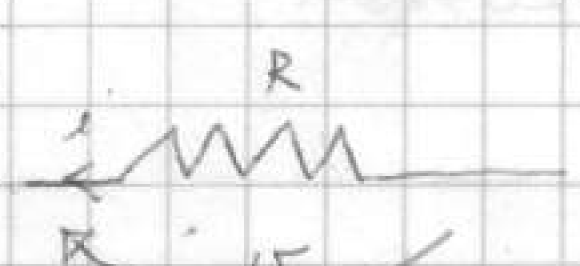
$[v_l]$ $\quad$ $\underbrace{\qquad}_{[B]}$

(matrice di incidenza nodi / lati)

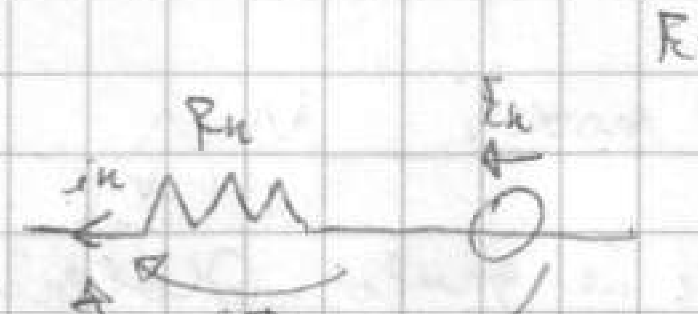
Confrontando con $[A]$ si nota che $\underset{tot}{[A]} = [B]^T$ (<> da matrice albero/coalbero!)

Lati possono essere riconosciuti a thevenin, norton, solo resistenza, solo gen. (può essere formato da due sub-lati che insieme formano 1 lato)

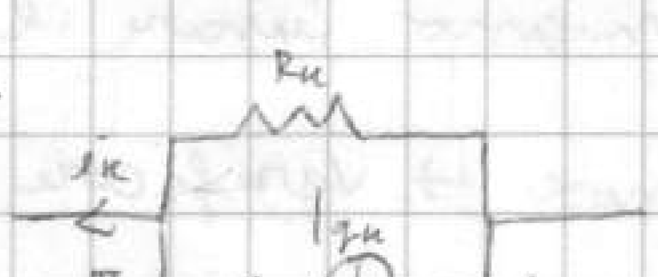
Si può scrivere relazione per generico k-lato.

- 

Ex: lato puramente resistivo, so che $i = -G\,v$. Per un k-lato, $i_k = -G_k V_k$

- 

Ex: lato forma Th., $v_k = \overbrace{-R_k i_k}^{\text{conv. gen} = -\text{conv. util.}} + E_k$. Quindi $i_k = E_k G_k - G_k V_k$. So che questo lato si può vedere nella forma norton equivalente:

- 

→ avrei scritto: $i_k = I_{gk} - G_k V_k$ con $I_{gk} = -G_k V_k$

Con $G_k = 0$ ho 1 solo gen.; caso + generale di lato

- 

Lato con solo gen. di tens. non va bene; assegnerei un valore di un nodo noto l'altro (x ora non va bene), quindi V_B e V_A non sono + incognite

Vincolo x questo metodo è che tutti i lati siano tali da avere una legge costitutiva di lato che leghi tra loro tensione e corrente.

Escludo circuiti dove tra 2 nodi ∃ solo un gen. di tensione. (x ora)

Vale il metodo dove i lati Thevenin sono Norton-trasformabili (ex. prima i caso estremo th.)

Invece un gen. di i ideale va benissimo. E_k, G_k e I_q sono noti. Forma matriciale leggi costitutive. ($[V_e] = [A]^T [V_{no}]$) → confrontato con orientamento lato

Per semplicità usiamo Norton. $[i_e]_{l,1} = [I_q]_{l,1} - [G_e]_{l,e} \cdot [V_e]_{l,1}$ → vettore con tutti i termini noti

Matrice diagonale × corrispondere alle eq. stesso indice riga e colonna. Dove agisce solo termine noto c'è anche 0 nella diag. principale (ex. solo generatore i.)

Prendiamo $[i_e]$ e la mettiamo in LKC. (mi libero del caso particolare × generalizzatore situazione)

$$\underset{\text{numerica}}{[A]} \left\{ [I_q] - [G_e][V_e] \right\} = [0]$$

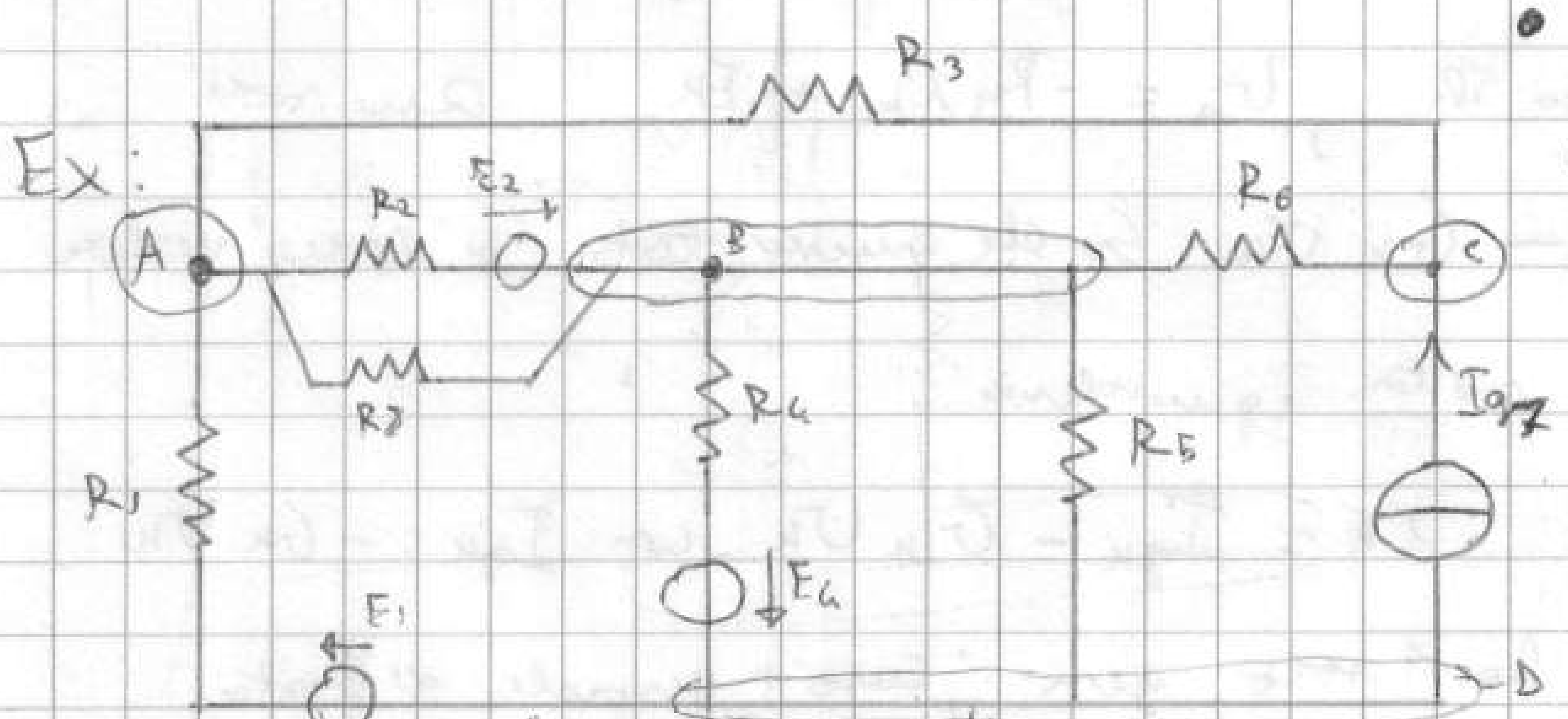
$[A][I_q] - [A][G_e][V_e] = [0]$; ora a $[V_e]$ si sostituisce la sua espressione:

$$\underbrace{[A]_{n-1,e}\,[I_q]_{l,1}}_{n-1,1} - \underbrace{[A]_{n-1,e}[G_e]_{l,e}[A]^T_{l,n-1}}_{\substack{\text{blocco numerico}\\ n-1,\,n-1}} \underbrace{[V_{no}]}_{\substack{n-1,1\\ \text{(incognite)}}} = \underset{n-1,1}{[0]} \Rightarrow \text{Sistema ammette sicuramente un'unica SOLUZIONE}$$

MATRICE DEI TERMINI NOTI ↓ (VETTORE DELLE CORRENTI NODALI) $[I_{no}] = A$

MATRICE DEI COEFFICIENTI (MATRICE DELLE CONDUTTANZE NODALI) → $[G_{no}] = \Omega^{-1}$

Ex:

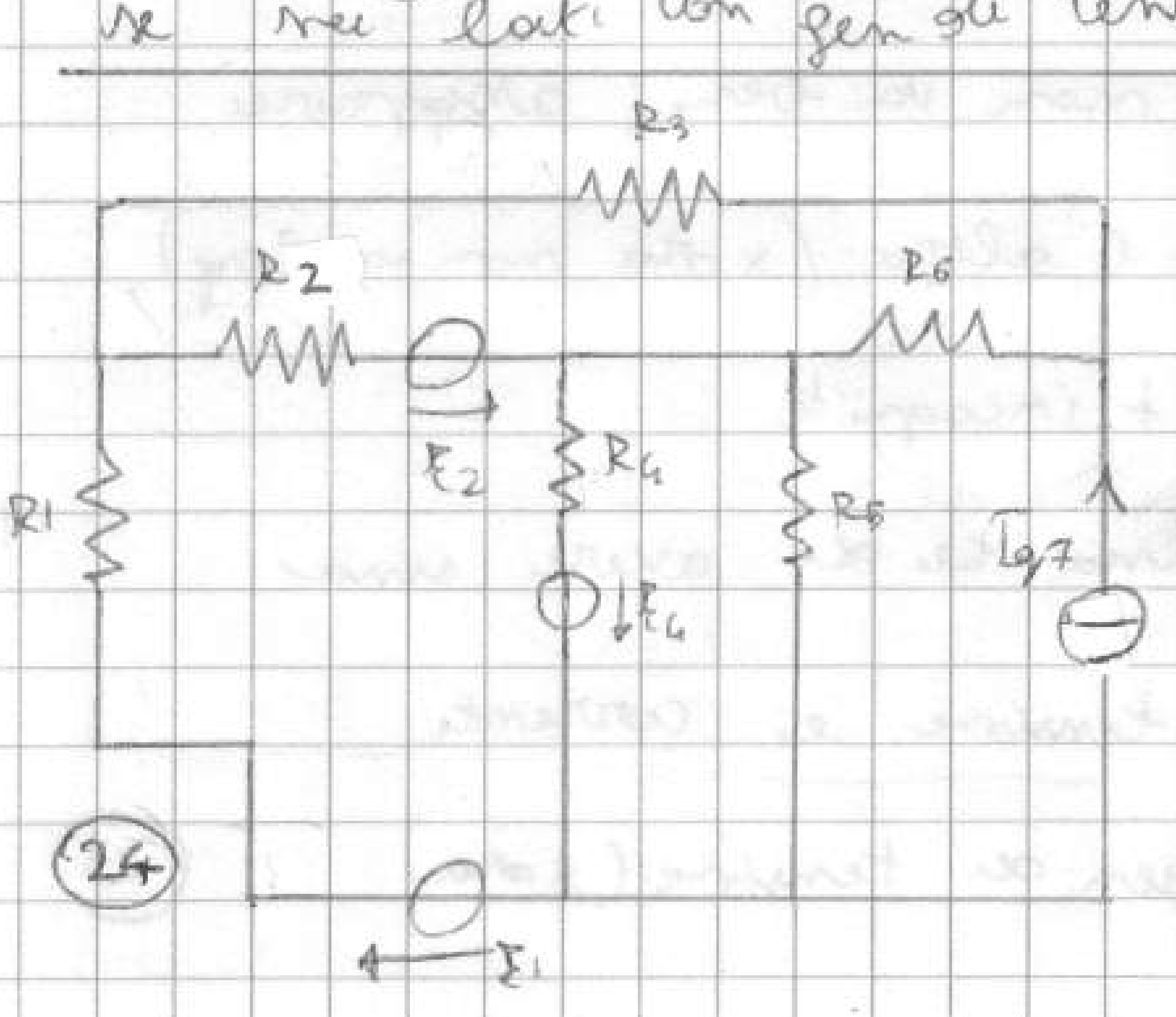


1) Identifica i nodi.

Prima di fare il grafo dobbiamo vedere se possiamo usare il metodo dei nodi → verificare se nei lati con gen. di tens. ci sono resist. (norton trasformabili).

METODO DEI NODI

17/10/2005



Condizione necessaria: tutti i lati in forma Norton o trasformabili in f. N.

Noto in qualsiasi convenzione Metodo sic:

1/ $[G_{no}][V_{no}] = [I_{no}]$ → Vettore delle CORRENTI NODALI (termini noti) $(n-1,1)$

$[G_{no}]$: CONDUTTANZE NODALI $(n-1, n-1)$

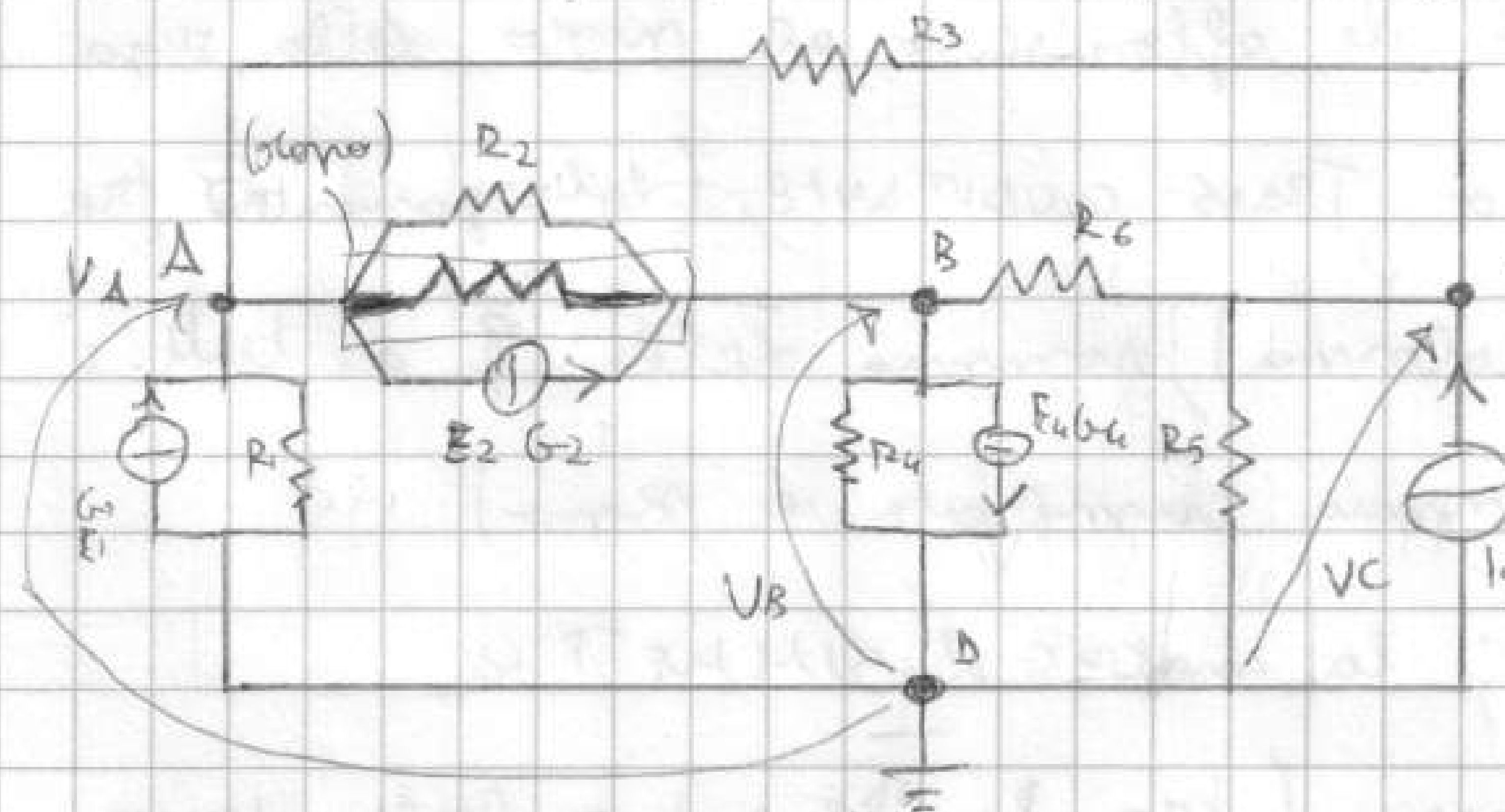
$[V_{no}]$: POTENZIALI NODALI (incognite) $(n-1,1)$

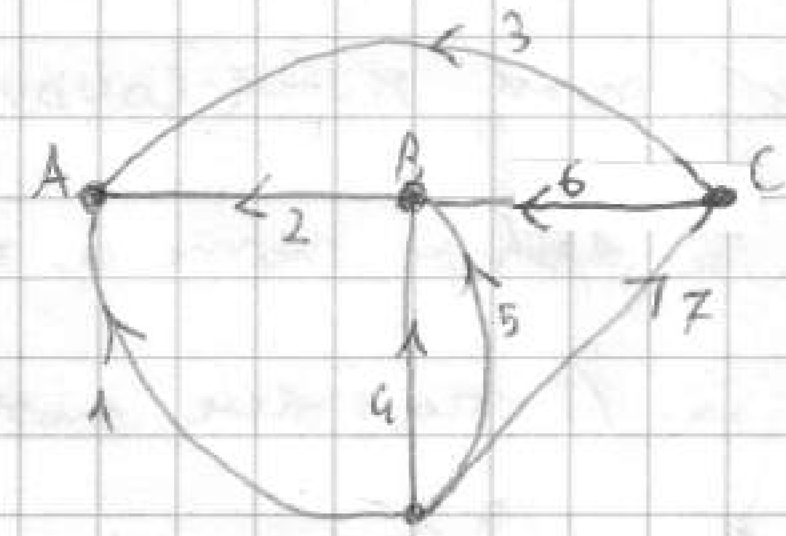
Definita $[A]$ la matrice d'incidenza nodi/lati in convenzione dei generatori, questa matrice sarà composta da $0, 1, -1$ (se lato in colonna entra in nodo riga è 1).

2/ $[G_{no}] = \underset{n-1,l}{[A]}\;\underset{l,l}{[G_e]}\;\underset{l,n-1}{[A]^T}$; $[I_{no}] = [A][\pm I_g]$ → termini dei generatori (+ se è equiverso a lato nel grafo)

Con una semplice ispezione si può evitare $[A]$ e si usa 1/.

(dal circuito). Lo si ridisegna: (non vale sempre) e si passa al grafo per $[A]$ → versi arbitrari → possono uscire anche I negative





Ora si scrive $[A]$ (righe n° nodi, colonne n. lati)

$$[A] = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ora applichiamo 2/

$= \underbrace{[A][G_e]}_{\text{il risultato per } [A]^T}$

$$[G_e] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) \end{array} \\ \begin{bmatrix} G_1 & & & & & & \\ & G_2 & & & & & \\ & & G_3 & & & & \\ & & & G_4 & & & \\ & & & & G_5 & & \\ & & & & & G_6 & \\ & & & & & & \boxed{0} \end{bmatrix} \end{array}$$

→ 0; $[G_e]$ è matrice diagonale

→ G_7: lato è costituito da puro gen. ideale di corrente

$$\text{Quindi } [A][G_e] = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) \end{array} \\ \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & 0 & G_4 & G_5 & G_6 & 0 \\ 0 & 0 & -G_3 & 0 & 0 & -G_6 & \cancel{G_7} \to 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(prodotto righe × colonne)

Ora $[A][G_e]$ è moltiplicato x $[A]^T$;

$$[A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [A][G_e] = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & 0 & G_4 & G_5 & G_6 & 0 \\ 0 & 0 & -G_3 & 0 & 0 & -G_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{[G_{no}]} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} G_1+G_2+G_3 & -G_2 & -G_3 \\ -G_2 & G_4+G_5+G_2+G_6 & -G_6 \\ -G_3 & -G_6 & G_3+G_6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Noto che distinguo elementi su diagonale principale chiamati <u>AUTO-CONDUTTANZE</u> ($g_{no\,k,k}$), date la somma delle conduttanze dei lati che afferiscono al nodo della riga.

Gli elementi sono MUTUE-CONDUTTANZE o TRANS-CONDUTTANZE (collegamento tra due nodi che danno nome a riga e colonna), somma delle G di tutti i lati posti in // tra i due nodi (somma cambiata di segno).

Tra A e B ho solo G_2 che diventa $-G_2$; la matrice è SIMMETRICA.

Se ci fosse stato lato 8) non diversa (tra R_2 e R_8 potevo fare unico R equivalente di conduttanza G_2+G_8).

Ora scriviamo $[I_{no}]$; $[A]$ è la stessa, devo calcolare prima $[I_g]$; prendo solo lati con generatori di corrente (assegnati o trasformati) e vedo se verso è concorde con grafo (lato x lato). $[A]\cdot[I_g] =$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} +E_1G_1 \\ -E_2G_2 \\ 0 \\ -E_4G_4 \\ 0 \\ 0 \\ I_{g7} \end{bmatrix}}_{[I_g]} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{bmatrix} E_1G_1 - E_2G_2 \\ E_2G_2 - E_4G_4 \\ I_{g7} \end{bmatrix}$$

Si nota che: mi concentro su nodo, ho somma algebrica dei contributi. Non cambio segno a effetti con freccia puntata verso il nodo per il quale scrivo $[I_{no}]$ (e viceversa).

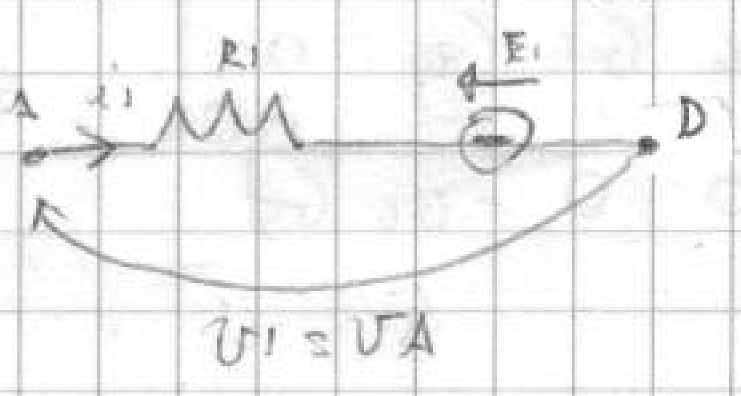
⇓

Possiamo ora det. i potenziali nodali (o le correnti di lato): $[V_{no}] = [G_{no}]^{-1}[I_{no}]$ → $\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}$ prendendo $V=0$ per D.

POT. NODALI sono ΔV tra nodo e nodo di riferimento.

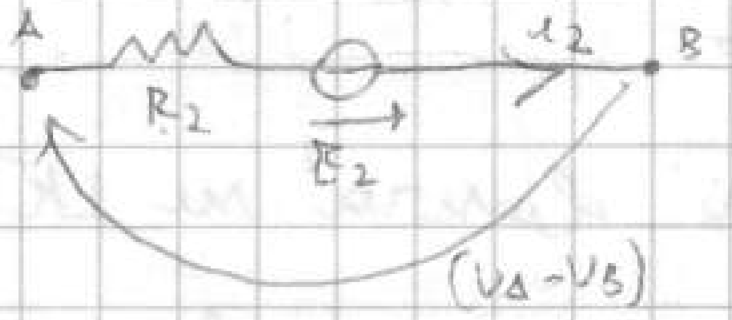
↳ Permettono di calcolare le caratteristiche di ciascun lato.

lato 1)



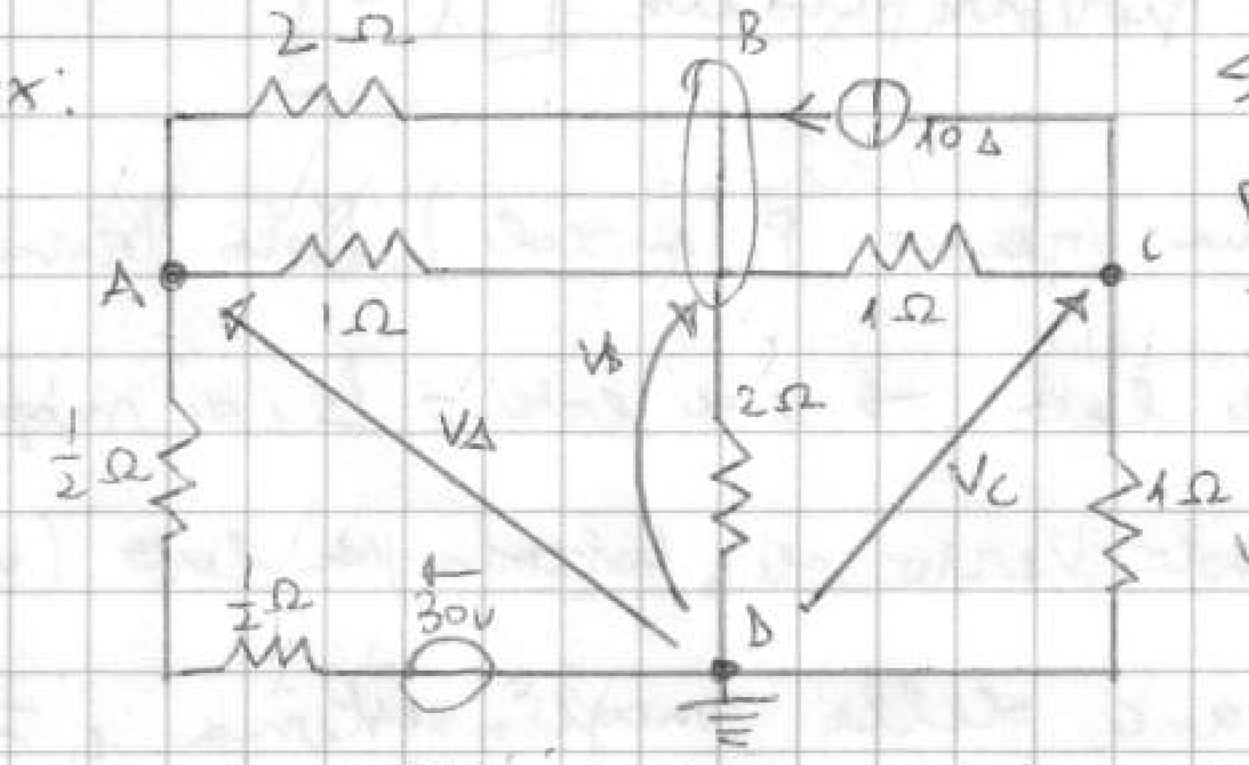
Prendo verso i, qualsiasi. $(V_1 - E_1)G_1 = i_1$

(in conv. utilizz.)

Lato 2)  (non sono legato a scelta convenzione) [Pos. del gen. e ininfluen.]

$$-(V_2 - E_2)\, G_2 = i_2$$

In alcuni casi (lato 7) ho già risultato.

Ex: 

Si trovano nodi e si fissa un $V_D = 0$. 18/10/2005

$$[G_{no}][V_{no}] = [I_{no}]$$

Incognite coincidono con pot. nodali (freccia verso il nodo e che esce dal nodo riferimento)

→ Tutti i lati verso nodo, conduttanza del lato in f. thevenin o relativa Norton

$$\begin{array}{c|ccc|}
A & \frac{1}{2}+1+1 & -\left(1+\frac{1}{2}\right) & 0 \\
B & -\left(1+\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2}+1+1+\frac{1}{2} & -1 \\
C & 0 & -1 & 1+1 \\
 & A & B & C
\end{array} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = (\text{vettore correnti nodali})$$

→ non c'è contatto diretto tra A e C

(simmetrica)

→ Ampere "+" xké gen. e verso A

$$[I_{no}] = \begin{bmatrix} 30 \cdot 1 - 10/2 \\ 10/2 + 10 \\ -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$$

, Sviluppando:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{\Omega^{-1}} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}_{V} = \begin{bmatrix} 25 \\ 15 \\ -10 \end{bmatrix}_{A}$$

Applichiamo metodo di Cramer:

$$\det[G_{no}] = \frac{5}{2}(6-1) + \frac{3}{2}(-3) = \frac{25}{2} - \frac{9}{2} = 8 \quad \text{quindi}$$

$$V_A = \frac{\begin{vmatrix} 25 & \cdot & \cdot \\ 15 & \cdot & \cdot \\ -10 & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{8} = \frac{155}{8}\ V, \quad V_B = \frac{\begin{vmatrix} \cdot & 25 & \cdot \\ \cdot & 10 & \cdot \\ \cdot & -10 & \cdot \end{vmatrix}}{8} = \frac{125}{8}\ V, \quad V_C = \frac{45}{16}\ V$$

(Vedi dispensa x dimostrazione seguente, DA FARE). Metodo duale:

METODO DELLE MAGLIE

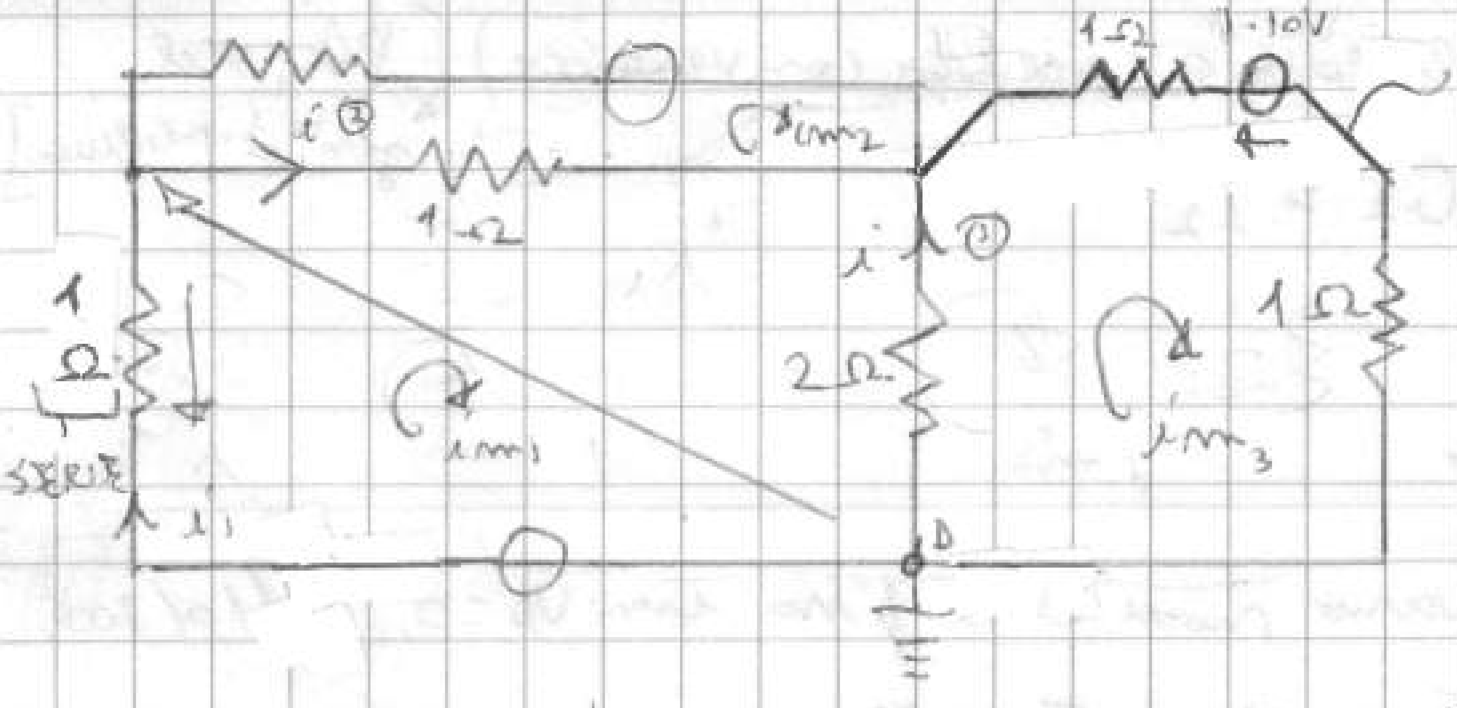
Metodo nodi ha vincolo della rapp. norton.

I // sono + difficili da vedere, in // al gen. di i DEVE esserci almeno 1 lato puramente resistivo VINCOLO e ha THEVENIN-RAPPRESENTAZIONE

Quali sono le incognite? (sempre dall' ex.)

Rifaccio il disegno:

(→)



M. delle M. si baserà su LKT.

Verrà scritto in circuiti che non contengono altri percorsi chiusi [ ]

Quale sarà la nuova incognita? (prima erano P. nodali) Devo trovare i rappresentativa maglia. ΔV nodali $= f$ di lato $\rightarrow$ i di lato $= \Delta$ i di maglie (x dualità): i_{m1}, i_{m2}, i_{m3}. Se prendo invece di calcolo su lato (vedi ex ①) avrò $i = i_{m3} - i_{m1}$. La corrente della maglia esterna è $= 0$ (di riferimento).

- $[G_{no}][V_{no}] = [I_{no}]$ (nodi) $\rightarrow [i_m]$ + nuove incognite. Per dualità:

- $\boxed{[R_m][i_m] = [E_m]}$

(prendo gen di tens. e li sommo algebricamente con "+" se non concordi a i_m.)

(dall' ex.) Elenco REGOLE x le eq. Avrò nelle m_i le AUTORESISTENZE, somma delle resist. incontrate dalle incognite. La MUTUA o TRANS-RESISTENZA è Σ inversa di segno dei lati che separano incognite

$$\begin{array}{c|ccc} & m_1 & m_2 & m_3 \\ \hline m_1 & 1+1+2 & -1 & -2 \\ m_2 & -1 & 2+1 & 0 \\ m_3 & -2 & 0 & 2+1+1 \end{array} = [R_m]$$

simmetrica

MATRICE DEI COEFFICIENTI $\rightarrow$ moltiplica $[i_m]$!

$$[i_m] = \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ i_{m3} \end{bmatrix} ; \quad [E_m] = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}, \text{ calcolando: } \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ i_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$\det [R_m] = 32$, quindi $i_{m1} = \dfrac{\begin{vmatrix} 30 & \cdot & \cdot \\ 10 & \cdot & \cdot \\ -10 & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{32} = \dfrac{85}{8}$ A

Posso verificare: noto V_1 calcolo i_1 o conoscendo i_{m1} verifico V_1.

$i_1 = i_{m1} - \underbrace{0}_{i\ esterna}$, $\quad v_1 = 30 - 1 \cdot i_{m1} = 30 - \frac{85}{8} = \boxed{\frac{156}{8}\ V} \rightarrow$ VERIFICATO

I metodi sono EQUIPOLLENTI.

M. di M. conviene se ho − maglie e + nodi e viceversa.

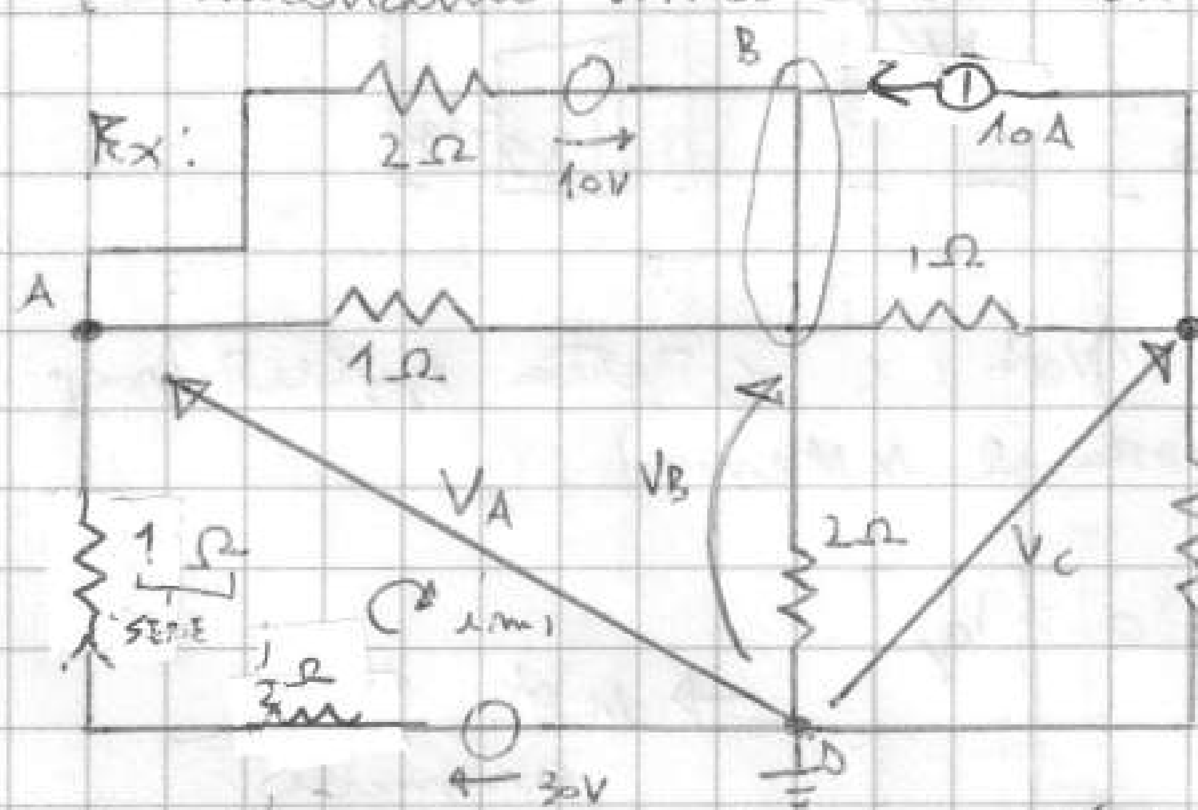
(28) Verifichiamo V_B (verifica x forza su i e V di lato).

- Calcolo i ①; $V_B = \frac{125}{8} \Rightarrow i = \frac{125}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{125}{16}$ A. Poiché $i = i_{m_3} - i_{m_1}$ posso calcolare i_{m_3}.

- Nota i_{m_2} $\left(\frac{65}{8} A\right)$, calcolo i ② $= i_{m_1} - i_{m_2}$ ho la V del lato: $V_A - V_B$

A

(rimuoviamo vincolo dei lati in 1. norton in metodo dei nodi)



[METODO DEI NODI GENERALIZZATO]

→ Non ci sono R in serie con generatore → alcuni rami non sono NORTON trasformabili, ho 2 vie

1. altero x ottenere trasformabilità

2. c'è metodo d. n. g. Scriviamo sistema usuale: $[G_{no}][V_{no}] = [I_{no}]$

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_4+R_1} & -\frac{1}{R_4+R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_4+R_1} & \frac{1}{R_4+R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g + I_{x_2} \\ 0 \\ -I_g + I_{x_1} \end{bmatrix}$$

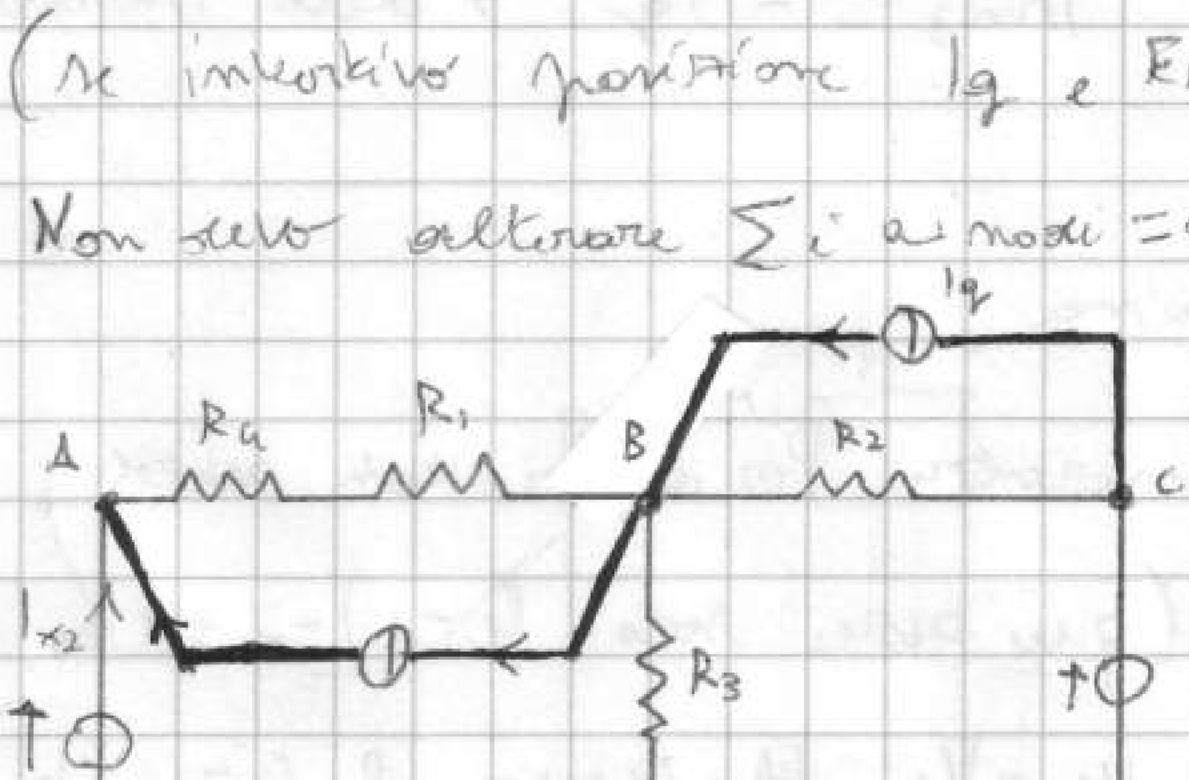
i lato $= G_V V - I_g$ (→ non c'è lineare / nodi) c'è → i indeterminata. I_{x_2} non è nota, ma cmq la considero una i dovuta a generatore ignoto. Rendo GRASSETTO le incognite: 5 inc. x 3 eq. (V_A, V_B, V_C + I_{x_1}, I_{x_2}). C'è relazione tra tensioni + EQUAZIONI DI VINCOLO

$V_A = E_2$ (NON E' INCOGNITA) e $V_C = E_1 \Rightarrow$ ho di nuovo 3 eq. con 3 incognit.

Inserendo le eq. di vincolo rendo risolvibile il sistema (ma non ho + matrice coefficienti e termini noti). Riarrangio il sistema

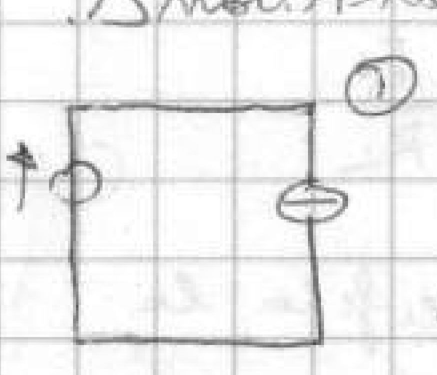
(se invertivo posizione I_g e E_1, avrei scritto $V_A - V_C = E_1$)

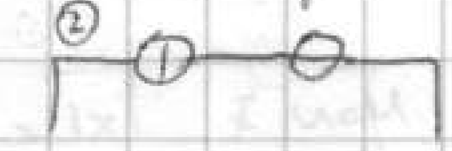
Non devo alterare $\sum i$ ai nodi $= 0$ ad ex. Faccio passare I_g su B e faccio uscire stesso valore, BC e AB sono t. trasformabili e posso fare metodo maglie.



Se voglio fare metodo dei nodi devo cercare f. thevenin (vedi circuito iniziale)

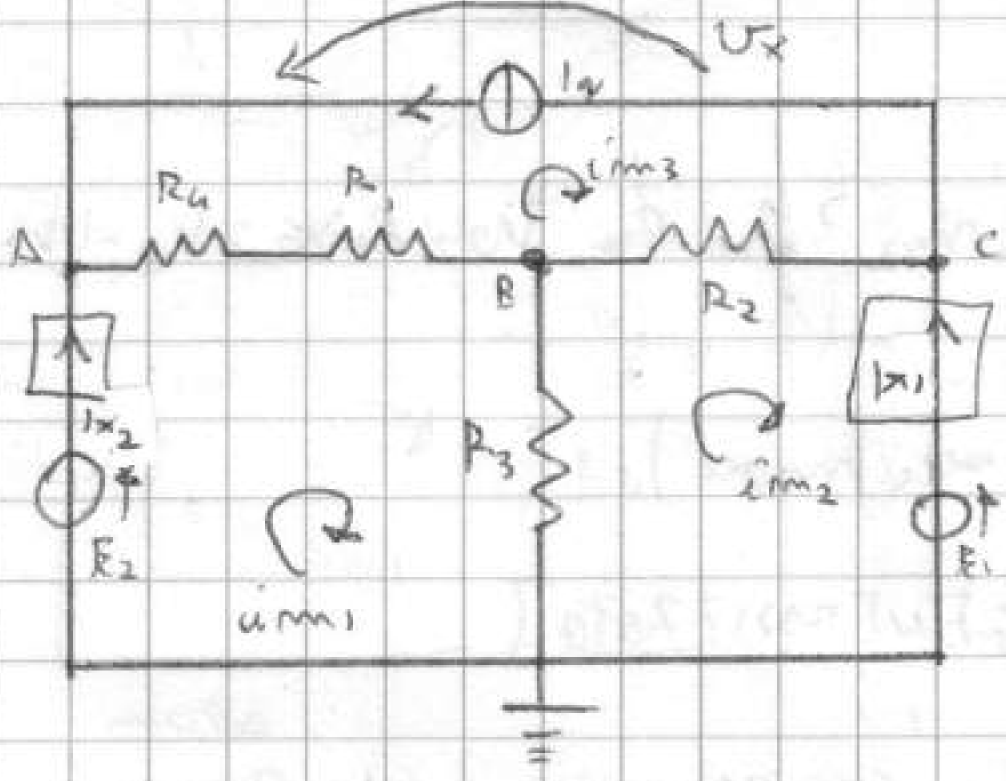
Analizziamo forme particolari (ex. parallelo di gen. di tensione uguali)



Ha senso (// gen. di i e f.e.m.) possono convivere / oppure Σ tra g. di i e fem)  ① è ignorata, è Ξ a semplice fem.

Per dualità nella serie ② ≡ gen. di i. [è stata ma la V non ci interessa]

19/10/05



$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} \frac{1}{R_4+R_1} & -\frac{1}{R_4+R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_4+R_1} & \frac{1}{R_4+R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cancel{V_A}\ E_2 \\ \boxed{V_B} \\ \cancel{V_C}\ E_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{I_{x_2}} + I_g \\ 0 \\ \boxed{I_{x1}} - I_g \end{bmatrix}$$

Vincoli: $V_A = E_2$; $V_C = E_1$ □ incognite. Non c'è diretta soluzione.
(metodo nodi) (si riorganizza il sistema)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_4+R_1} & -1 \\ 0 & \frac{1}{R_4+R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{MATRICE DEI COEFFICIENTI}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_{x_1} \\ V_B \\ I_{x_2} \end{bmatrix}}_{\text{INCOGNITE}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{E_2}{R_4+R_1} + 0 + I_g \\ +\frac{E_2}{R_4+R_1} + \frac{E_1}{R_2} + 0 \\ 0 - \frac{E_1}{R_2} - I_g \end{bmatrix}}_{\text{T. NOTI}}$$

→ sist. che ammette soluzione

Appl. metodo delle maglie. Le numero e prendo tutte con stesso verso.

Non potrebbe essere scritto normalmente (c'è lato non t.-trasf.) → GENERALIZZATO.

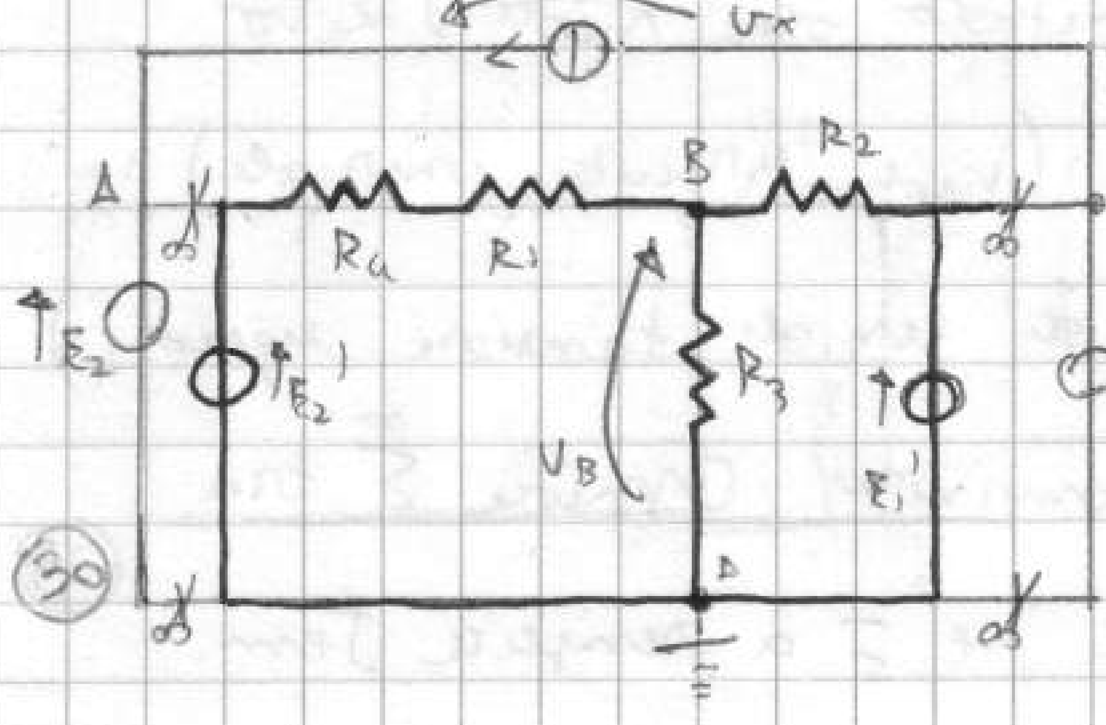
Scrivo sistema ignorando lato non trasformato.

$$\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{array}\begin{bmatrix} R_4+R_1+R_3 & -R_3 & -(R_4+R_1) \\ -R_3 & R_3+R_2 & -R_2 \\ -(R_4+R_1) & -R_2 & R_2+R_4+R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{i_{m_1}} \\ \boxed{i_{m_2}} \\ i_{m_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2 \\ -E_1 \\ \boxed{-V_x} \end{bmatrix}$$

La presenza di I_g fa sì che I_{m_3} è incognita. $I_{m_3} = -I_g$ → devo introdurre incognita in +: V_x (verifica)

Se tolgo I_g ho solo i_{m_1} e i_{m_2} uguali a prima

Per eliminare incognite elimino maglie con generatori. Per ogni con nodi elimino tanti nodi quante sono le incognite (qui avrei solo $(4-1)-2 = 1$ eq.)



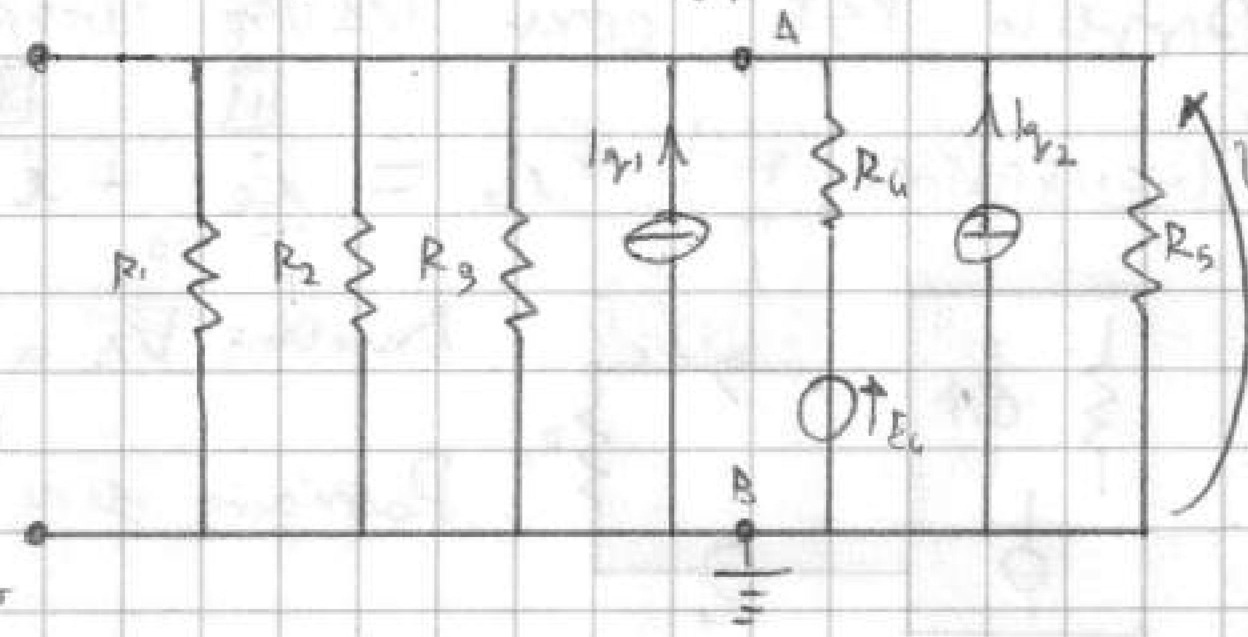
Elimino A e C; $V_A = V_A'$. Ha senso il circuito esterno tagliato. Sol. immediata:

$$\left(\frac{1}{R_4+R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}\right) V_B = \frac{E_2}{R_4+R_1} + \frac{E_1}{R_2}$$

Ma corrente non è I_{x1} e I_{x2}. Si semplifica la parte matematica ma poi si rifà circuito.

H

Circuiti studiati godono proprietà di linearità (operatori lineari tra grandezze) (additività). Questa prop. si traduce nel PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI: se ottengo effetto globale, questo si decompone a Σ effetti dovuti a singola causa.



Ex. circuito di 2 nodi. (I_{g_1} e I_{g_2} ha sempre R in //, potrei usare metodo maglie)

Sceglierei nodi (2 eq), con k. 7 eq. Cerchiamo

$\Delta V_{(BA)} \to V_A$; $(\underbrace{G_1+G_2+G_3+G_4+G_5}_{\to G_{nodale}})\,V_A = I_{g_1}+I_{g_2}+E_4G_4$ (effetto V_A)

(cause: E_4, I_{g_1}, I_{g_2}) $\to V_A = \underbrace{\frac{I_{g_1}}{G_{no}}}_{V_{A1}\,(I_{g_1})} + \underbrace{\frac{I_{g_2}}{G_{no}}}_{V_{A2}\,(I_{g_2})} + \underbrace{\frac{E_4G_4}{G_{no}}}_{V_{A3}\,(E_4)} \to$

$\boxed{V_A = \sum_{k=1}^{3} V_{Ak}}$ Posso unire cause (ex. V_{A1} e V_{A3})

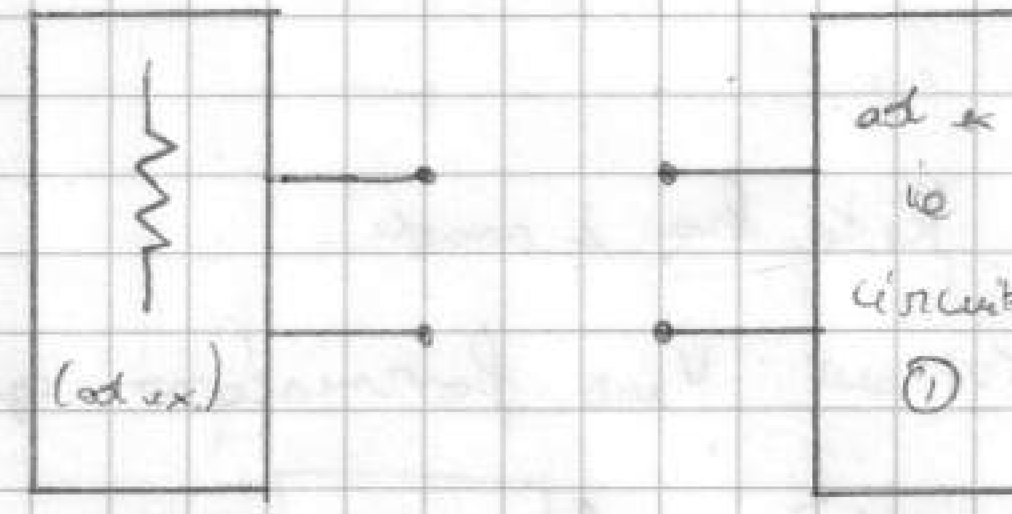
Ex: Voglio V_{A1} → spengo V_{A3} e V_{A2} (spegnere generatore → corr. altro circuito, elimino suo ramo; spegnere fem → sostituisco con EQP)

↓

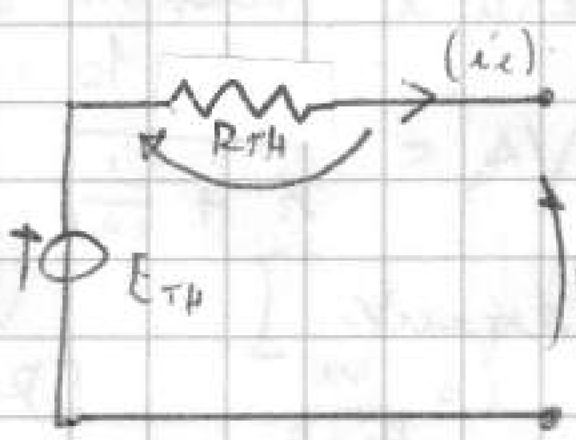
TEOREMA DI THEVENIN

Utile x far comunicare reti diverse tramite 2 contatti accessibili.

Ex: spina in presa → coll. elettrico con 2 terminali di 2 sistemi fino a prima separati.



∀ rete accessibile da 2 morsetti (vista come bipolo), cerco di schematizzarla in forma Thevenin, (a prescindere da interno)

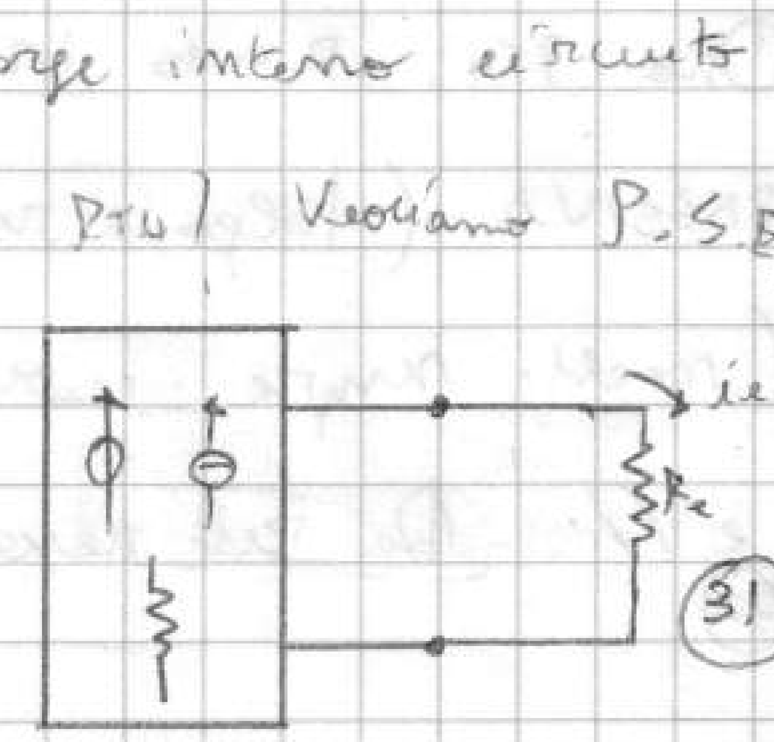


[non vale sempre, ex. cortocircuito batteria macchina è non lin.]

A vuoto (morsetti esterni) dato valore E_{TH}, non c'è i in R_{TH} quindi $\boxed{E_{TH} = V_0}$ (devo trovare equivalente), vuoto non si accorge interno circuito.

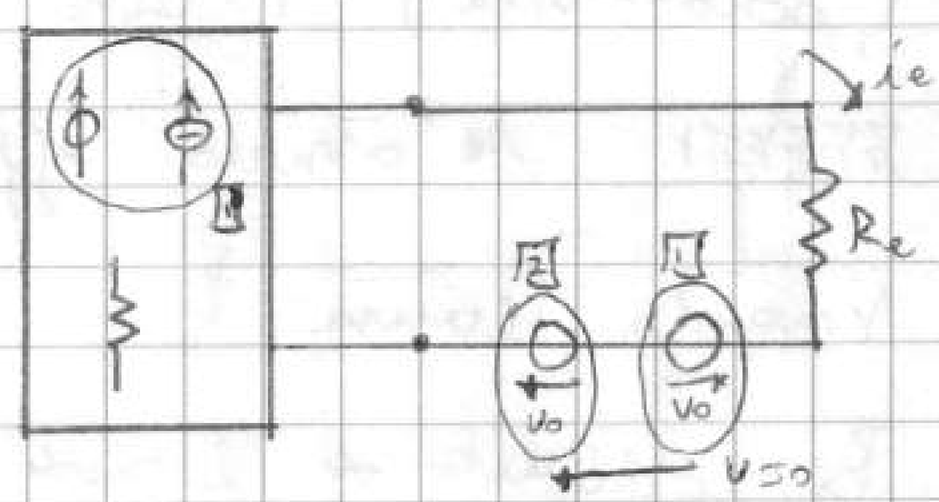
Tutto è come se ∃ gen. di 220 V. Che valore dare a R_{TH}? Vediamo P.S.E.

Proviamo ad ex una resistenza di prova collegata ai morsetti (R_e). Posso misurare i esterna che non è V_0/R_e, c'è caduta di tensione.

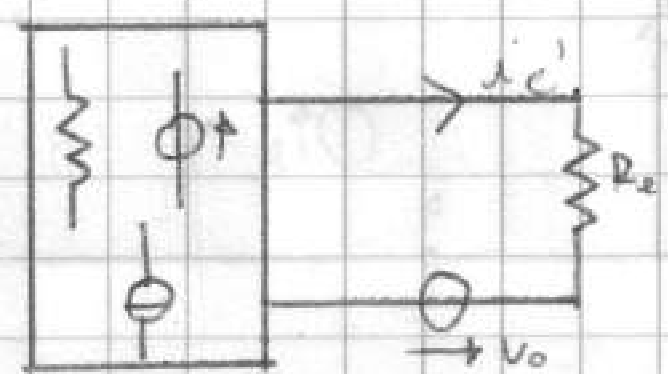


i che passa per R_{TH} dà luogo a caduta di tensione, quindi V_0 sarà ora $E_{TH} - R_{TH}\, i_e$.

Dentro a blocco ci saranno generatori e r. interne. Prendo 2 generatori = e opposti ai quali do valore V_0 ($V=0$)



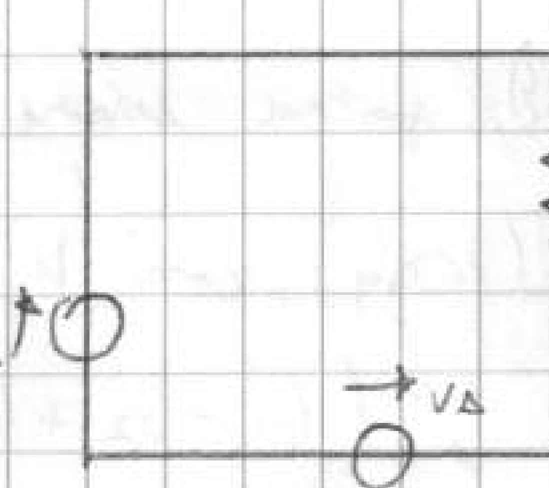
Applico PSE corr. (CAUSE INTERNE e GENERATORE $\xrightarrow{V_0}$), (GENERATORE $\uparrow V_0$) $\rightarrow i_e = i_e' + i_e''$



Ovvero V_A a vuoto, ora ho:

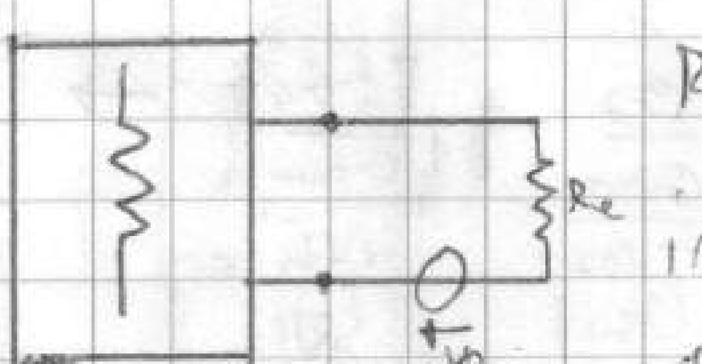
Possiamo dire che $i_e' = 0$

$\Downarrow$



→ non cambia elemento passivo

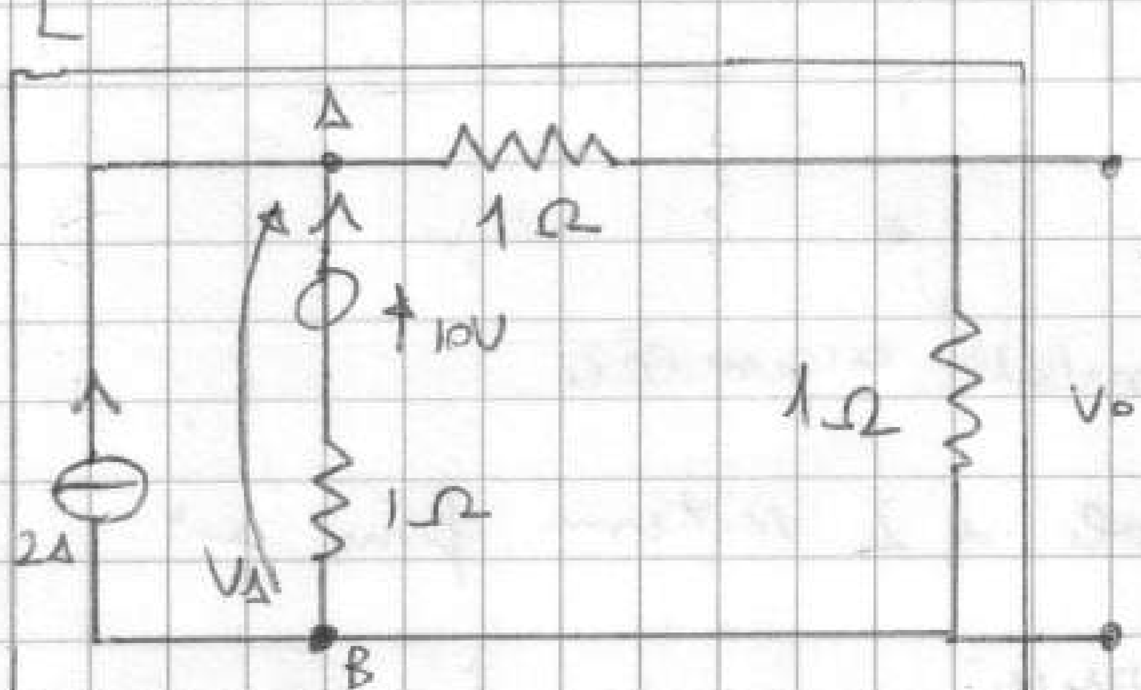
Posso considerare questo schema:

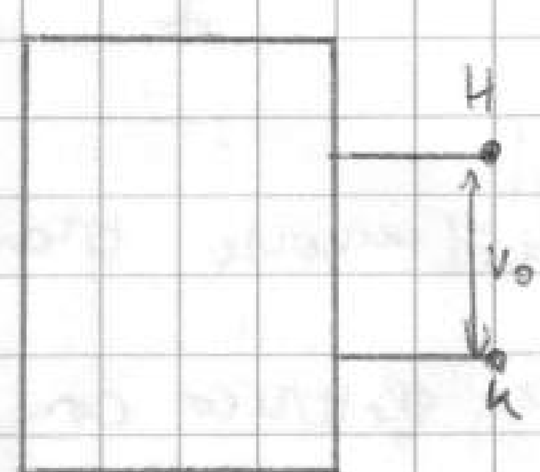


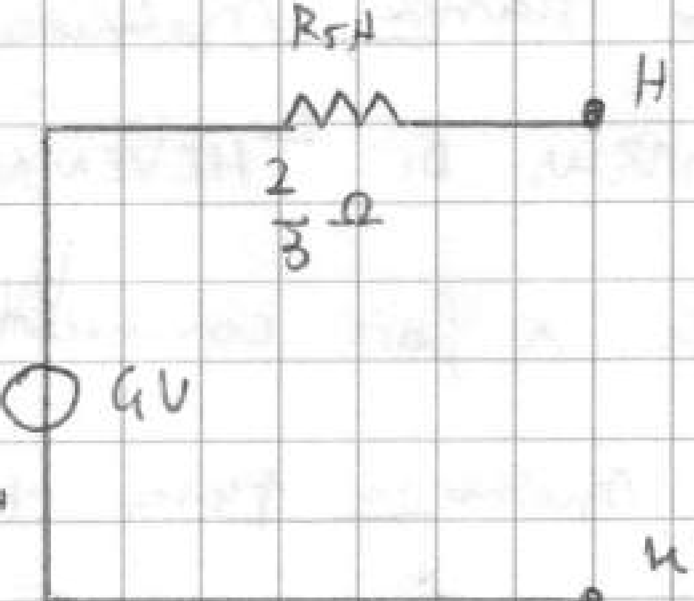
R_{TH} = Req vista dai morsetti avendo spento tutti i generatori indipendenti della rete. Da circuito (1) ho R in // che ci permette di dimensionare R_{TH}.

20/10/05

[ESERCIZIO SUL TH. di THEVENIN]







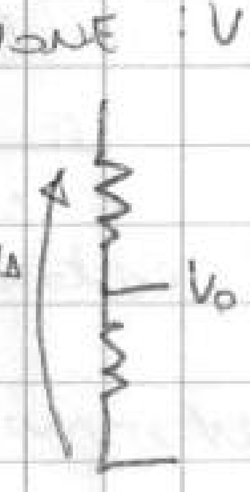
Utente conosce solo rapp. th. scatola; 2 interlocutori: progettista scatola che dà rapp. theven. e altro utilizzatore

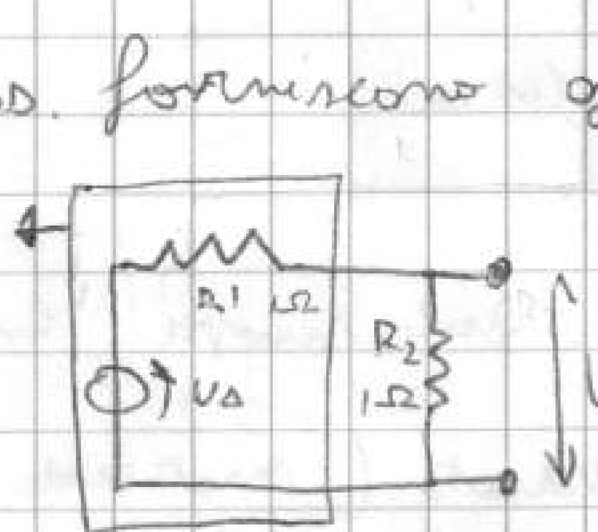
E_{TH} è tensione a vuoto tra morsetti H e K [V_0]. Rete ha 2 nodi.

$V_A = \dfrac{2A + 10\cdot 1}{1 + \frac{1}{1+1}} = 2\cdot\dfrac{12}{3} = 8V$ [PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE: $V_{nod.}$ forniscono gen. equiv.] $\quad V_0 = \dfrac{V_A}{2}$ [$R_2 \cdot i$] $\rightarrow V_0 = 4V$

$i = \dfrac{V_A}{R_2 + R_1}$

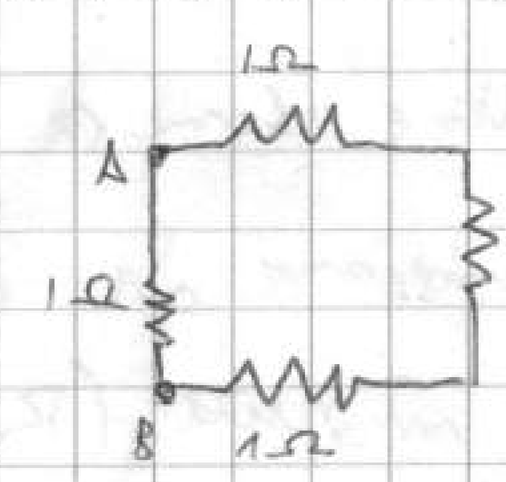
$\Downarrow$





$\underline{E_{TH} = 4V}$ [a una E_{TH} possono essere ∞ reti]

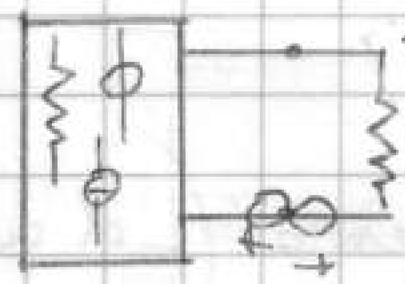
Ora R_{TH}: R vista tra H e K avendo spento i gen. indipendenti → RETE è RESA PASSIVA (tolgo le fem dei gen. i e metto c.c. a fem); (mettere sempre nodi x orientarsi nella rete). Cercare Σ e //. Da rete resa passiva a rete orig. è IMPOSSIBILE.



(→)

ottengo  $R_{TH} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}\ \Omega$

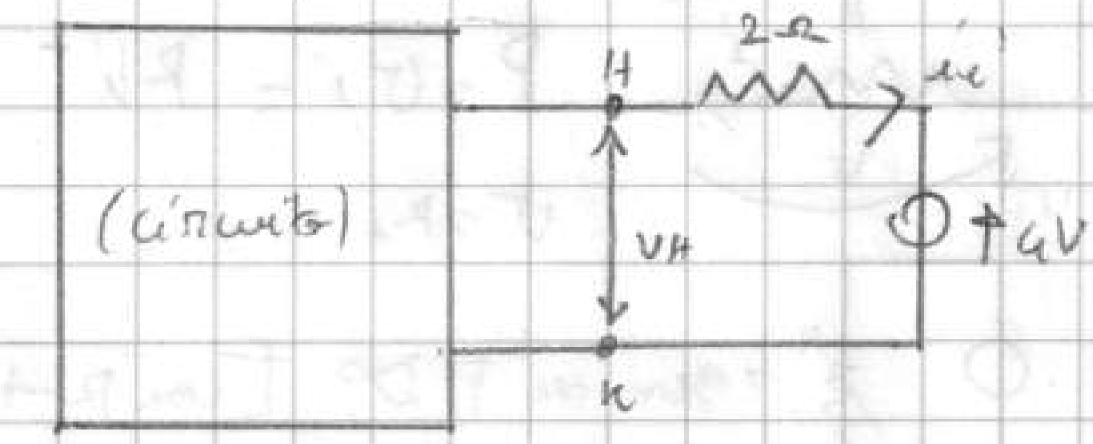
(dalla elim. di ieri) Proviamo una $R_e = 2\Omega$ e $V_0 = 4V$

 (tra H e k metto R e gen)

↓

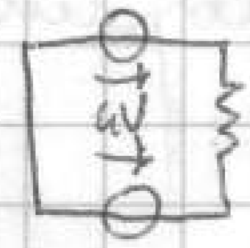
Risolvo rete con

metodo dei nodi $[k \equiv B] \to V=0$

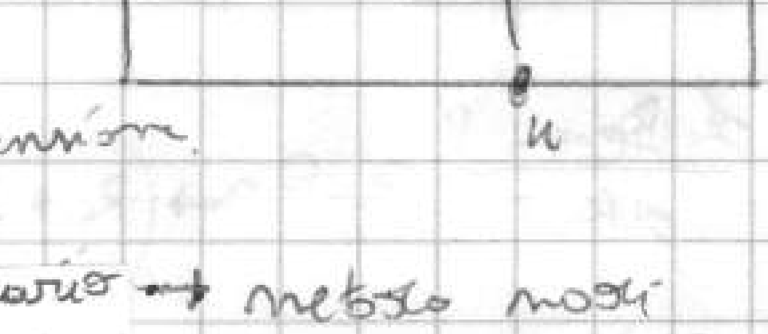


$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & H \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ H \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \cancel{2+\frac{1}{2}}\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} V_A \\ V_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+10 \\ \frac{4}{2}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\det[G_{no}] = 5-1 = 4$, $V_H = \dfrac{1}{\det[G_{no}]} \cdot = \dfrac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{4}[4+12] = \boxed{4V} \to$ STESSA V_{0TH}

$\Rightarrow$ è evidente che $i_e' = 0$  . (torna al 1° circ.)

Ora utilizzatore collega a scatola una $R = 3\Omega$, che potenza si ricava dalla scatola? Conoscendo la rappr. th. è immediato



$i = \dfrac{E_{TH}}{\frac{2}{3}+3} = \dfrac{4}{\frac{11}{3}} = \dfrac{12}{11}A$; $V = \overbrace{\dfrac{12}{11}}^{i} \cdot \overbrace{3}^{R} = \boxed{\dfrac{36}{11}V} < V_0 = 4V$

↳ effetto caduta tensione

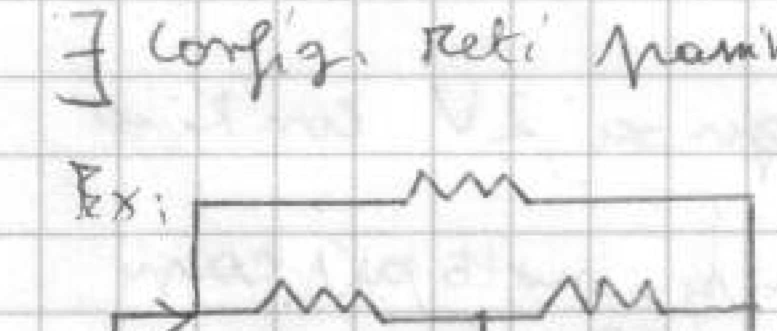
Verifico mettendo 3Ω ai capi di H e k del circuito originario → metodo nodi

$$\begin{array}{c} A \\ H \end{array}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \cancel{2+\frac{1}{3}}\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

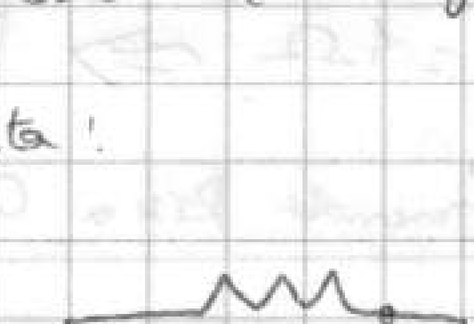
, $\det[G_{no}] = \dfrac{14}{3} - 1 = \dfrac{11}{3}$, $V_H = \dfrac{3}{11}\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{3 \cdot 12}{11} = \dfrac{36}{11}$

$i = \dfrac{V_H}{3} = \dfrac{12}{11}A$ → verificata rapp. thevenin.

∃ config. reti passive che non riescono a fornire R_{TH}.

Ex:  (rete passiva)

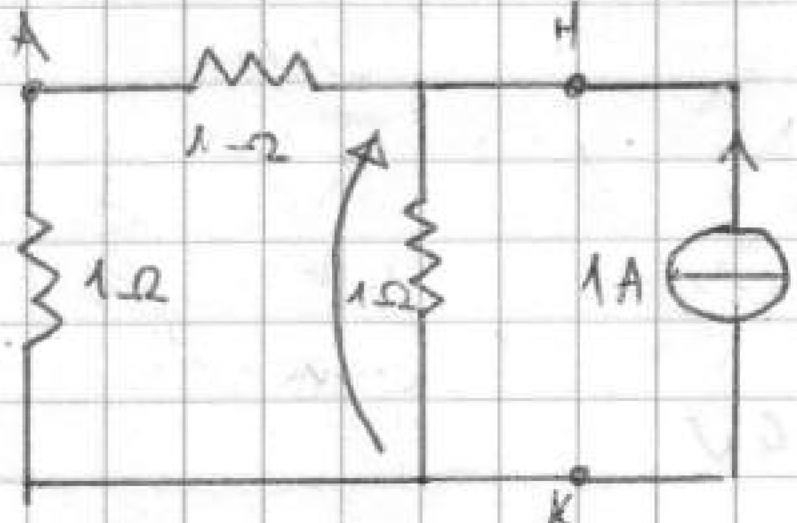
∃ metodo: (TRASFORMAZIONE STELLA-TRIANGOLO / TRIANGOLO-STELLA) anche se qui si possono sfruttare metodi generali con vari artifici. Se ho ret. pass. schema THEVENIN diventa:



Se prendo mio generatore esterno di un valore e a caso (ex 1A) risolverò la rete. Comparirà una $V \Rightarrow R_{TH} = \dfrac{V}{I}$

Verifichiamo da rete resa passiva in origine

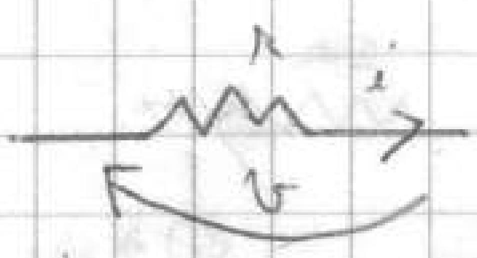
(↪)



Conv. Δ come in modo (anche se non è obbligatorio)

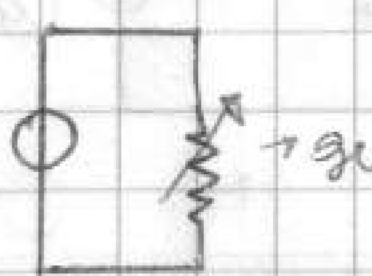
$\left(\frac{1}{2}+1\right)V_H = 1A \rightarrow V_H = \frac{2}{3} V$; $\frac{V_H}{1A} = \frac{2}{3}\Omega$ → stesso con la trasformazione

(vale ∀ trasformazione!)

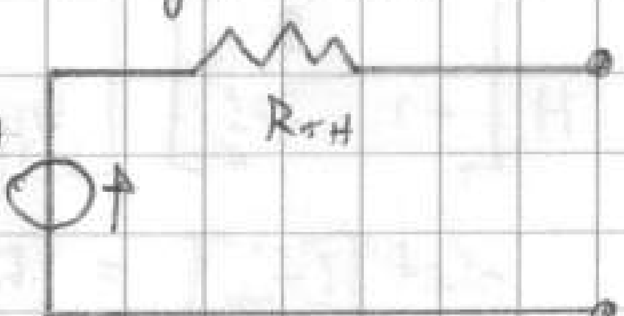


$P = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R}$ Voglio aumentare la potenza (∝ a parità di V o i)

$V = Ri$



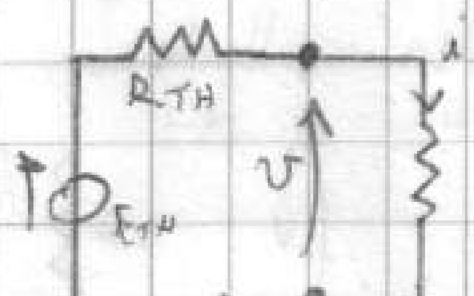
→ gen di P ∞ [con $R \rightarrow 0$]. TRT. → ∃ sempre R serie al generatore → GENERATORE REALE DI TENSIONE ⤳ posso sempre scrivere



Regolando R arriverò a P_{max} estraibile dal generatore, oltre P cala. (R_{TH} ad ex è quello dei conduttori rete elettrica).

Qual è il valore di R x avere P_{max}!

MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA

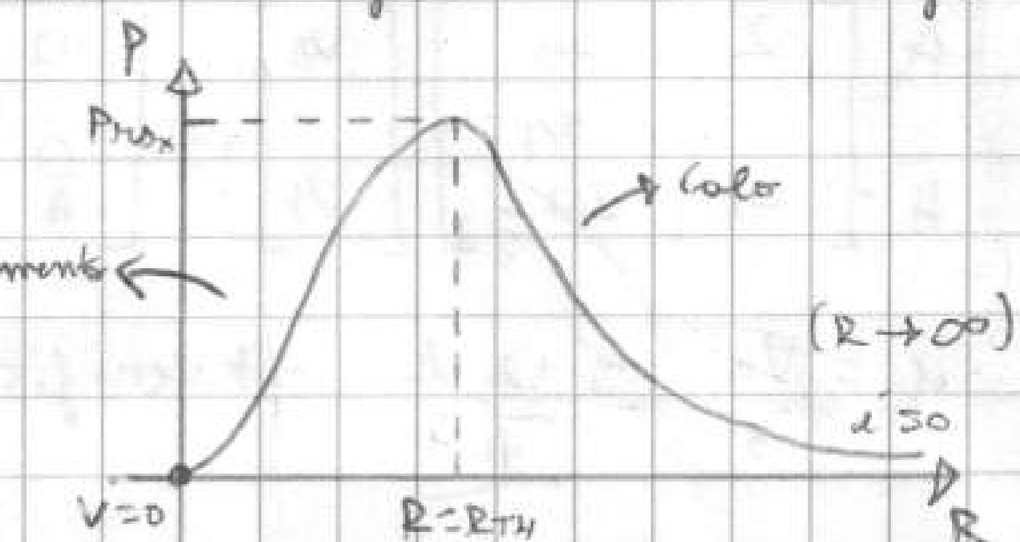


$\boxed{P = R \cdot i^2 = R\frac{E_{TH}^2}{(R+R_{TH})^2}}$ il massimo quindi è $\frac{dP}{dR} = 0$

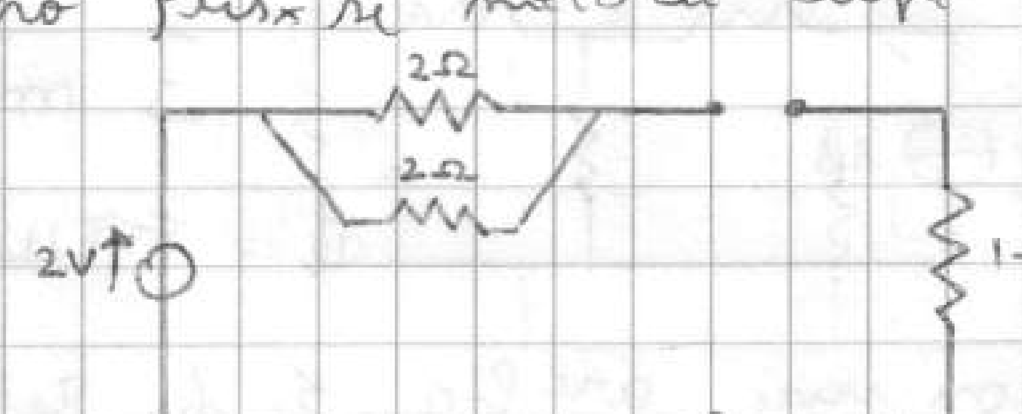
$\rightarrow P = \frac{E_{TH}^2}{\frac{R^2+2RR_{TH}+R_{TH}^2}{R}}$ ⟩ ↑R → deriv. den. = 0.

$\frac{d\,denom\,P}{dR} = 0 \rightsquigarrow \left(R + 2R_{TH} + \frac{R_{TH}^2}{R}\right)\frac{d}{dR} = 0 \rightarrow 1 - \frac{R_{TH}^2}{R^2} = 0 \rightarrow \boxed{R = R_{TH}}$

Se all'esterno del bipolo collego una R pari alla R.int del generatore ottengo una P max. Costruire altre linee vuol dire mettere in // altre R → la Req sarà minore e ho + potenza.



$P_{max} = \cancel{R_{TH}}\frac{E_{TH}^2}{4R_{TH}^{\cancel{2}}} \Rightarrow \boxed{P_M = \frac{E_{TH}^2}{4R_{TH}}}$ Se ad ex. ho gen di 2V con R_i di 2Ω ho P_{max} se metto ai capi R di 2Ω che vale $\frac{1}{2}$W. Se metto in // R ho $R_{TH} = 1\Omega \Rightarrow P_{max} = 1W$, il DOPPIO.

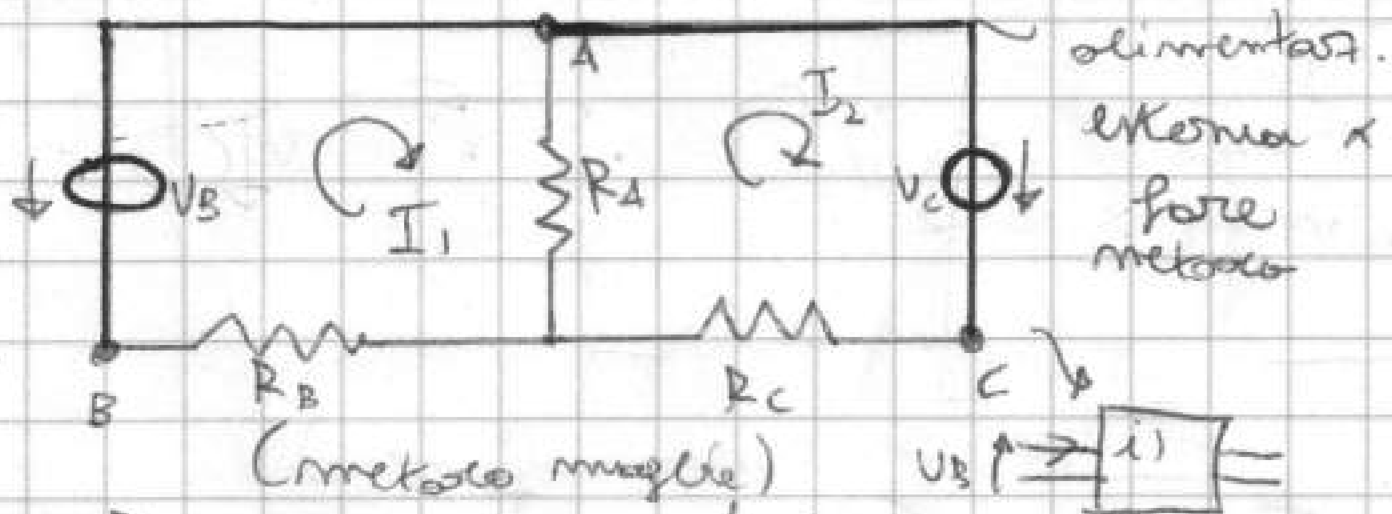


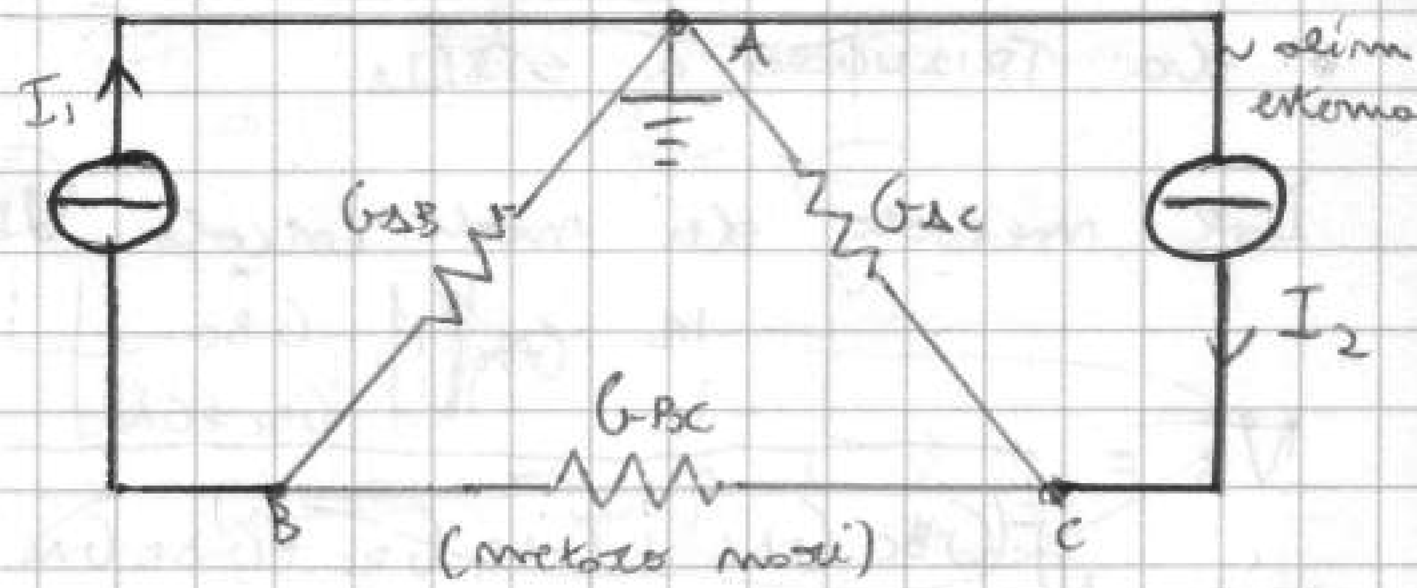
Diminuendo R_{TH} a 0 [∞ collegamenti] ho P sempre >

TRASFORMAZIONI STELLA - TRIANGOLO 24/10/05

Y Δ

(⟶)





• Da stella a triangolo

Non si deve mutare il comportamento esterno. Per il prin. di sost.
↳ aggiungo gen. est ai V e ai I

V_B tr. $= V_B$ st. se $I_1 = I_1$

- Metodo maglie. - Metodo nodi

$$\begin{bmatrix} R_B+R_\Delta & -R_\Delta \\ -R_\Delta & R_\Delta+R_C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_B \\ V_C \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} G_{\Delta B}+G_{BC} & -G_{BC} \\ -G_{BC} & G_{BC}+G_{\Delta C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Voglio cambiare segno $[V]$ → cambio 1ª riga

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -(R_B+R_\Delta) & +R_\Delta \\ -R_\Delta & R_\Delta+R_C \end{bmatrix}}_{[R_m']}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_B \\ V_C \end{bmatrix}$$

[cambio sola 1ª riga: $-(G_{\Delta B}+G_{BC}) \quad +G_{BC} \rightarrow I_1$

Uso metodo maglie:

$$\det[R_m'] = -R_\Delta R_B - R_B R_C - \cancel{R_\Delta^2} - R_\Delta R_C + \cancel{R_\Delta^2} = -(R_\Delta R_B + R_B R_C + R_\Delta R_C)$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_B & R_\Delta \\ V_C & R_\Delta+R_C \end{vmatrix}}{\det[R_m']} = \frac{R_\Delta}{\det[R_m']}V_B + \frac{R_C}{\det[R_m']}V_B - \frac{R_\Delta}{\det[R_m']}V_C$$

Verificando dal metodo dei nodi:

$$I_1 = -(G_{\Delta B}+G_{BC})V_B + \boxed{G_{BC}V_C}$$ → x principio i coeff. devono esser uguali!

$$\boxed{G_{BC} = \frac{R_\Delta}{R_\Delta R_B + R_\Delta R_C + R_B R_C}}$$ Per simmetria calcolo è identico x altre conduttanze

Questa conduttanza è uguale al rapporto tra la resistenza che si oppone al lato in esame e ai prodotti misti a 2 a 2 delle resistenze stella.

$$\boxed{G_{\Delta B} = \frac{R_C}{R_\Delta R_B + R_\Delta R_C + R_B R_C}}$$ → le componenti di $G_{\Delta B}$; $$\boxed{G_{\Delta C} = \frac{R_B}{R_\Delta R_B + R_\Delta R_C + R_B R_C}}$$

(→)

• da TRIANGOLO a STELLA

Dal metodo dei nodi calcolo V_B

$$V_B = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & G_{BC} \\ I_2 & G_{BC}+G_{AC} \end{vmatrix}}{-(G_{BC}G_{AC}+G_{AB}G_{BC}+G_{AB}G_{AC})} = \dots I_1 + \frac{G_{BC}}{(G_{BC}G_{AC}\dots)} \cdot I_2$$

prod. misti

Si ottiene quindi la relaz. finale (moltiplicando e confrontando)

$$\boxed{R_A = \frac{G_{BC}}{G_{BC}G_{AB}+G_{AC}G_{AB}+G_{BC}G_{AC}}} \rightarrow = \frac{R_{AC}\,R_{AB}}{R_{AC}+R_{AB}+R_{BC}}$$

(è il duale dell'altro)

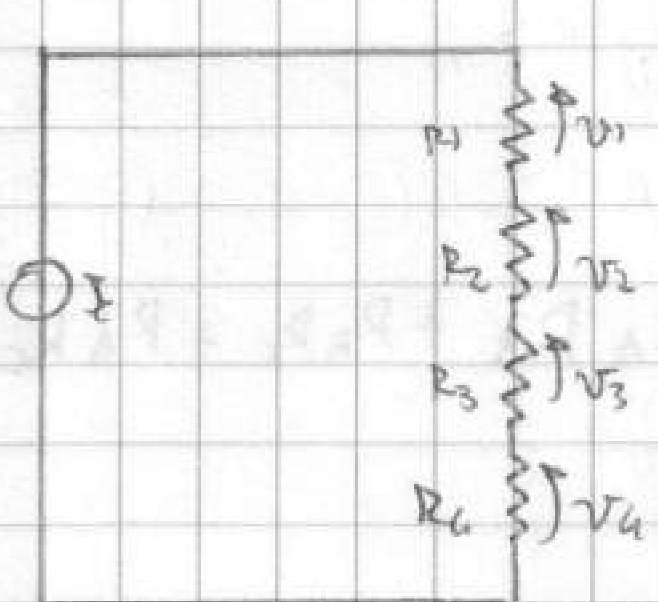
//

PARTITORI DI TENSIONE E DI CORRENTE

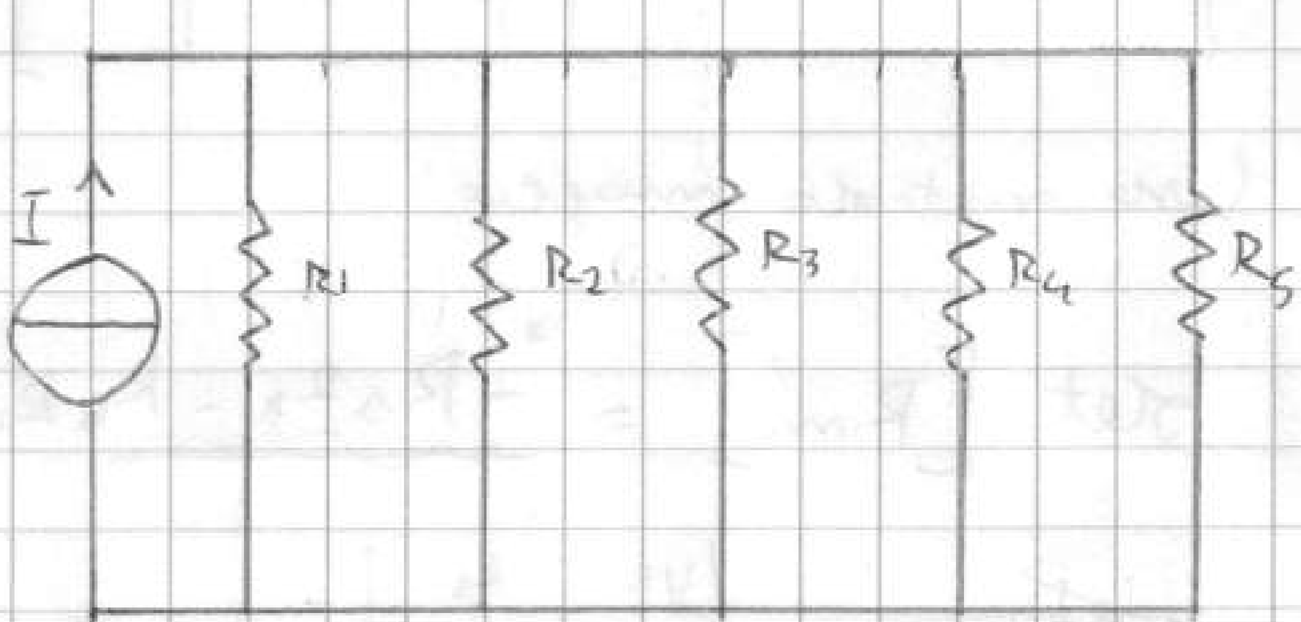
→ PARTITORE SERIE → LATI PARALLELO

Posso dei resistori voglio ripartire la v di un fem o la i di un gen.

Ex:



(i nomi = come la stessa partizione di v)



$$\sum v_k = E$$

$$\boxed{v_k = \frac{R_k}{R_S} E}$$

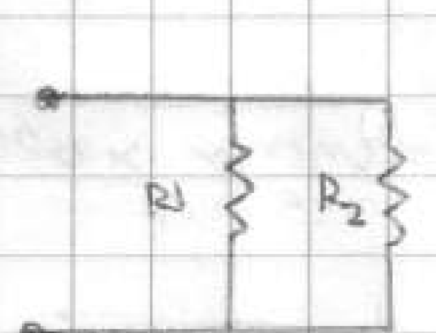
→ Resist. SERIE $\sum_{k=1}^{n} R_k$

è una percentuale

Per dualità

$$\boxed{i_k = \frac{G_k}{G_P} I}$$

Nota:



Per trovare la R_{eq} si fa $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ $\left[\frac{1}{G_1+G_2}\right]$

Per trovare la G_{eq} si fa $\frac{G_1G_2}{G_1+G_2}$

Ex uso di trasf.

Cerca le conf. stella e triangolo

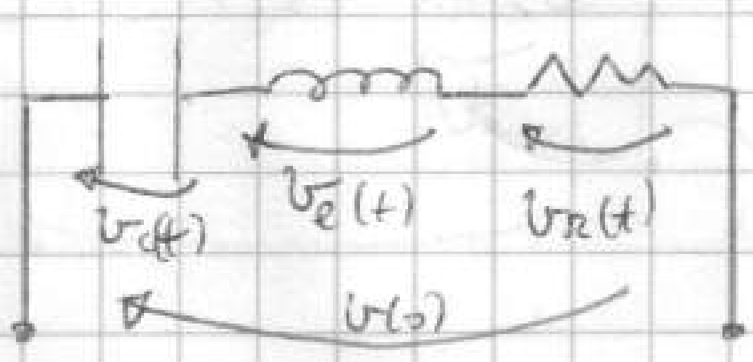
prendo la stella, la nomino e la trasformo, quindi cancello il vecchio.

4

CIRCUITI CON MEMORIA

Si passa dal dominio del tempo (con eq. diff.) ad un altro dominio posso usare + agevolmente eq. algebriche x poi riconvertire in tempo.

I p.d.K. valgono SEMPRE.



$$v(t) = v_c(t) + v_L(t) + v_R(t) =$$

$$\frac{1}{C}\int^{t} i(t)\,dt + v_c(0) + Ri + \overbrace{L\frac{di}{dt}}^{\text{induttore}}$$

[legge cost. cond. : $i = C\frac{dv}{dt}$] (cond. può essere già carico) valore noto da $-\infty$ a 0

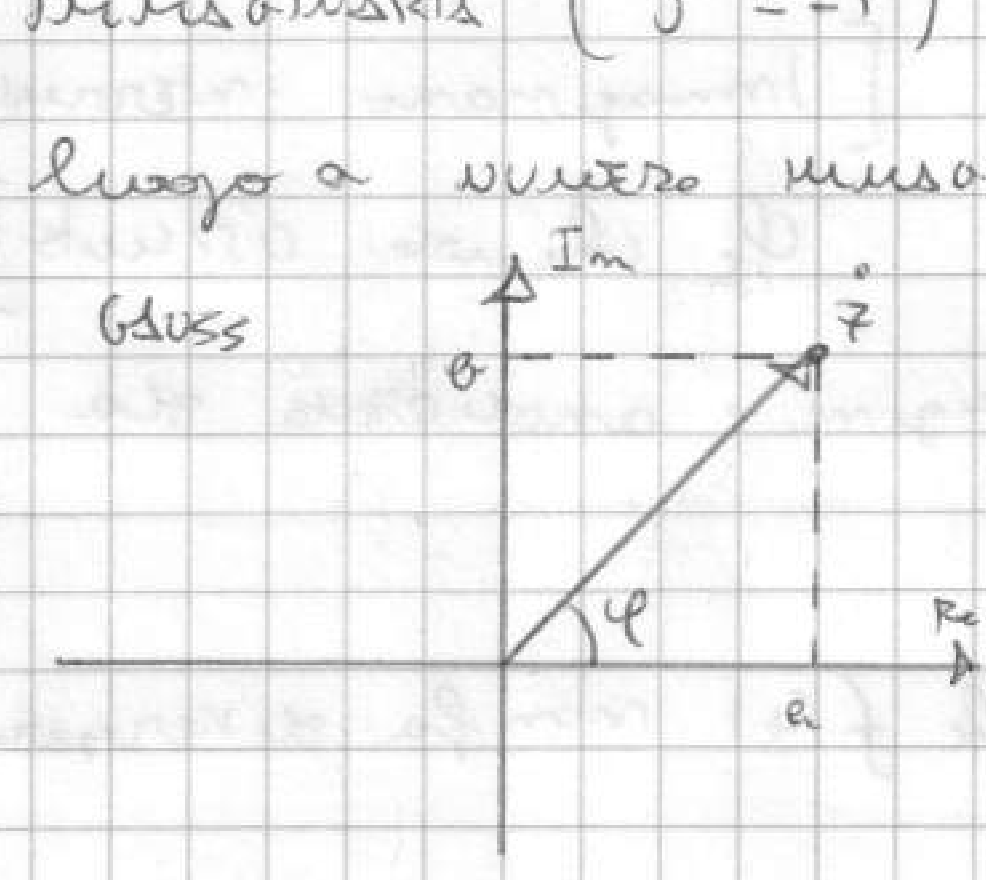
∃ 2 tipi di soluzioni:

1) integro le eq. tramite la trasformata di LAPLACE
2) tramite ANALISI dominio FREQUENZA (in gen. sono SINUSOIDALI)

NUMERI COMPLESSI:

Si tentava di risolvere $x^2+1=0$ che non ha soluzione in $\mathbb{R}$.

La soluzione dovrebbe essere $x = \pm\sqrt{-1}$. Viene chiamata $j = \sqrt{-1}$ UNITÀ IMMAGINARIA ($j^2=-1$), se $x^2+4=0 \rightarrow x = \pm 2j \rightarrow$ in $\mathbb{R} \times j$ da luogo a NUMERO IMMAGINARIO. $\boxed{\dot{Z} = a + jb}$ → NUMERO COMPLESSO. → CARTESIANO



→ Z descrive p.to nel piano, determino 1 vettore.

1 è versore asse Re, j è versore asse immaginario

Ha senso il modulo del vettore.

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad a = Re\{z\}, \quad b = Im\{z\}$$

Rapp. di EULERO: con φ = argomento di z, $a = |z|\cos\varphi$ $b = |z|\sin\varphi$

$$\dot{Z} = |\dot{z}|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = \boxed{|\dot{z}|\,e^{j\varphi}} \quad (e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi)$$

FORMA POLARE o EULERIANA ← quindi $\tan\varphi = \frac{Im(z)}{Re(z)} = \frac{b}{a}$

Ha senso sommare complessi! $\dot{Z}_1 \pm \dot{Z}_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$

" " moltiplicare " ! $\dot{Z}_1\dot{Z}_2 = |z_1|e^{j\varphi_1} \cdot |z_2|e^{j\varphi_2} =$

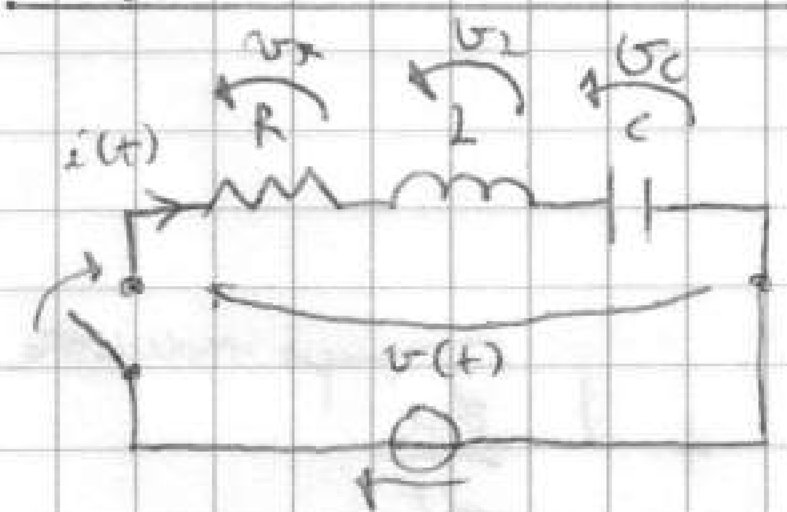
$|z_1|\,|z_2|\,e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$

La divisione è: $\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Il CONIUGATO.

$\dot{Z} = a + jb$. Il suo coniugato si ottiene cambiando segno alla parte immaginaria $\dot{Z}^* = a - jb$. $\Rightarrow \dot{Z} \cdot \dot{Z}^* = |\dot{Z}|^2$

26/10/2005



$$v(t) = \underbrace{Ri}_{v_R(t)} + \underbrace{L\frac{di}{dt}}_{v_L(t)} + \underbrace{\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt + v_C(0)}_{v_C(t)}$$

Sia L che C hanno memoria. Sono scritte così:

$$\left.\begin{cases} v_C(0) \rightarrow \text{tensione su capacità} \\ i_L(0) \rightarrow \text{corrente su conduttore} \end{cases}\right\} \text{L e C sono DUALI}$$

Studiamo passaggio dal dominio del tempo ad altro [Vedi: Tr. di LAPLACE]

$t \Longleftrightarrow s$ (oppure p) (Passaggio a S [TRASFORMAZIONE] e poi torno a $\mathbb{R}$ [ANTITRASFORMAZIONE])

$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{C}$ $\qquad s = \alpha + j\beta$

TRASFORMAZIONE DI LAPLACE. Voglio far scomparire variab. t. $f(t)$ sarà o la i o la v. Voglio che sia $F(s)$. [minuscole: t, maiusc: S]

Integro la funzione. $\boxed{F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt}$ [Immaginiamo interruttore che chiude circuito]

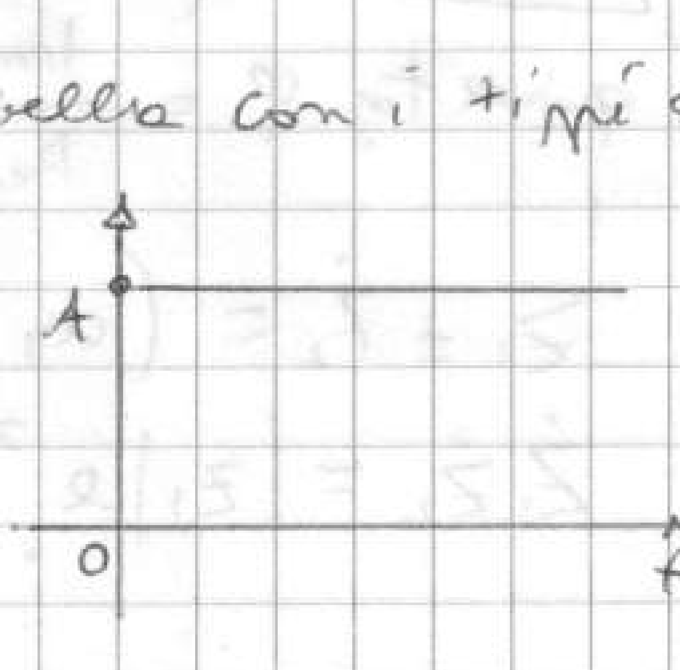
(interruttore la cui chiusura avviene a $t=0$. L'origine è anticipata da sx - COND INIZIALI - e da dx - EVOLUZIONE)

Quindi $F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st}\, dt$. Ipotizziamo che $f(t)$ non fa divergere l'integrale

Si usa anche $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Vediamo le $\mathcal{L}$ di alcune $f(x)$.

Si fa tabella: → tabella con i tipi di funzione. 1) Costante in 0^-

$f(t)$	$F(s)$



Chiamata GRADINO di ampiezza A. [$t<0 \rightarrow =0$, $t \geq 0 \rightarrow =1$] GRADINO UNITARIO se $A=1$, simbolo è $1(t)$ o $u_{-1}(t)$

gradino di ampiezza A si scrive $A\,u_{-1}(t)$ [o $A_1(t)$]

$$-\ \mathcal{L}\{A\,u_{-1}(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} A e^{-st}\,dt = -\frac{A}{s}e^{-st}\Big|_{0^-}^{+\infty} = \frac{A}{s}$$

$f(t)$	$F(s)$
$A\,u_{-1}(t)$	A/s
$A e^{\alpha t}$	$\dfrac{A}{s-\alpha}$

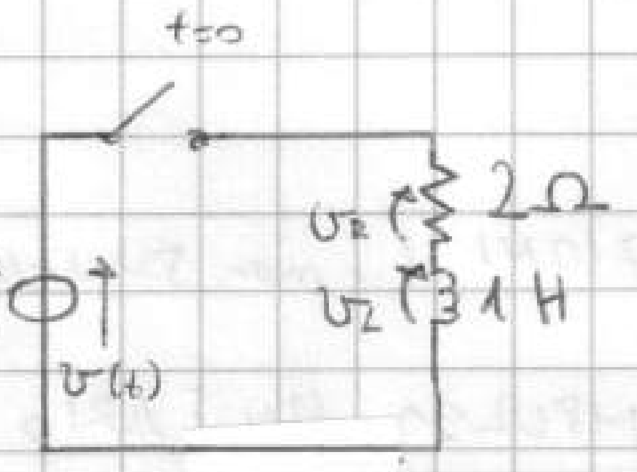
$$2)\ \mathcal{L}\{\underbrace{e^{\overset{\alpha\in\mathbb{R}\text{ o }\mathbb{C}}{\alpha t}}}_{\text{può essere un gradino}}\} = A\int_{0^-}^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-st}\,dt = A\int_{0^-}^{+\infty} e^{-(s+\alpha)t}\,dt = \frac{A}{s-\alpha}$$

Gradino importante quando si apre interruttore (anche se natura e' continua)

supponiamo nota $F(s)$. Quanto vale $\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = G(s)$

Applico def:
$$G(s) = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\,dt \ [\text{si risolve x parti}] = sF(s) - \overbrace{f(0^-)}^{\text{numero}}.$$

Ex:



$v(t) = v_L(t) + v_R(t)$. Voglio $\mathcal{L}\{v(t)\} =$

$$\underbrace{\mathcal{L}\{v_L(t) + v_R(t)\}}_{\text{tiene conto dei P.s.h.}} \rightsquigarrow V(s) = V_L(s) + V_R(s)$$

$$\overbrace{\frac{10}{s}}^{V(s)} = [v_R(t) = Ri,\ V_R(s) = R\,\mathcal{L}(i) = R\,I(s)]\ R\,I(s) + L[s\,I(s) - i(0^-)]$$

$[v_L(t) = L\frac{di}{dt},\ V_L(s) = L\,\mathcal{L}\{\frac{di}{dt}\} = L[s\,I(s) - i(0^-)]]$. L'eq. diff.

si trasforma in forma algebrica. In questo caso prima di chiudere inter.

la corrente non c'era $\to i(0^-) = 0$. $\frac{10}{s} = (2+s)\underbrace{I(s)}_{\text{la incogn.}}$ $\to I(s) = \frac{10}{s(s+2)}$

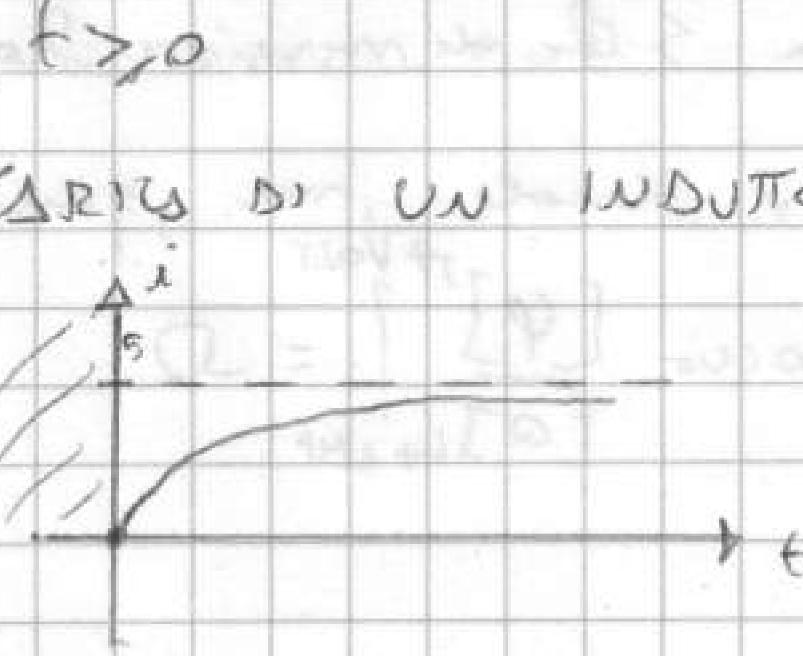
Prendo la tabella e vedo qualcosa che assomiglia al risultato.

Cerchiamo di ricondurre a $\frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$, $\frac{As+2A+Bs}{s(s+2)} = \frac{10}{s(s+2)}$, $\begin{cases} A+B=0 & (s) \\ 2A=10 \end{cases}$

$\Rightarrow A=5,\ B=-5 \Rightarrow I(s) = \frac{5}{s} - \frac{5}{s+2}$ e scrivo l'antitrasformata.

$$\begin{cases} i(t) = \overbrace{5}^{\text{non metto il gradino una volta imposto } t\geq 0} + (-5e^{-2t}) = 5(1-e^{-2t}) \\ t\geq 0 \end{cases}$$ graficamente abbiamo ottenuto la

CARICA DI UN INDUTTORE ; in S assomiglia molto a legge di Ohm.



$V(s) = \underbrace{Z(s)}_{\mathcal{I}}\,I(s) \to$ LEGGE DI OHM "SIMBOLICA"

Ha ruolo della Resistenza che lega generalmente I e V.

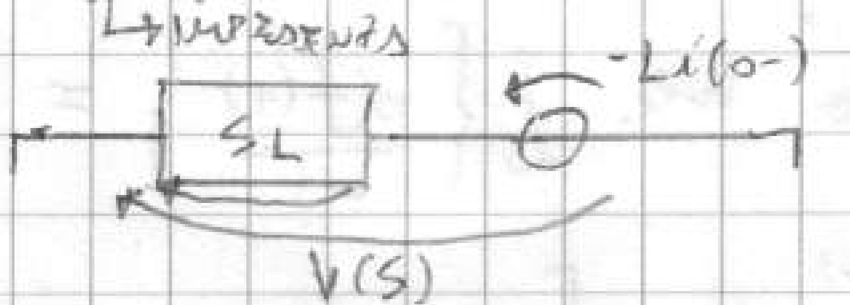
Per estensione Z(s) sarebbe $\mathcal{L}(R)$. Z(s) è chiamata IMPEDENZA → L'unica che conserva DIMENSIONI

- R resiste al flusso della corrente
- Z(s) cerca di "impedire" il flusso della corrente.

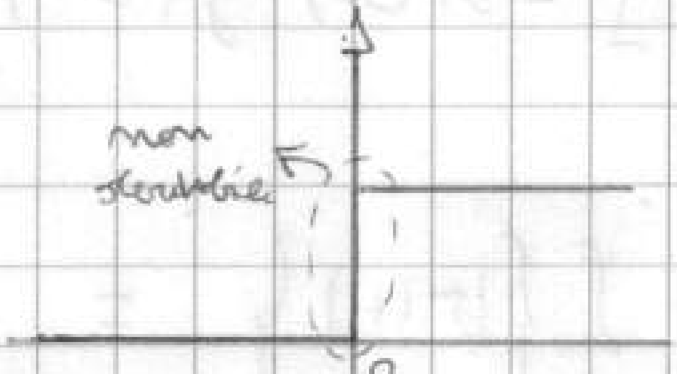
Se avessi avuto $L\,i(0^-)$ avrei avuto un semplice numero, non un gradino.

Quando ho costante in S [ex A] cosa ho in t?

$v = L\frac{di}{dt}$, $V(s) = \underbrace{sL}_{\text{L+IMPEDENZA}}\, I(s) - L\,i(0^-)$ → ho dim. di V(s) ⇒ simulare



Cosa restituisce $\mathcal{L}\{A\}$?



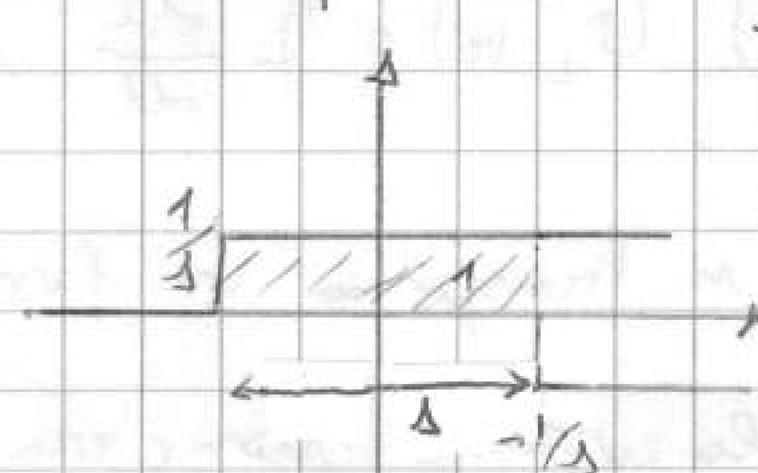
Se faccio $\frac{du_{-1}(t)}{dt}$ ho indet. in 0 → $s\frac{1}{s} - u_{-1}(0^-)$ → gradino è 0 a sx

So che $u_{-1}(t) \to \frac{1}{s}$ Sono chiamate DISTRIBUZIONI (e non FUNZIONI)

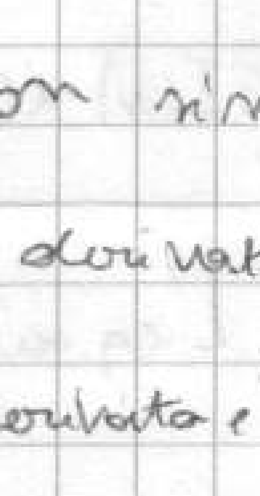
Devo definire una f. che definisca $\frac{du_{-1}(t)}{dt}$ chiamata IMPULSO UNITARIO

Con simbolo $\delta(t)$ oppure $u_0(t)$ [se volessi tornare, t avrei $u_{-2}(t) = t$, t derivato ho il gradino unitario $u_{-1}(t)$, derivato ancora ho impulso $u_{-1}(t)$]

Derivata è RAPPORTO INCREMENTALE $\frac{u_{-1}(t+\frac{\Delta}{2}) - u_{-1}(t-\frac{\Delta}{2})}{\Delta}$ ← (prima)



Se faccio il $\lim_{\Delta \to 0}$ ho derivata. Se prendo ampiezza $\frac{1}{\Delta}$ e Δ, l'area è 1 [$\frac{1}{\Delta}$ (prima)]. Facendo → 0 è come se avessi un quadrato all'∞ (sup. ∞) ma area è ancora = 1



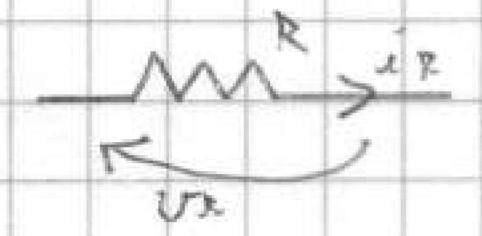
$$\int_{-\infty\,[0^-]}^{+\infty\,[0^+]} \delta(t)\,dt = 1$$ → altrove non esiste. COMMUTAZIONE NON È PIÙ ISTANTANEA

Se in S ho A in t ho $A\,u_0(t)$.

Matematicamente sarebbe $x \in \mathbb{R}$ che diventa $s \in \mathbb{C}$. In Fisica s che dimensione ha? $\frac{1}{sec}$, da prima H·A derivata del flusso; conta è simile, ma quindi I ho dim. carica elettrica, fem. di un flusso. Se faccio $\frac{[\varphi]^{\to \text{VOLT}}}{[Q]} = \Omega$

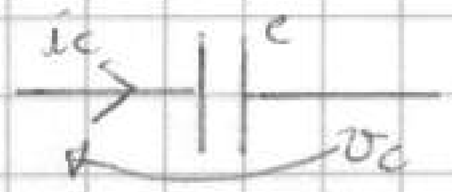
 $v = \frac{d\varphi}{dt}$, $i = \frac{dq}{dt}$

DOMINIO TEMPO t | DOMINIO LAPLACE s | 27/10/2005



$v_R = R i_R \xRightarrow{\mathcal{L}} V_R(s) = R\,I(s)$

LEGGI COSTITUTIVE BIPOLI PASSIVI



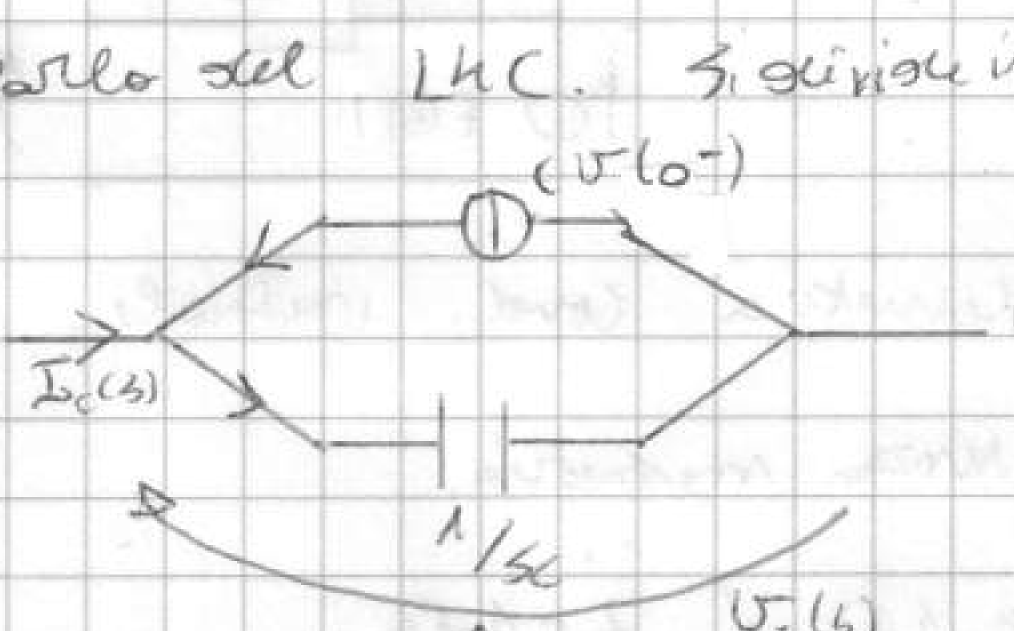
$i_C = C\dfrac{dv_C}{dt} \xRightarrow{\mathcal{L}} I_C(s) = sC\,V_C(s) - C\,v_C(0^-)$

$v_L = L\dfrac{di_L}{dt} \xRightarrow{\mathcal{L}} V_L(s) = sL\,I(s) - L\,i_L(0^-)$

- Per similitudine in s indico per R:

solo che ora ho resistore di IMPEDENZA R (e non "resistenza")

- Parlo del LKC. Si divide in 2 parti: con quello che è l'inverso dell'impedenza.

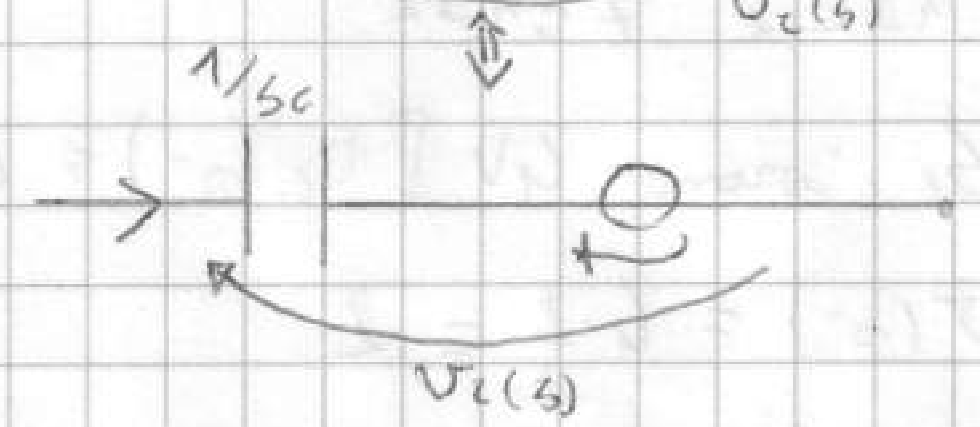


$Z_R(s) = R \longrightarrow \boxed{Y_R(s) = G}$: AMMETTENZA (inv. imp.)

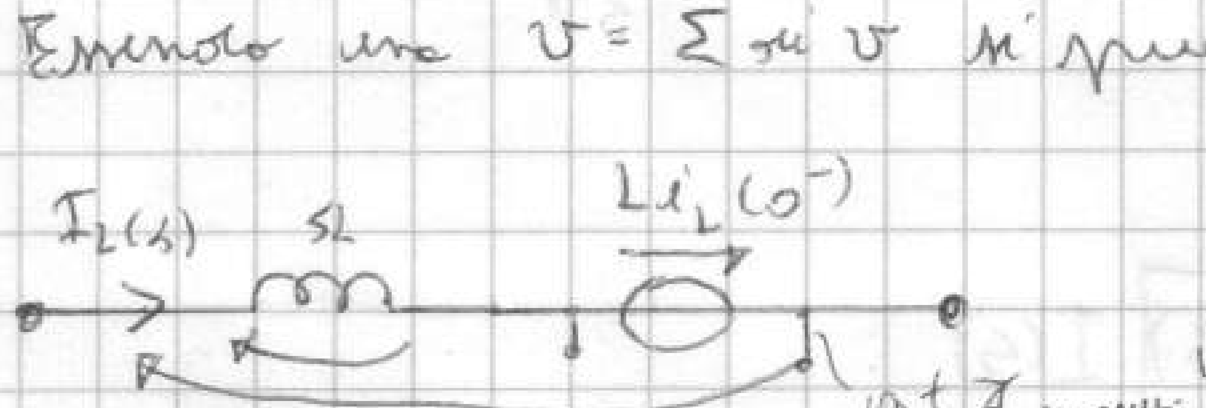
Termine costante in S è l'impulso: generatore di I in S. Ottengo lato Norton, th. trasformabile:

[Impedenza ha stesso identico ruolo resistenza]

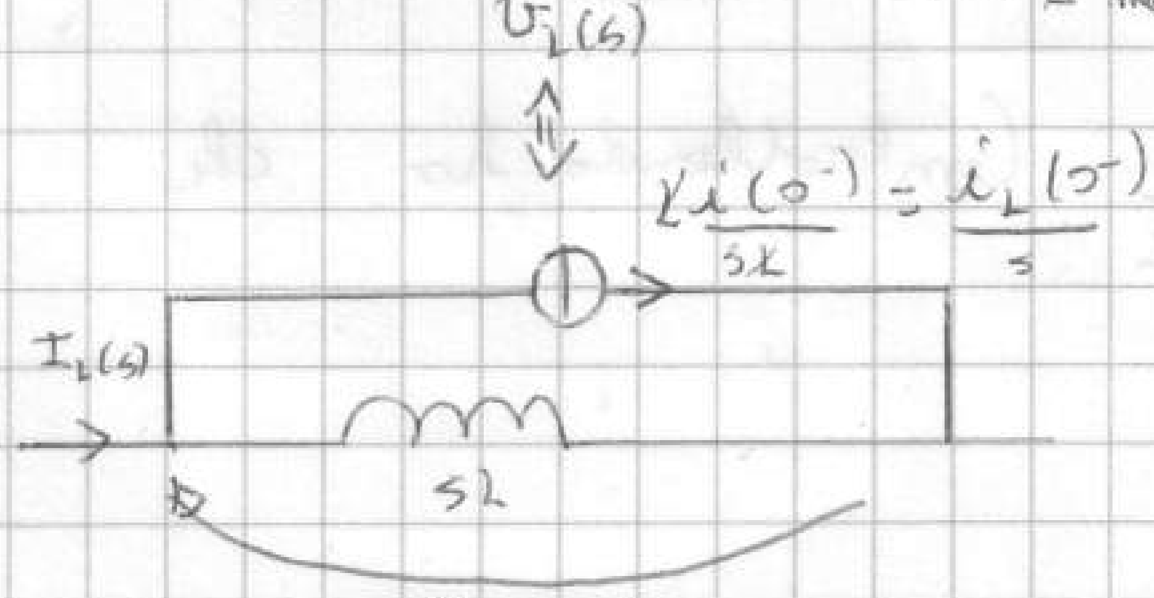
Generatore è I · imp. [$C\,v_C(0^-) \cdot \dfrac{1}{sC} = \dfrac{v_C(0^-)}{s}$ → GRADINO] → lo vedo dalle tabelle



- Essendo una $V = \Sigma$ di V si può interpretare con LKT → parto da Thévenin



sL ora è IMPEDENZA. Il gen. equiv. alla condiz. iniziale → gen. di tensione $L i_L(0^-)$. Forma th.

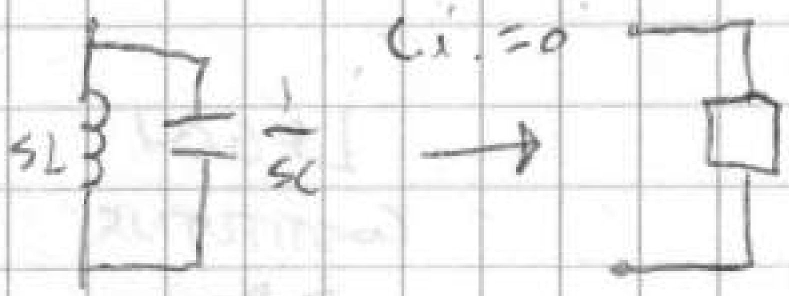


Passo in Norton. Anche qui x dualità ho f. norton dove ho gen. di corrente a gradino. In S derivo tensione cost. di $L i_L(0^-)$. Solo se cond. iniziali sono nulle allora posso solo mettere impedenza

$Z_R(s) = R$; $Z_L(s) = sL$; $Z_C(s) = \dfrac{1}{sC}$ e vale sempre $Y(s) = \dfrac{1}{Z}$

Quando avevo resistenze in parallelo sommavo le conduttanze → G_{eq}, ora con le impedenze sommo le AMMETTENZE.

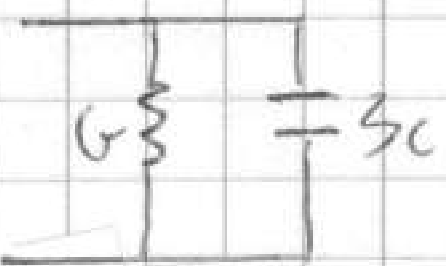
Se faccio // tra L e C non posso sommare ammettenze SE ci sono cond. iniziali, altrimenti posso trasformare tutto in $Z_{eq}(s) = \frac{1}{\sum Y_i(s)}$



$c.i. = 0$

$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{sL} + sC} = \frac{sL}{1+s^2LC}$;

Se ho:



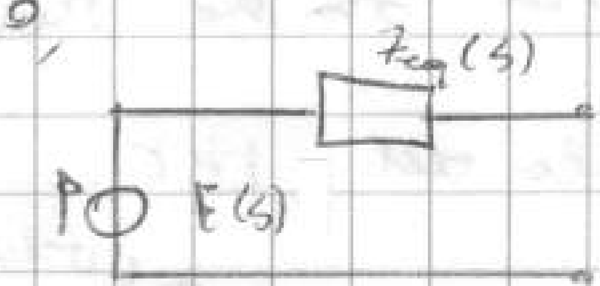
$Z_{eq} = \frac{1}{G+sC} = \frac{R}{1+sCR}$;

$c.i. = 0$

se no c'è gen. equiv.

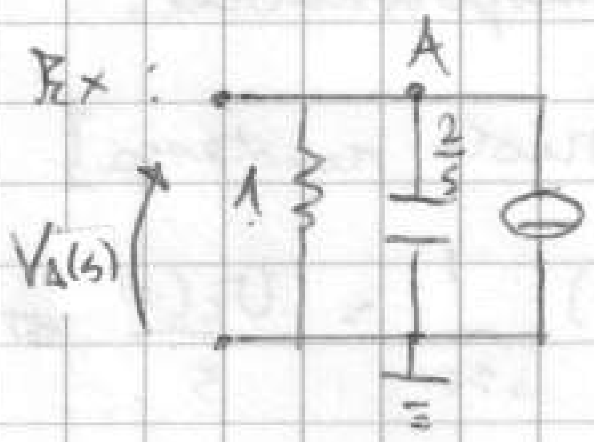
Nelle reti puramente resistive se non ho fem la $V_0 = 0$,

con le impedenze potrei avere una V_0 non nulla



Impedenze sono $f(s)$, generatori possono essere dovuti a cond. iniziali.

RESA PASSIVA $\Rightarrow$ $c.i. = 0$. Esporto conoscenze reti senza memoria.



Ex: (da prima con $c.i. \neq 0$). R di 1Ω è $Z = 1\Omega$.

$C = 0{,}5\,F \sim \frac{1}{sC} = \frac{2}{s}$. Se ci sono 4V [$V_C(0^-) = 4V$]

ho generatore IMPULSIVO $CV(0^-) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

Quant'è la $V_{A(s)}$? Risolvo rete con nodi. $2 = V_A(s)\left(1 + \frac{s}{2}\right)$. Ho exp. in s,

vedo tabella antitrasformate.

Importante operatore IMPEDENZA: $V(s) = \boxed{Z(s)}\, I(s)$

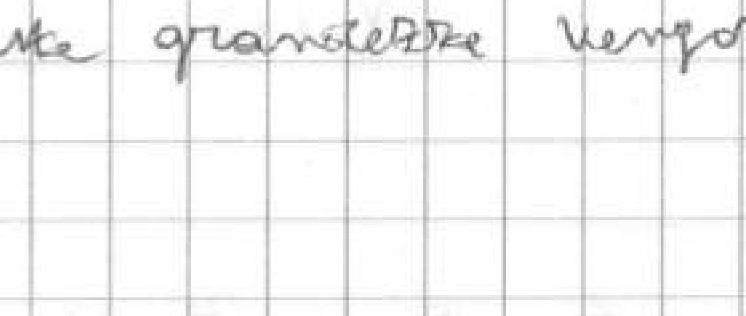
(da prima) $\frac{V_A(s)}{2}(2+s) \rightarrow V_A(s) = \frac{4}{s+2}$. Controllando ho che

$\frac{A}{s-a} \Rightarrow \boxed{V_A(t) = 4e^{-2t}}$ per $t \geq 0^+$

È talmente forte la potenza di questi metodi che queste grandezze vengono trattate come esistenti.

Prima corrente quantificabile con schema Thevenin: ci sono generatore $E(s)$ e

$Z_{eq}(s)$. Se metto interruttore che chiude su R ho:



e avrei $V(s) = Z(s)\, I(s)$

Graduino e' più simulabile (difficile realizzare t=0 della chiusura interruttore → quello meccanico ha ARCO ELETTRICO) in laboratorio.

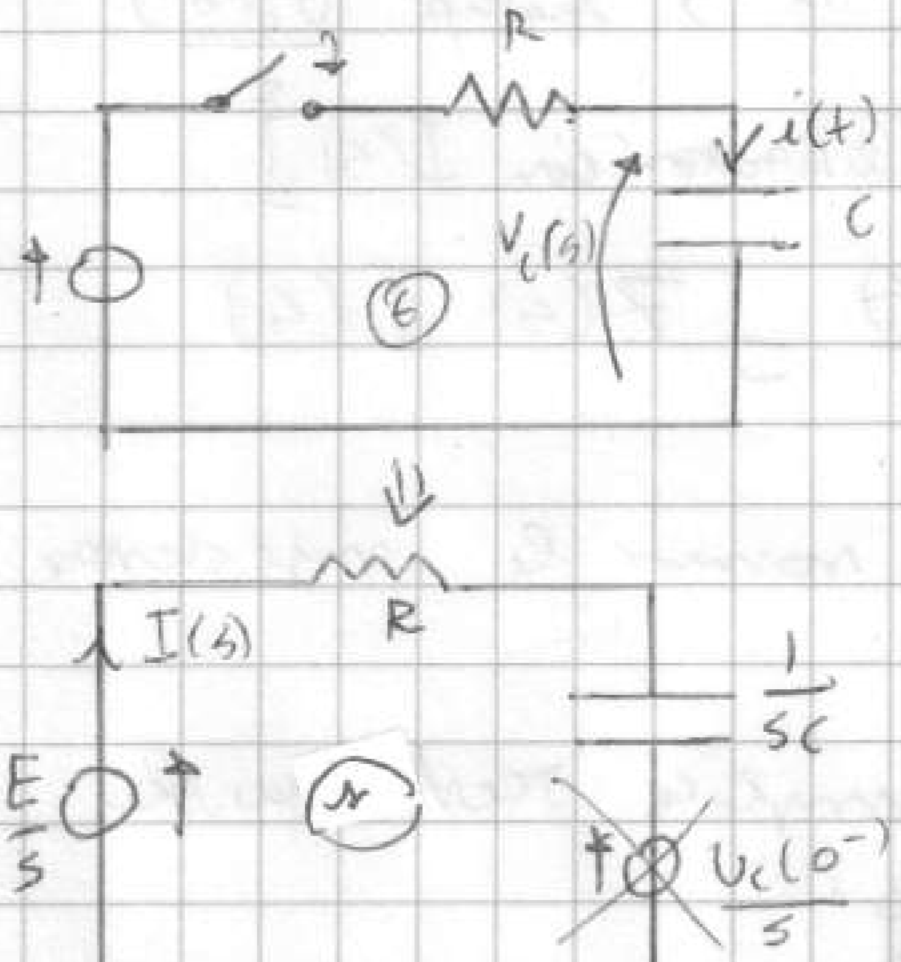
//

Ci interessano RL, RC, RLC

//

CARICA DI UN CONDENSATORE

Considero RC con c.i. = 0. Per caricarlo (metto carica tra armature) adopero



fem IDEALE (se Ri e' trascurabile).

(Quale è natura generatore) Si usa fem CONTINUA (batteria o pila). Chiuso l'interruttore vado in S. (ho fem cont: $\frac{E}{s}$), ho impedenza R e gen. di t.

Con condiz. iniziali, ma $Ci = 0 \Rightarrow$ si toglie fem nota.

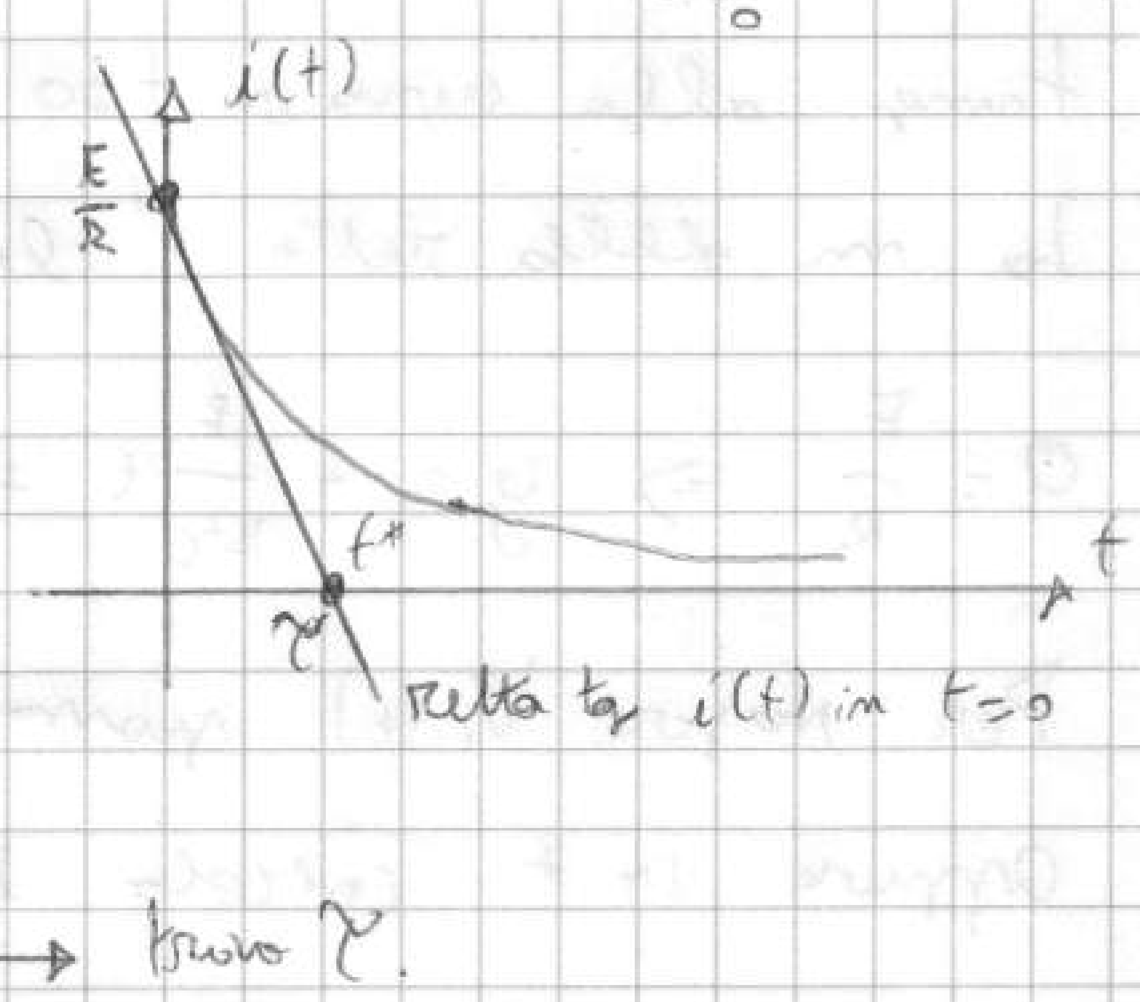
Calcolo $I(s)$, metodo maglie.

$$\frac{E}{s} = \underbrace{\left(R + \frac{1}{sC}\right)}_{\to Z_{eq},\ \text{non c'è fem n.}} I(s) \quad , \quad I(s) = \frac{E}{\cancel{s}} \cdot \frac{\cancel{s}C}{sCR+1} = \frac{CE}{RC\left(s + \underbrace{\frac{1}{RC}}_{\to -a}\right)} \quad (\text{antitrasformo}) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$t \geq 0^+$. Nel tempo avrei scritto $E = Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$

↳ grafichabile l'EVOLUZIONE DINAMICA DELLA CORRENTE



RC sono secondi. [generatore che fa carica e' FORZANTE] ↳ e' proprietà INTRINSECA circuito

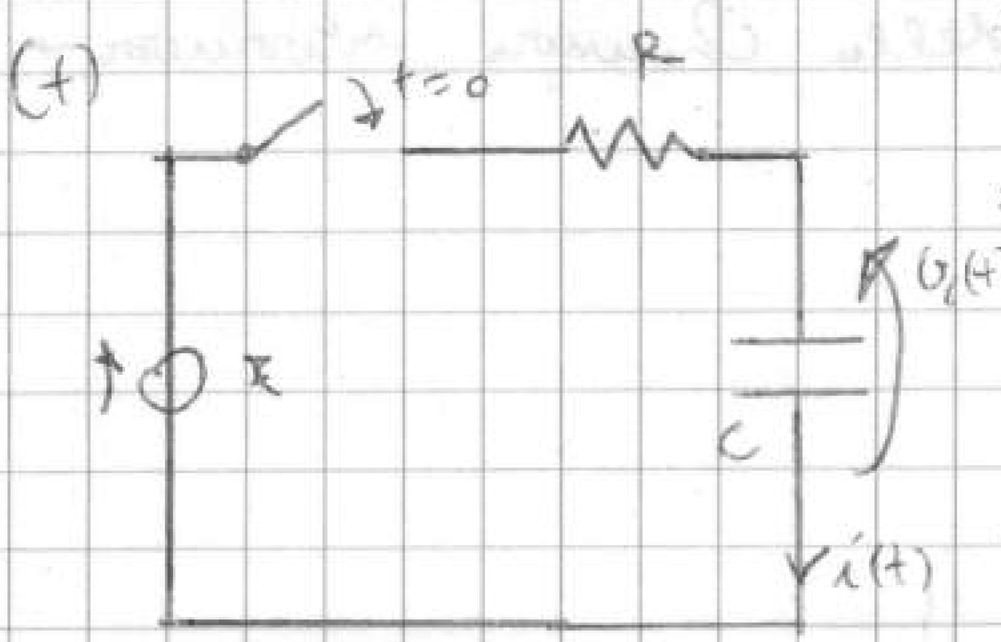
τ = RC = COSTANTE DI TEMPO (intersezion con asintoto). Retta del tipo $mt + q$, qui $q = \frac{E}{R}$,

$m = \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}$, "$y(t) = mt + q$" e "$y$"$(t) = i(t)$ con $i(t) = 0$ → trovo τ.

Se voglio V ai capi capacità o risolvo integrale di E oppure faccio il partitore di tensione [tensione ai capi bipolo in serie ad altri]. Ora

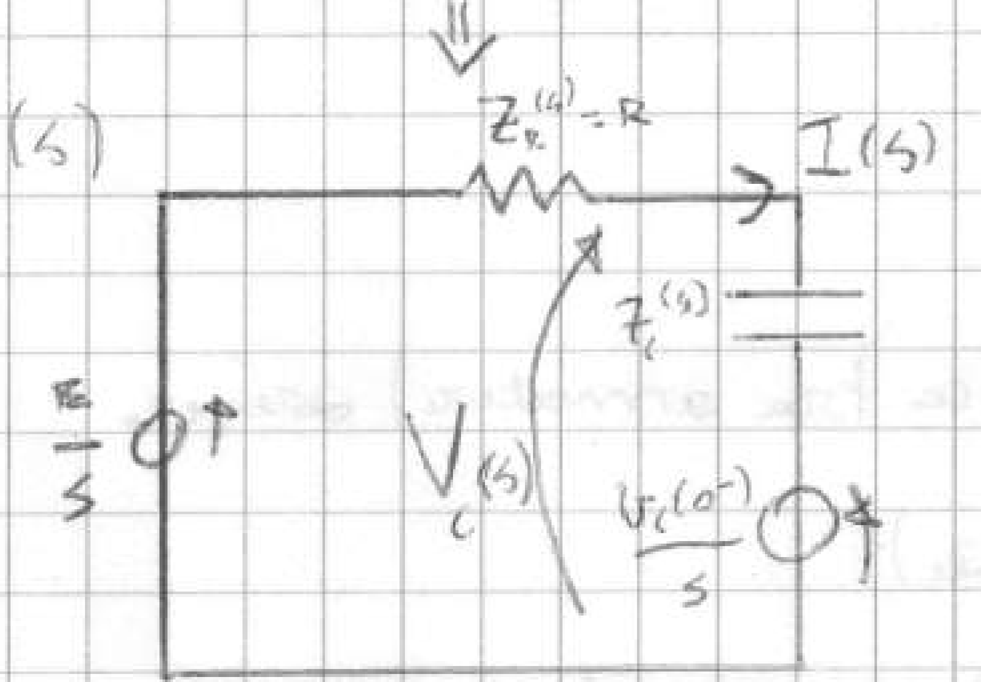
$$\frac{1}{sC} \cdot \overbrace{\frac{E/s}{R + \frac{1}{sC}}}^{\to I(s)} = V \quad ; \quad \text{partitore: } Z \cdot I$$

Memoria di C è la V ai capi del suo morsetto all'istante di partenza dell'analisi. 2/11/05



Le FORZANTI sono generatori impressi [NON le memorie in S].

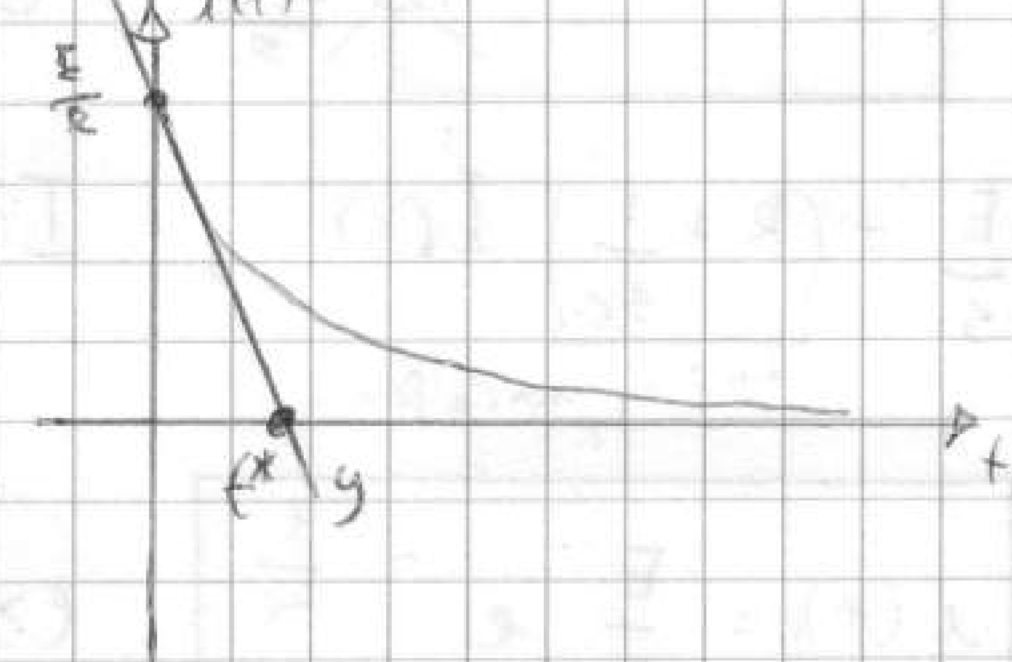
Se E è forz. in continua, la l. trasf. contiene l'interruttore ed è E(s), le resistore e impedenza $Z_R^{(s)} = R$. Condensatore è $Z_C(s) = \frac{1}{sC}$ in serie a fem che simula la c.i., in S passa $\frac{V_C(0^-)}{s}$ [mettiamo gen in conv. utilizzatori con $I(s)$]



Se tolgo generatore memoria avrei: $\frac{E}{s} - \cancel{\frac{V_C(0^-)}{s}} = Z(s)\, I(s)$

(legge di Ohm simbolica) $\to \frac{E}{s} = \left(R + \frac{1}{sC}\right) I(s)$ [caso serie] $\to$ sommo le impedenze

$I(s) = \frac{E}{s}\frac{sC}{s(R+1)} = \frac{E}{\cancel{s}}\frac{\cancel{s}C}{CR(s+\frac{1}{RC})}$ → frazione semplice restituisce l'antitrasformazione $\Rightarrow i(t) = \frac{E}{R}\, e^{-\frac{1}{RC}t}$



RC è caratteristica del circuito, ~~x~~ dà forzante E un TEMPO, è la COSTANTE di TEMPO τ ottenibile graficamente con la tang. alla curva in t=0 e si controlla l'intersezione con i=0.

La m della retta è la $\frac{d}{dt} i(t) \to = -\frac{E}{R\,RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}$ $t=0$ $\to m = -\frac{E}{R^2C}$

$q = \frac{E}{R} \Rightarrow y = -\frac{E}{R^2C}t + \frac{E}{R}$, $y(t^*) \to -\frac{E}{R^2C}t^* + \frac{E}{R} = 0 \to \underline{t^* = RC = \tau}$

Per sapere $V_C(t)$ posso usar. partitore su capacità e fare $V_C(s)$. Oppure in t calcolo $E - Ri = V_C(t)$. oppure integro $\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$.

$\underline{V_C(t)} = E - Ri(t) = \underline{E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$ Se avessi fatto il partitore:

$V_C(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}\frac{E}{s}$ $(Z \cdot I) = \frac{1}{\cancel{sC}}\frac{\cancel{sC}}{RC(s+\frac{1}{RC})}\frac{E}{s}$ (devo passare ai fratti semplici), $\frac{E}{sRC}\frac{1}{(s+\frac{1}{RC})}$ = [ciò che annulla il denominatore è polo] =

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{1}{RC}}$$ si moltiplicano i membri $\times$ s. Vale $\forall s$. Quindi metto $\times$ semplicità $s=0$.

$$\frac{E}{\cancel{s}RC} \cdot \frac{\cancel{s}}{(\cancel{s}+\frac{1}{RC})} = \left(\frac{As}{\cancel{s}} + \cancel{\frac{Bs}{s+\frac{1}{RC}}}\right)\cancel{s} \rightarrow A = \frac{E}{RC} \cdot \frac{1}{\frac{1}{RC}}$$

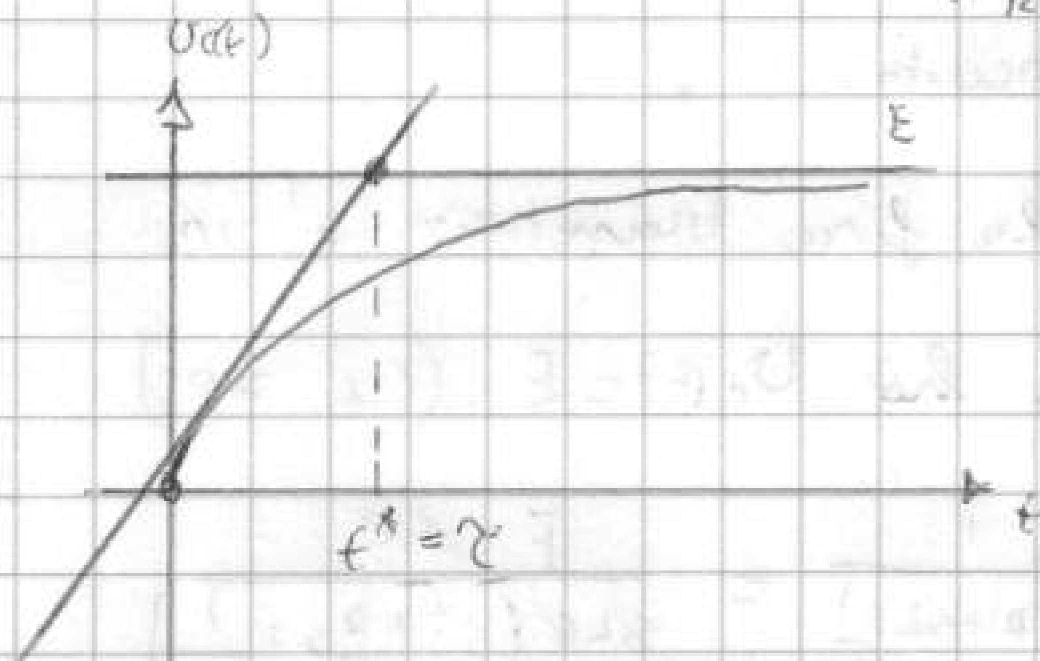
. Ora calcoliamo B, moltiplicando per $s+\frac{1}{RC}$. Riscrivo la frazione moltiplicando i membri $\times$ altro polo:

$$\frac{E}{sRC} \cdot \frac{(s+\frac{1}{RC})}{(s+\frac{1}{RC})} = \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{1}{RC}}\right)\left(s+\frac{1}{RC}\right)$$

e sostituisco

$$s = -\frac{1}{RC} \rightarrow B = \frac{E}{(-\frac{1}{RC})RC} = -E$$

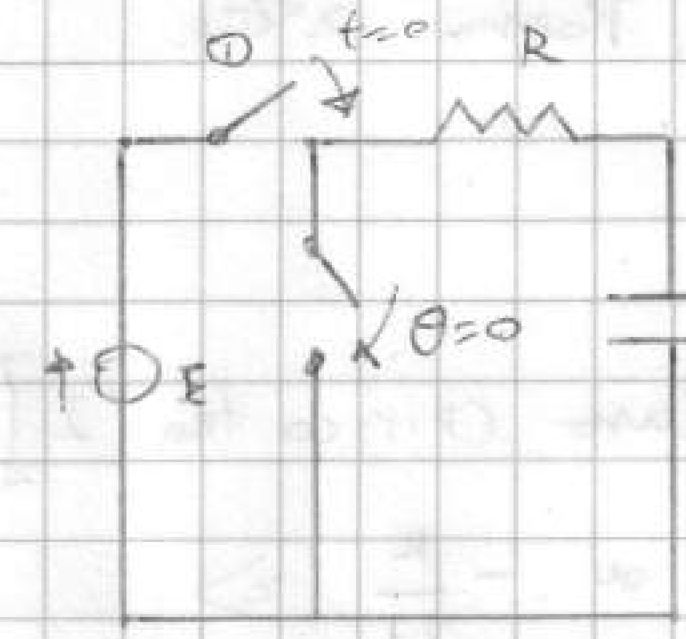
, antitrasformo $\frac{E}{s} - \frac{E}{s+\frac{1}{RC}}$ e ho $V_c(t)$.



Graficando, $t \rightarrow \infty$, $v_C \rightarrow E$.
Per $t=0$, $v_C = 0$. La retta tangente alla curva e calcolo intersezione con $v = E$, $t^* = \tau$.

H

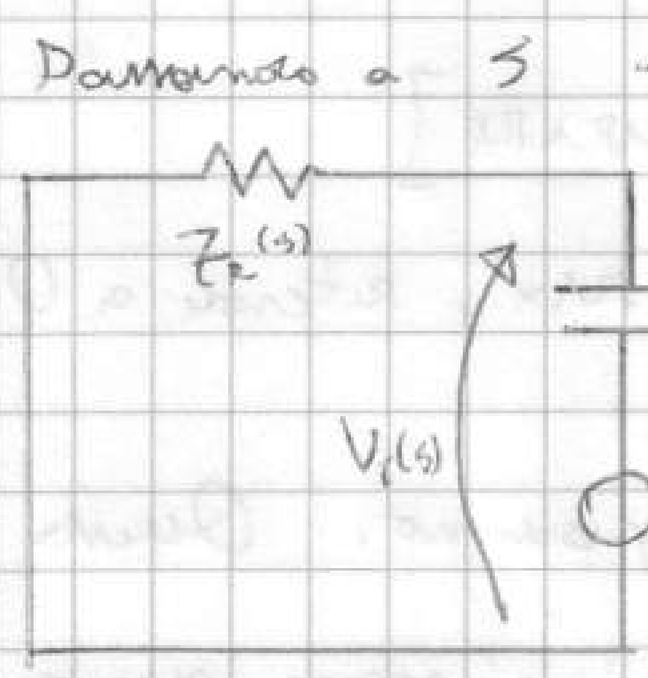
SCARICA del CONDENSATORE, a forzante nulla.



Prima carico, poi ho tasto che chiudo.
A $t=0$ chiudo e carico fino a E. A $\theta=0$ riapro interruttore ① e chiudo l'altro. Laplace studia i TRANSITORI, le commutazioni.

C.I.: $V_c(0^-) = E$ (ora E non c'è + la forzante ma la memoria)

Passando a s ho:



I corrente solo verso, varia $V_c(t)$.

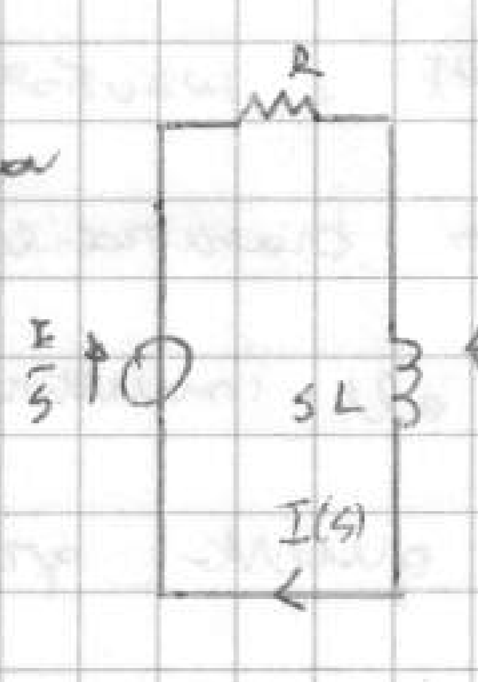
Ho $v_c(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\rightarrow$ andamento simile a corrente.
$\hookrightarrow i(t) R$

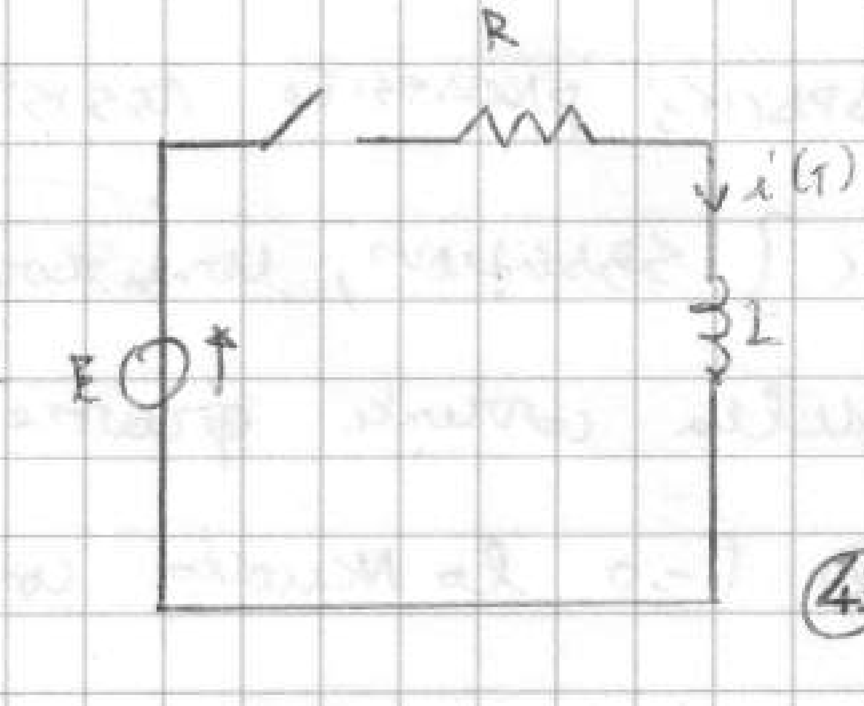
H

RL è circuito duale. Induttore ha Z <>.

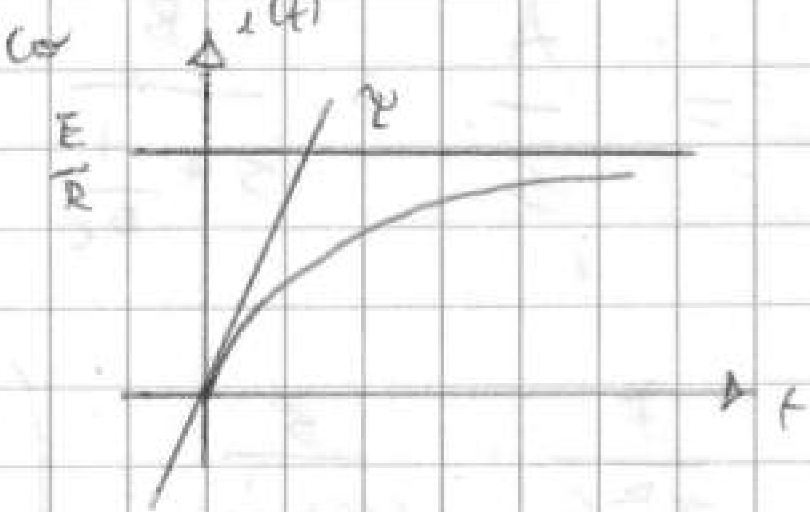
$$I(s) = \frac{E}{s} \cdot \frac{1}{R+sL} = \frac{E}{sL(s+\frac{R}{L})}$$

(praticamente uguale a prima)





Ora $\tau = \frac{L}{R}$ → $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ con grafico



e V ai capi di L è come la i nella capacità.

Per $t \to \infty$, i non si blocca, non c'è tensione.

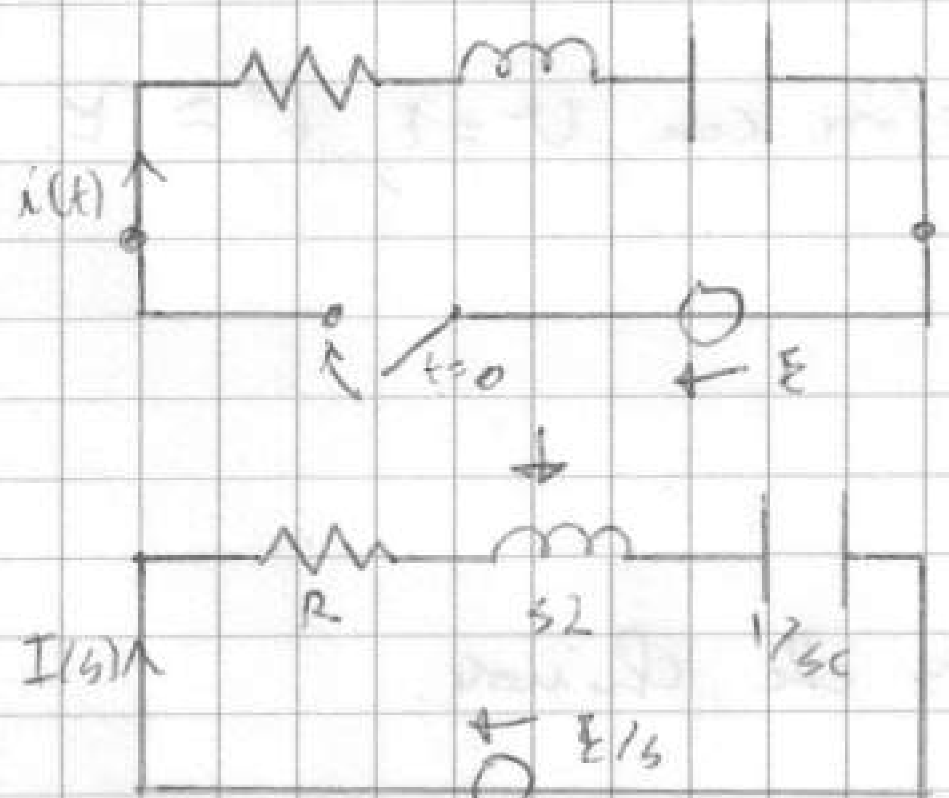
[duale di prima]. ↳ eventuale memoria, è una corrente continua di forza motrice forzante (continua), a transitorio esaurito. [$i_L = \frac{E}{R}$]

FORZANTI in CONTINUA e SINUSOIDALI dopo un tempo ∞ sono in grado di imporre la loro natura alle tensioni e alle correnti di tutto il circuito.

Se ho generatori sinusoidali diversi ho nature diverse.

Su forz. cont. posso innescare OSCILLAZIONI nel circuito:

CIRCUITO RLC chiuso su forz. in continua ⇒ alla fine transitorio è in continua. Alla fine ho $V_C(t) = E$ $(i = 0)$



$$I(s) = \frac{V}{Z} = \frac{E}{s}\cdot\frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{E\,\cancel{sL}}{\cancel{sL}\,\underbrace{\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right)}_{(s-s_1)(s-s_2)}}$$

Scompare un polo. Calcoliamo radici denom.

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{discriminante} = \Delta}}$$ Posso avere

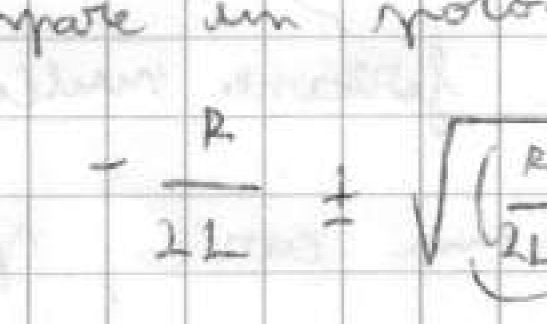
$\Delta = 0$, $\boxed{1}$ $\Delta > 0$, $\boxed{2}$ $\Delta < 0$ [ignoriamo $\Delta = 0$, caso estremo, caso CRITICO tra i 2]

$\boxed{1}$ $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ $[R, L, C > 0]$. La $\sqrt{\ }$ è sempre + piccola di $-\frac{R}{2L}$ ⇒ $s_1, s_2 < 0$. Guardando $I(s) = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2}$, A e $B \in \mathbb{R}$. Quindi

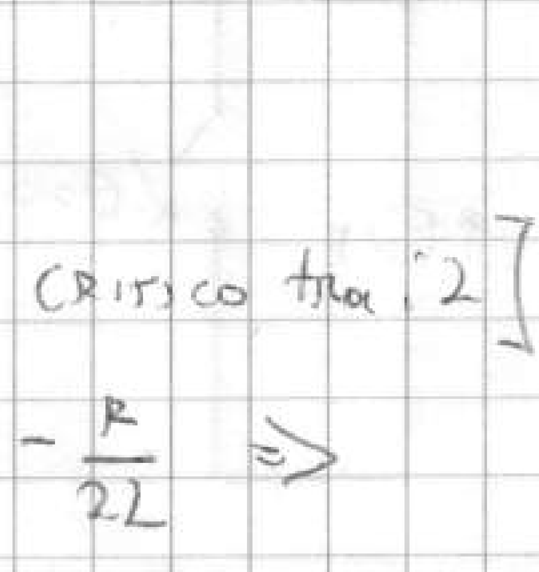
$$i(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$ [per $t \to +\infty$ qualcosa che SCOMPARE]

(la R critica che rende $\Delta = 0$ è $2\sqrt{\frac{L}{C}}$) ↳ parte da 0, va al max e ritende a 0.

Fisicamente è IMPOSSIBILE avere



, non a gradino. Questo perché R, L, C sono SEMPRE presenti: ci sono sempre CAPACITÀ PARASSITE, RESISTENZE e INDUTTORI. Se da prima analizzavo $t=0$ [in RL e RC] SBAGLIAVO, considerato trascurabile L e C. Ora ho INERZIA della corrente grazie all'induttore, parte sempre da 0.



$t=0$ lo risolvo con questo grafico.

$\left[A = -B \to A = \frac{E_m}{(sp_1 - sp_2)L} \right]$ $R_{critic} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, se $R > R_c$, $\Delta > 0$ e se $R < R_c$, $\Delta < 0$

[2] Soluzione sarà $-\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{|\Delta|} = \alpha \pm j\omega \in \mathbb{C}$; $s_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ →

$s_1 = s_2^*$ (è il coniugato dell'altro). Ora $I(s) = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_1^*}$

Se faccio $i(t) = A e^{s_1 t} + B e^{s_1^* t}$ ma t è dominio reale. A e B conserveranno la presenza di j. Ricordo che $e^{\pm j\omega t} = \cos\omega t \pm j \sin\omega t$ →

$\boxed{e^{j\pi} + 1 = 0}$; prendo $e^{s_1 t} = e^{\alpha t + j\omega t}$ e $e^{s_1^* t} = e^{\alpha t - j\omega t}$, quindi

x regola exp. sono $e^{\alpha t} e^{j\omega t}$ ed $e^{\alpha t} e^{-j\omega t}$. Grazie a eulero

posso risolvere se $\dot{A} = B^*$. C'è exp. decrescente e funzione coseno.

Soluzione è OSCILLATORIA (grazie a sin, cos), SMORZATO (grazie a e^{-t})

Più riduco la R, + oscillazioni sono evidenti, si susseguono e + a fermarsi.

Oscillatore puro si ha con R = 0. È talmente impercettibile e^{-t} che non lo vedo. (LC è OSCILLANTE) ad ex inventando R = 0 in serie con R.

H

La risposta di un circuito si divide in RISPOSTA forzata e LIBERA che insieme danno RISPOSTA DINAMICA. Parte di esso però va a 0 [ex. cond. e induct.] Rimane la memoria, è RISPOSTA a REGIME PERMANENTE. Ciò che se ne è andato è il TRANSITORIO. R. PER. dipende da natura forzante.

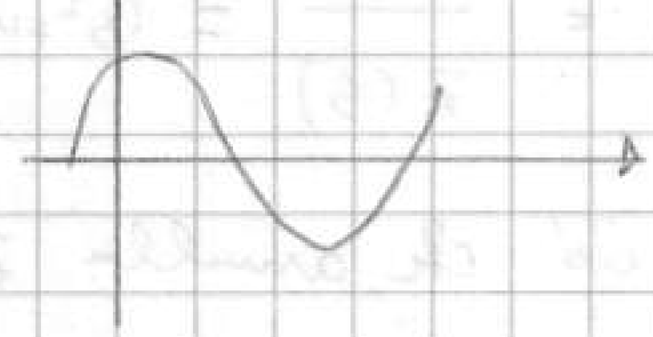
Ex: del circuito di prima RLC metto una $E = \sin\omega t$ [a 50 Hz, $\omega = 314$ rad/s]

Prima c'è transitorio (reazione RLC) poi va grossolanamente a regime secondo la forzante. Dopo effetto transitorio ho regime permanente SINUSOIDALE

3/11/05

$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$, $e^{-j\alpha} = \cos\alpha - j\sin\alpha$

Sommando e sottraendo ho $\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$

(SAPPIDE) Con forzanti sinusoidali [$E_m \sin(\omega t + \varphi)$ → ], ω è la pulsazione $\left[\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \right]$, E_m è ampiezza max, φ dice che x $t=0$ il interruttore è $E_m \sin\varphi$; si chiama FASE INIZIALE

Faccio $\mathcal{L}\{E\}$, $E_m \sin(\omega t+\varphi) = E_m \dfrac{e^{j\varphi} e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} e^{-j\varphi}}{2j}$

Ora lo metto nell' int. di Laplace e sfrutto linearità:

$$\frac{E_m}{2j} e^{j\varphi} \int_{0^-}^{+\infty} e^{j\omega t} e^{-st}\, dt - \frac{E_m}{2j} e^{-j\varphi} \int_{0^-}^{+\infty} e^{-j\omega t} e^{-st}\, dt$$

, guardando le tabelle, $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, quindi ho $\frac{E_m}{2j} e^{j\varphi} \frac{1}{s-j\omega} - \frac{E_m e^{-j\varphi}}{2j} \frac{1}{s+j\omega} =$, funzione di partenza è reale; radici tra loro sono complesse coniugate nei fratti semplici $= \frac{E_m}{2j} \frac{e^{j\varphi}(s+j\omega) - e^{-j\varphi}(s-j\omega)}{s^2+\omega^2} =$

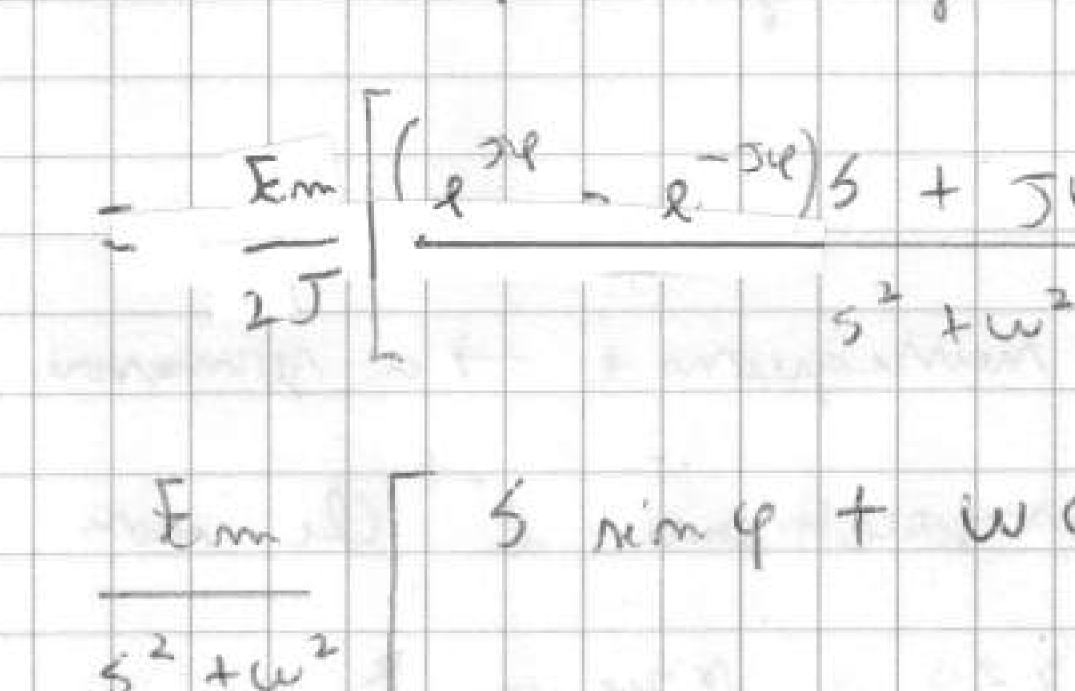
$$= \frac{E_m}{2j}\left[\frac{(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})s + j\omega(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})}{s^2+\omega^2}\right] \longrightarrow$$

$$\frac{E_m}{s^2+\omega^2}\left[s \sin\varphi + \omega \cos\varphi \right]$$

, per il coseno basta mettere $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Per $\varphi = 0$ ho $\underbrace{E_m \omega/(s^2+\omega^2)}_{\mathcal{L}\{\sin\omega t\}}$, per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ho $\frac{E_m s}{s^2+\omega^2} = \mathcal{L}\{\cos\omega t\}$

Eccitiamo RLC con generatore $E_m \sin(\omega t+\varphi)$ [x semplicità $\varphi = 0$]



c.i.: $\begin{cases} v_c(0^-) = 0 \\ i_L(0^-) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ evoluzione dinamica è RISPOSTA FORZATA, altrimenti altrui sommato risposta LIBERA dovuta alle c.i.

$e(t) = E_m \sin\omega t$

$E(s) = E_m \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ Vogliamo $i(t)$.

(generatori fittizi cmq da mettere)

$Z(s)$ [Impedenza serie] $= R + sL + \dfrac{1}{sC}$

$I(s) = \dfrac{E(s)}{Z(s)} = \dfrac{\omega}{(s^2+\omega^2)Z(s)} E_m$, denom. avrà dei poli

Che è dato ciò che annulla $Z(s)$ e $s^2+\omega^2$. $\longrightarrow$ = (fratti semplici) =

$= \Big[$ Vedo espressione generica f. sinusoidale: ① $\frac{A_s + B}{s^2+\omega^2} + \Big[\frac{k}{Z(s)} \Big] \rightarrow$ è come si fosse impulso: $e(t) = k\,\delta(t)$ e $I(s) = \frac{k}{Z(s)} = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$

la mia $\mathcal{L}$ è una f. che $\to$ a 0 $\leftarrow$ $[I_R(s)]$ RISPOSTA TRANSITORIA (per $t \to \infty$ scompare) $\leftarrow$ O oscillatorio smorzato o exp. negativi $\Leftarrow$

Invece x il resto si ottengo ① ho SINUSOIDE che non si attenua mai $\to$ $[I_p(s)]$ PERMANENTE. (Va dimostrato), poi ho senso studiare solo il r. perm.

$$\Big[Z(s) = LC\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right) \Big]$$

$$= \frac{E_M\,\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)Z(s)} = \frac{A_s + B}{(s-j\omega)(s+j\omega)} + \frac{k}{Z(s)} \quad (\text{Molt. } \times\ s - j\omega) =$$

$$= \frac{E_M\,\omega\,\cancel{(s-j\omega)}}{\cancel{(s-j\omega)}(s+j\omega)Z(s)} = \frac{[A_s + B]\,\cancel{(s-j\omega)}}{\cancel{(s-j\omega)}(s+j\omega)} + \frac{k}{Z(s)}(s-j\omega)$$ Ora sostituisco $s = j\omega$ (deve valere $\forall s$)

$$= \frac{E_M\,\omega}{\cancel{2j\omega}\,Z(j\omega)} = \frac{j\omega A + B}{\cancel{2j\omega}} \quad \boxed{1}$$ Vediamo che succede all'impedenza:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \overset{\text{molt. e divido per } j}{=} R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \dot{Z}$$

Ora riprendo l'espressione moltiplicando per $(s + j\omega)$

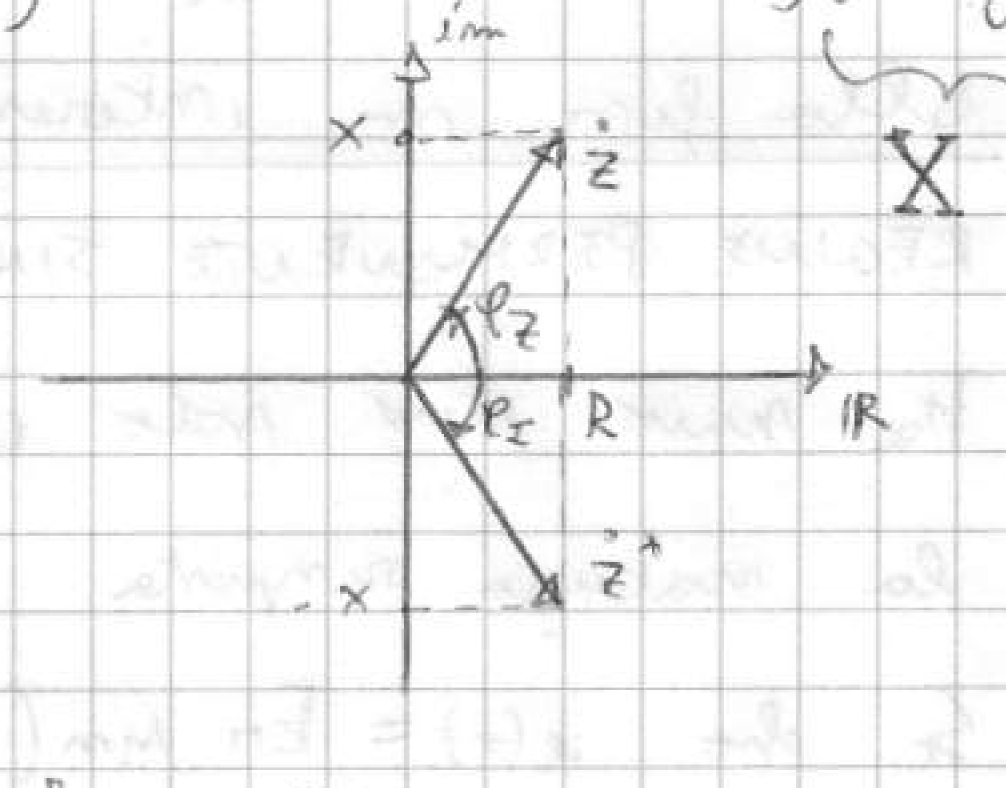
$$\frac{E_M\,\omega\,\cancel{(s+j\omega)}}{(s-j\omega)\cancel{(s+j\omega)}Z(s)} = \frac{[A_s + B]\,\cancel{(s+j\omega)}}{(s-j\omega)\cancel{(s+j\omega)}} + \frac{k}{Z(s)}(s+j\omega)$$ Sostituisco $s = -j\omega$

$$\frac{E_M\,\omega}{-\cancel{2j\omega}\,Z(-j\omega)} = \frac{-j\omega A + B}{-\cancel{2j\omega}} \quad \boxed{2}$$ Di nuovo, l'impedenza è il CONIUGATO di prima: $Z(-j\omega) = \dot{Z}^*$

Se $\dot{Z} \cdot \dot{Z}^* = |Z|^2 = Z^2$ (REALE), $\dot{Z} + \dot{Z}^* = 2R$; viceversa $\dot{Z} - \dot{Z}^* = 2j\underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}_{X}$

$\Rightarrow \underline{\dot{Z} = R + jX}$ e $\underline{\dot{Z}^* = R - jX}$, ed è anche un vettore

Introducendo φ_Z partendo da R ho $\begin{cases} Z\cos\varphi_Z = R \\ Z\sin\varphi_Z = X \end{cases}$



Ora facciamo $\boxed{1} + \boxed{2}$.

$$\frac{E_M\,\omega}{\dot{Z}} + \frac{E_M\,\omega}{\dot{Z}^*} = 2B$$ faccio il m.c.m. $$E_M\,\omega\frac{\cancel{2}R}{Z^2} = \cancel{2}B \rightarrow \quad \left(\frac{R}{Z} = \cos\varphi_Z\right)$$

$$B = \frac{E_M\,\omega}{Z}\cos\varphi_Z$$ Ora invece faccio $\boxed{1} - \boxed{2}$ e ho:

$A = -\frac{E_M}{Z^2}X = -\frac{E_M}{Z}\sin\varphi_Z$. Tornando alla formula di $I_p(s)$ ho:

$I_p(s) = \frac{As+B}{s^2+\omega^2} =$; sostituendo $= \frac{E_M}{Z}\,\frac{-\sin\varphi_Z\, s + \cos\varphi_Z\, \omega}{s^2+\omega^2}$. Se $\varphi_I = -\varphi_Z$

(da grafico) cambia solo segno del seno: $I_p(s) = \frac{E_M}{Z}\,\frac{s\sin\varphi_I + \omega\cos\varphi_I}{s^2+\omega^2}$

Antitrasformando, essendo $i(t) = i_p(t) + \cancel{i_{tr}(t)}$ (trascurata), ho $i(t) =$

$i_p(t) = \overbrace{\frac{E_M}{Z}}^{I_M}\sin(\omega t + \varphi_I)$ — In regime permanente a eccitazione sin ho corrente sin; la pulsazione è la stessa della forzante.

In meccanica conviene fare una simulazione circuitale al posto di quella fisica. Massa = induttore, molla = capacità, smorzatore = resistenza

φ_I è FASE INIZIALE della corrente che dà la natura impedenza. Ovviamente

$\operatorname{tg}\varphi_Z = \frac{X}{R}$ (impedenza è operatore e φ è il suo argomento, non fase)

Tra tensione e corrente ∃ sfasamento (mantenuto anche se φ_{E_M} impresso $= 0$)

X si chiama REATTANZA (parte imag di Z). Z è misurata Ω, anche in $\mathbb{C}$.

Se $Z = R + jX$, $|Z| = \sqrt{R^2+X^2} \Rightarrow \omega L, \frac{1}{\omega C} = \boxed{\Omega}$.

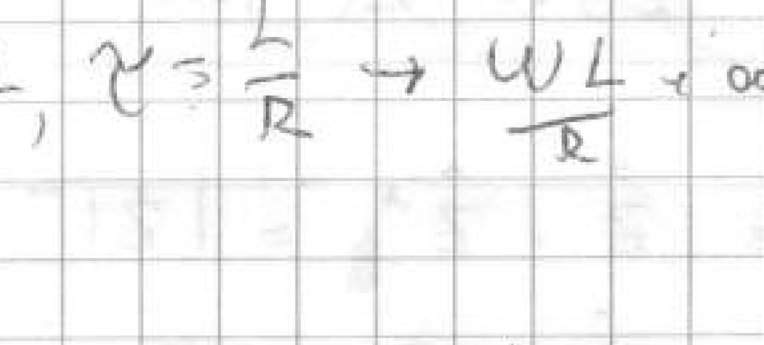
Se ωt è adim. anche $\omega\tau$ è adim. In circuito RL, $\tau = \frac{L}{R} \to \frac{\omega L}{R}$ è adim.

(stessa dim $\times \frac{1}{\omega C}$).

Alla fine mi interessano I_M e φ_I $\Rightarrow$ mi occupo solo di sinusoidi.

REGIME PERMANENTE SINUSOIDALE — 7/11/2005

Ha senso studi. solo comp. permanente. Conosciamo già qualitativ. la natura risposta

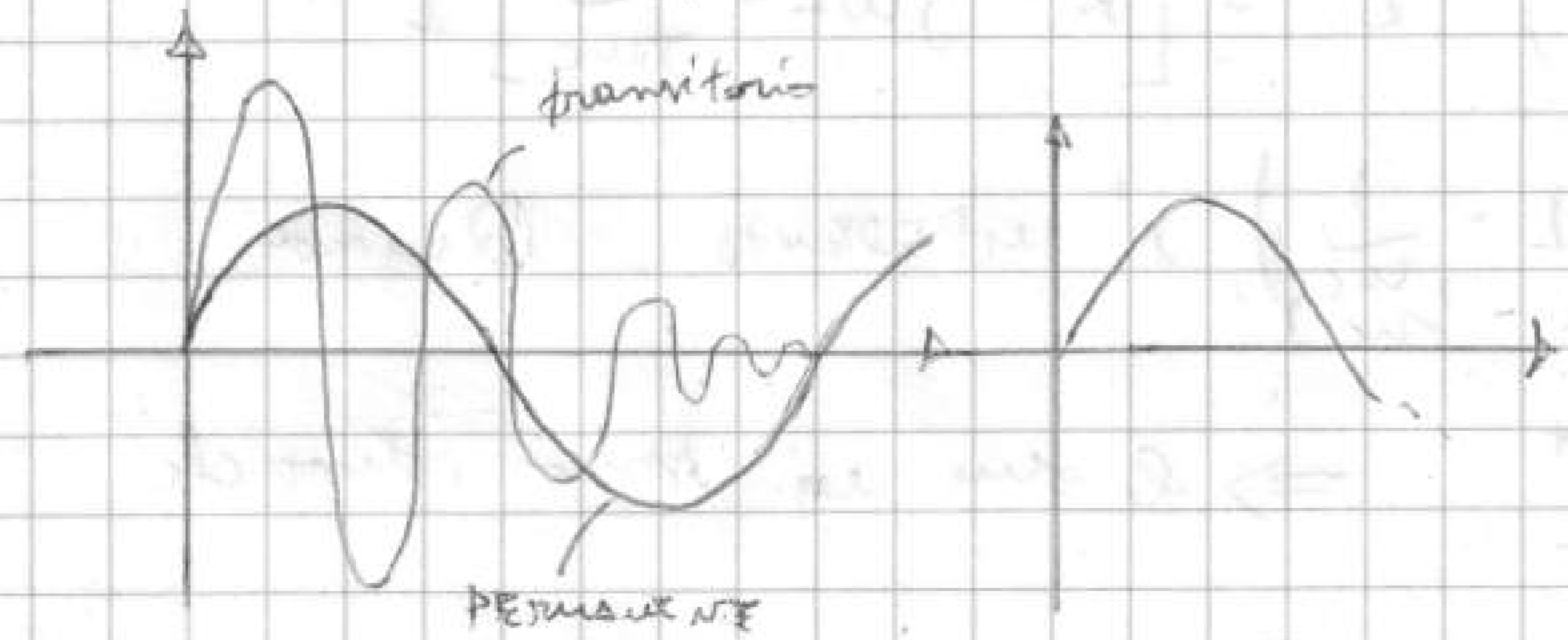


Se ho $e(t) = E_M\sin(\omega t + \beta)$, la corrente è $i(t) = I_M\sin(\omega t + \alpha)$. Usiamo eulero:

[$\sin x = e^{jx} - e^{-jx}/2j$; $\cos x = e^{jx} + e^{-jx}/2$]

(50) $e(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$. Poiché studio regim. permanente

non ha senso estremi integrazione [transitorio esaurito]. Anche "fase iniziale" è <>, è come avere nuovo sist. riferimento t / fa è annullata



→ definisco un nuovo tempo

↓

Applico def di eulero alla tensione:

$$E_M\left[\frac{e^{j\beta}e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}e^{-j\beta}}{2j}\right]=\left(I_M \text{ e } \alpha \text{ non sono note, } \omega\ n\right)=$$

$$\underbrace{R I_M\left[\frac{e^{j\alpha}e^{j\omega t}-e^{-j\alpha}e^{-j\omega t}}{2j}\right]}_{[R\,i]}+\underbrace{L I_M\left[\frac{j\omega e^{j\alpha}e^{j\omega t}+j\omega e^{-j\alpha}e^{-j\omega t}}{2j}\right]}_{[L\frac{di}{dt}]}+$$

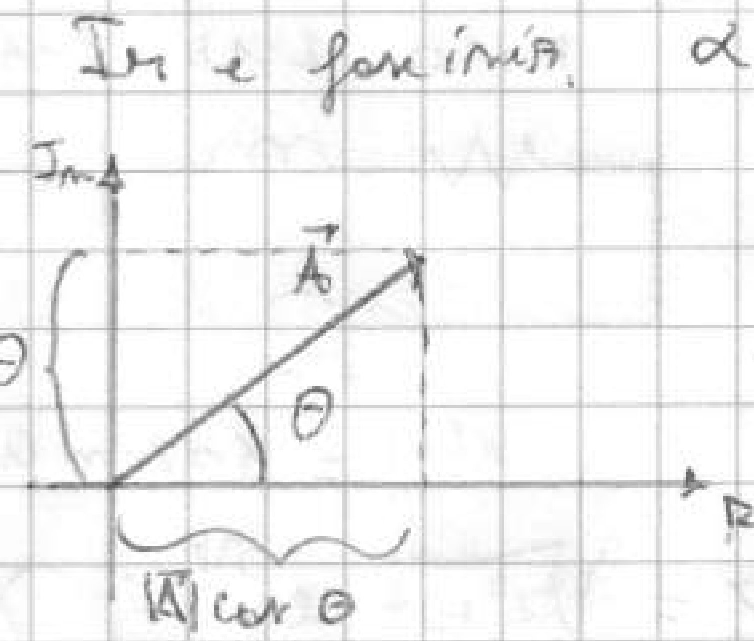
$$\left(\frac{1}{C}\int i\,dt\right)+\frac{I_M}{C}\left[\frac{1}{j\omega}\,\frac{e^{j\alpha}e^{j\omega t}+e^{-j\alpha}e^{-j\omega t}}{2j}\right]$$ Semplifichiamo e sostituiamo,

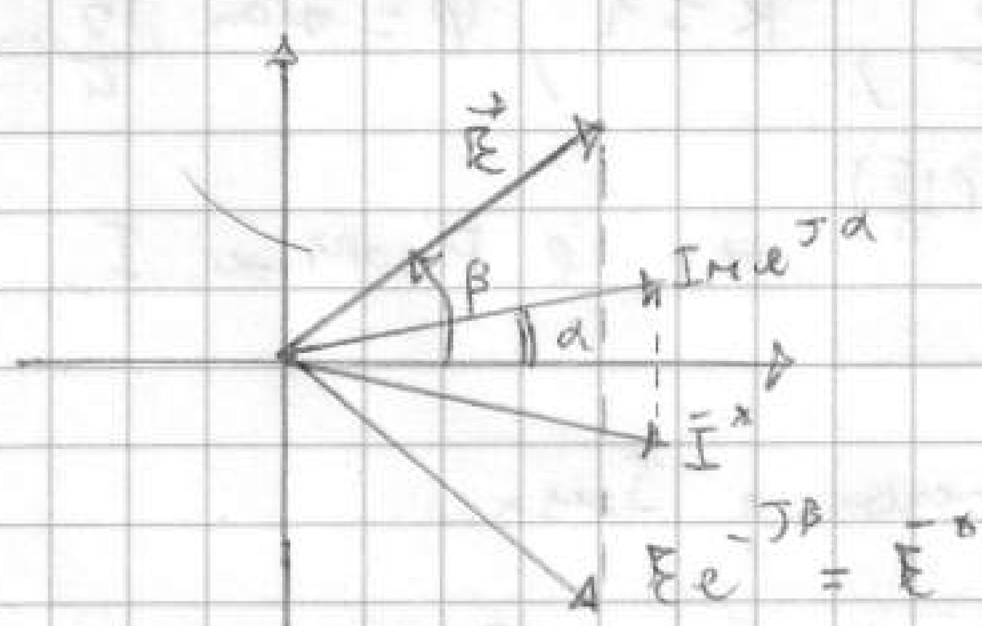
Se y_1, y_2 (due nuove var) / che $y_1=e^{j\omega t}$; $y_2=e^{-j\omega t}$, x il principio identità eguaglio i coefficienti:

$$\begin{cases} E_M e^{j\beta}=R I_M e^{j\alpha}+j\omega L I_M e^{j\alpha}+\dfrac{I_M}{j\omega C}e^{j\alpha} & (\text{da } y_1)\\ -E_M e^{-j\beta}=-R I_M e^{-j\alpha}+j\omega L I_M e^{-j\alpha}+\dfrac{I_M}{j\omega C}e^{-j\alpha} & (\text{da } y_2)\end{cases}$$

↳ il tempo è sparito [forma nota] incognite sono I_M e fase iniz. α.

Sappiamo che $\dot{Z}$ è scrivibile $|\vec{A}|e^{j\theta}=$ $|A|\cos\theta+j|A|\sin\theta$. Quindi $E_M e^{j\beta}$ è un VETTORE nei complessi (con $E_M e^{-j\beta}$ il suo coniugato) Invece di chiamarli vettori li chiamiamo FASORI.





⇓

$\bar{E}$ è il FASORE relativo alla tensione e(t).

Lo stesso per la corrente. Lunghezza grafica dei vettori è indipendente [ognuno con sua scala, lunghezze relative]

Se voglio aggiungere altro E_M devo però rispettare la scala.

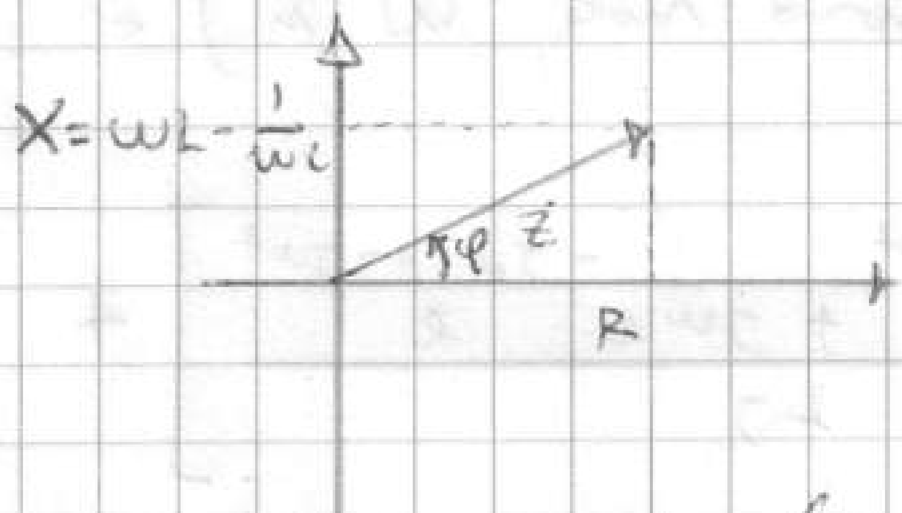
Con i fasori ho:

$$\underline{\bar{E} = \left[R + jwL + \frac{1}{jwC}\right]\bar{I}} \quad ; \quad \bar{E}^* = \left[R - jwL - \frac{1}{jwC}\right]\bar{I}^*$$

Notiamo che $\dot{Z} = Z(jw) = R + j\left(wL - \frac{1}{wC}\right)$ è IMPEDENZA. Quindi
$Z(-jw) = R - j\left(wL - \frac{1}{wC}\right)$

$$\underline{\bar{E} = \dot{Z}\,\bar{I}} \quad e \quad \underline{\bar{E}^* = \bar{Z}^*\,\bar{I}^*} \implies \text{le due eq. sono identiche}$$

Sul piano complesso ho sia fasori (da E e I) e operatori (da eq. diff.).



Anche $\dot{Z}$ è vettore ma non FASORE, descrive IMPEDENZA, non tensione o corrente. Ciò che ottengo da eq. diff. Argomento $\dot{Z}$ è φ. $\Rightarrow \dot{Z} = \sqrt{R^2 + X^2}\, e^{j\varphi}$

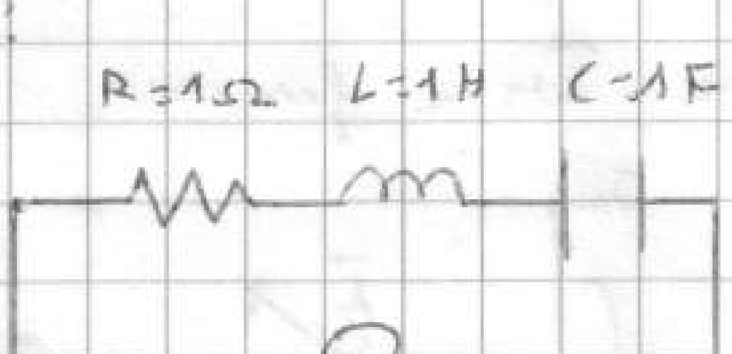
dove $\underline{\varphi = \mathrm{atan}\left(\frac{X}{R}\right)}$

(da fasore): $E_r e^{j\beta} = \dot{Z}\, e^{j\varphi} \cdot \underbrace{I_r e^{j\alpha}}_{\text{incognite}}$. Risolvo:

$$I_r e^{j\alpha} = \frac{E_r e^{j\beta}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{E_r}{Z} e^{j(\beta - \varphi)} \quad (\text{modulo} = \text{modulo e fase} = \text{fase})$$

Prima avevamo $\beta = 0$, infatti ritorna exp. di Laplace. Ragionando direttamente con i complessi ho soluzione. φ è fase corrente se $\beta = 0$, altrimenti fase corrente è $\beta - \varphi \Rightarrow -\varphi$ è SFASAMENTO rispetto a tensione.

Ex:



$[\beta = 0]$. Scrivo direttamente $E = Z \cdot I$. Dato trasf. oggetti in fasori:

$e(t) = 10\sin 4t \to \bar{E} = 10$, $i(t) = I_r e^{j\alpha}$. So subito scrivere

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}\, e^{j\varphi}$, $X = wL - \frac{1}{wC} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$, $R = 1$, $\varphi = \mathrm{atan}\, \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{1}$

$Z = \sqrt{1^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2}\, e^{j\varphi}$, $I_r = \frac{10}{Z} = \underline{\frac{10}{\sqrt{1 + \left(\frac{15}{4}\right)^2}}\, e^{-j\,\mathrm{atan}\left(\frac{15}{4}\right)}} \to$ è il FASORE di I.

Non torno nel tempo, xké mi interessa sfasamento e Imax.

Usando complessi in RePeSi sostituisco ai gen. di t. e i. i fasori e al posto delle rett. metto da Z. Poiché sono sinusoidi isofrequenziali, sfasamento tra sinusoide e l'altro è costante.

Avevamo tolto $e^{j\omega t}$ e $e^{-j\omega t}$. Rimettendoli, nei fasori aumentando t aumenta β → freccetta che ruota, lo stesso per fasore $\bar I$ che "insegue" la freccetta di $\bar E$ con stessa velocità, rimane a stesso sfasamento. Non ha senso (corpo rigido di fasori che ruota) usare il tempo.

Somma correnti è somma vettoriale fasori, in ogni lato c'è fasore tensione e corrente [corr. biunivoca con sin. nel tempo]. (Sia metodo maglie che nodi).

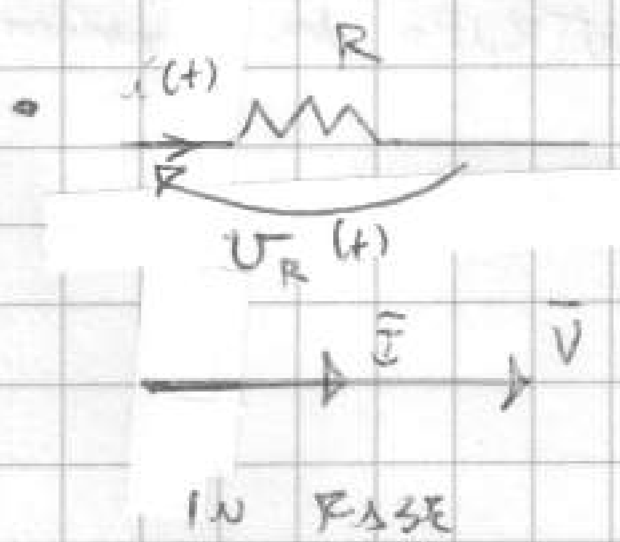
H

LEGGI COSTITUTIVE BIPOLI nel dominio dei fasori. PDK:

$$\sum i_k(t)=0 \rightsquigarrow \sum \bar I_k = 0 \quad ; \quad \sum v_k(t)=0 \rightsquigarrow \sum \bar V_k = 0$$

(somma di vettori)

t — Fasori



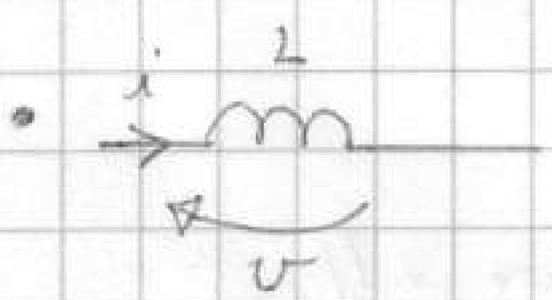
$v = Ri$

$$\bar V = R\bar I \rightarrow V_M e^{j\beta} = R I_M e^{j\alpha} \rightarrow I_M e^{j\alpha} = \frac{V_M}{R} e^{j\beta} \; ; \quad \varphi = 0, \quad \beta = \alpha$$

IN FASE

Tens. e corr. sono in FASE.

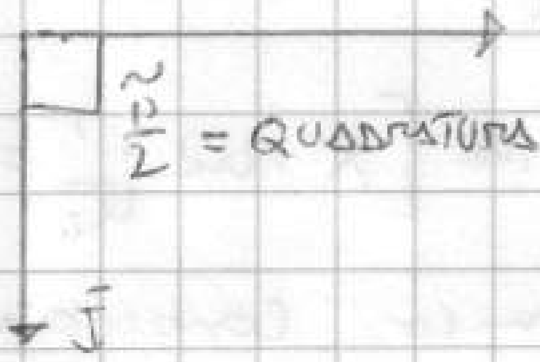
Sul piano complesso, $\bar I$ è sovrapposto a $\bar V$



$v = L\frac{di}{dt}$

$$\bar V = j\omega L \bar I$$

[derivata nel dom. del tempo = moltiplico per $e^{j\omega t}$ il fasore]

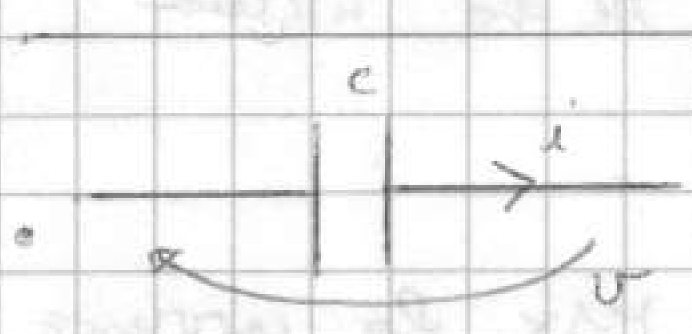


Ho $V_M e^{j\beta} = \omega L \, e^{j\frac{\pi}{2}} I_M e^{j\alpha} \rightsquigarrow I_M e^{j\alpha} = \frac{V_M}{\omega L} e^{j\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)}$. Corrente è sfasata di $\frac{\pi}{2}$ in negativo. Si dice che è in RITARDO (in senso antiorario angoli)

RITARDO di $\frac{\pi}{2}$ di I su V

⇓

I è quadratura in ritardo su V

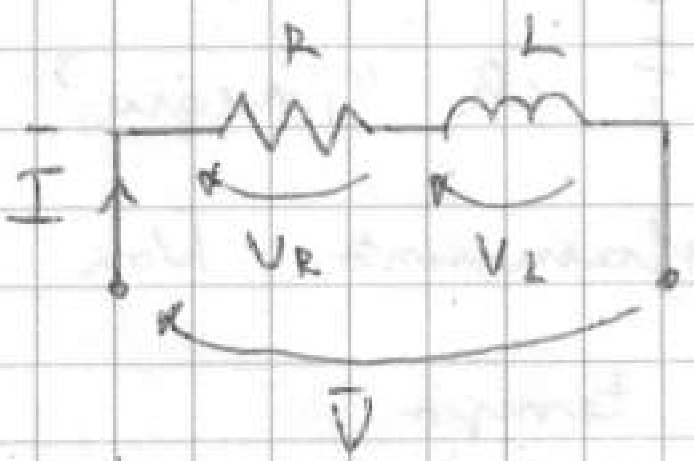


$i = C\frac{dv}{dt}$ (è duale di L)

$$\bar I = \underbrace{j\omega C}_{\text{ammettenza}} \bar V \rightarrow \bar I = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}} V_M e^{j\beta} = \omega C V_M e^{j\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)}$$

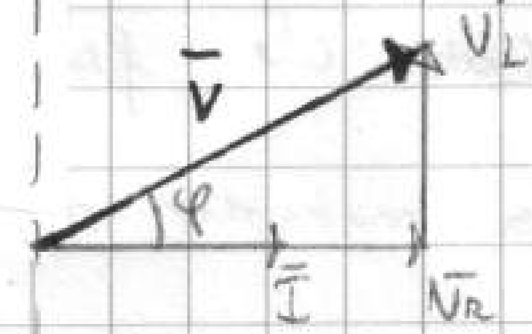
⇒ Corrente è in QUADRATURA in ANTICIPO su TENSIONE

Se combino i BIPOLI) Ex RL Scrivo la LEGGE di OHM in forma vettoriale:

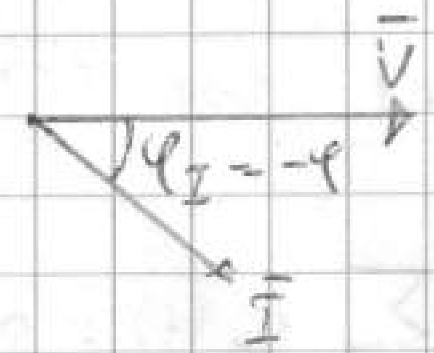


$\bar V = \bar V_R + \bar V_L$. Se $\bar V_R$ = $\xrightarrow{\quad\quad} V_R$ /

$\bar I$ è in FASE. Fissata scala V e I disegno i vettori $\bar V_L$, $\bar I$ è la stessa, non so il modulo, ma so dir. e verso ⇒ $\bar V_L$ è q. in anticipo su $\bar I$. Faccio somma vettoriale e chiudo poligono forze.

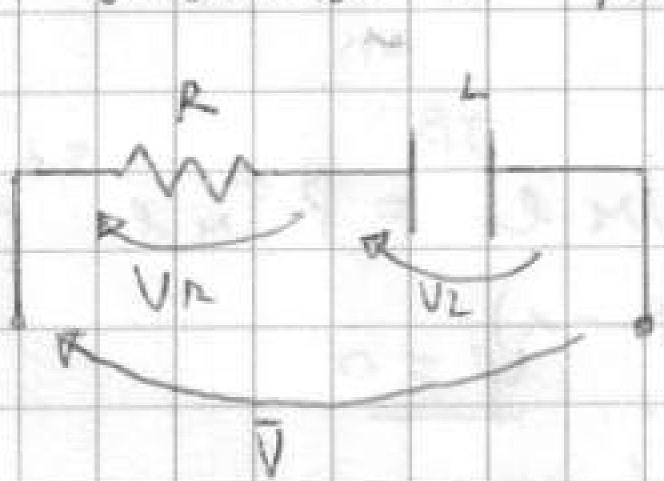


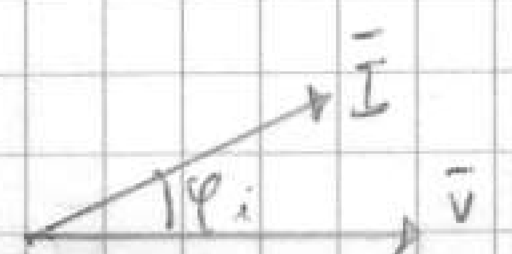
In RL ho composizione fase/quadratura. x simmetria



$\varphi = \operatorname{atan} \frac{\omega L}{R} \left[\omega \tau\right]$, $\varphi_I = -\operatorname{atan} \frac{\omega L}{R}$

Per analogia in RC:

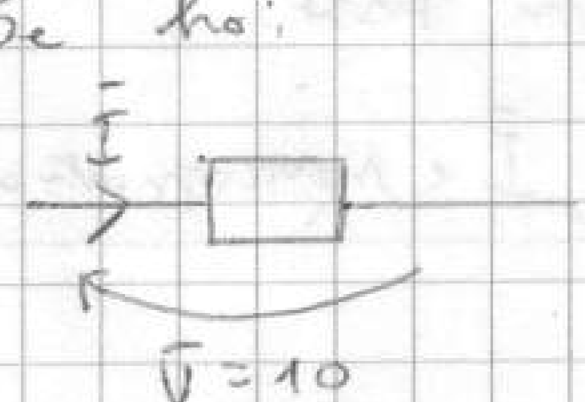


Ho 

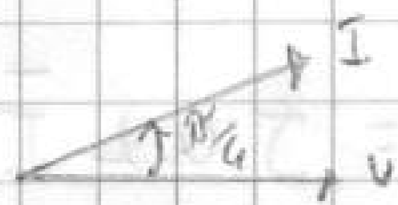
Corrente in ANTICIPO su tensione. R smorza l'effetto del bipolo reattivo.

//

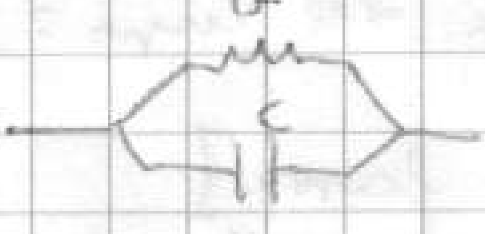
Se ho:



$\bar I = 2 + j2$ e $\bar V = 10$. Di che natura è il bipolo?



→ è RC.

Se avessi 

faccio $G + j\omega C$, potrebbero essere in //.

Visto effetto esterno, ho avuto "X" prevalentemente induttiva $\left[X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \text{ sulla } L_{eq}\right]$

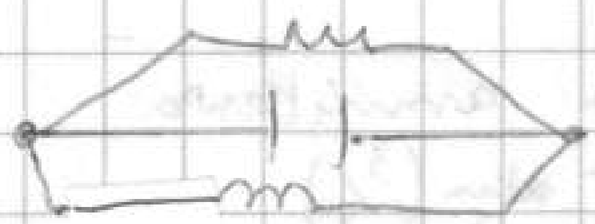
Non so natura bipolo solo con fasori: [questo è ohmico capacitivo]

Se aumento ω, se V è assegnata varia risposta corrente (varia l'impedenza con ω), aumenta natura INDUTTIVA. Riducendola aumenta parte capacitiva.

Ho spartiacque quando $X = 0$: è tutto resistente oppure ho trovato pulsazione che annulla la reattanza $\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$; se ho circuito RLC e trovo questa ω siamo in RISONANZA.

Annullando "X" ho min valore impedenza che rende max la corrente.

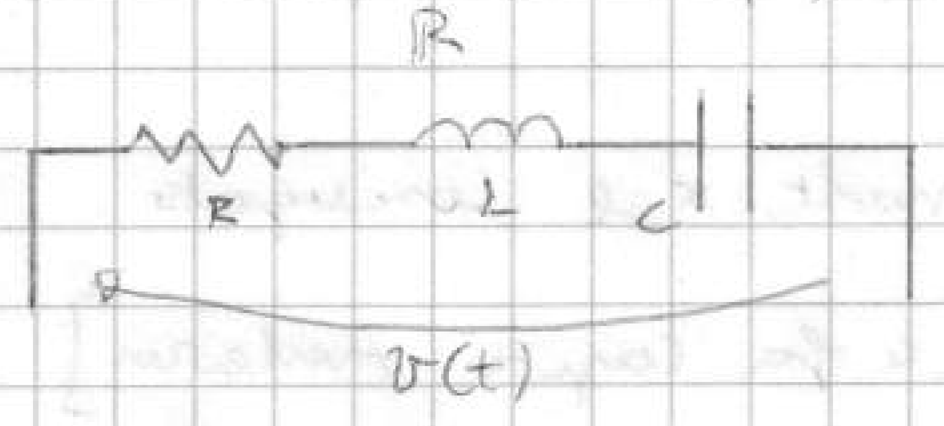
Analogo nei paralleli:



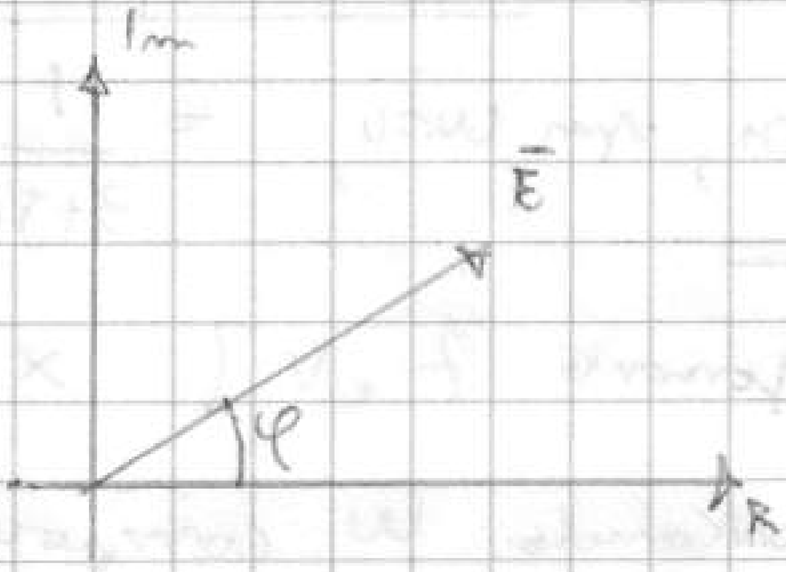
Parlo di AMMETTENZE: $G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$. La risonanza // risolta tensione a corrente impressa fissa.

METODO DEI FASORI 8/11/05

$$e(t) = E_M \sin(\omega t + \beta) \Longleftrightarrow \bar E = \overbrace{E_M}^{\text{modulo}} e^{\overbrace{j\beta}^{\text{argomento}}} \quad \mathbb{C}$$



$$v(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

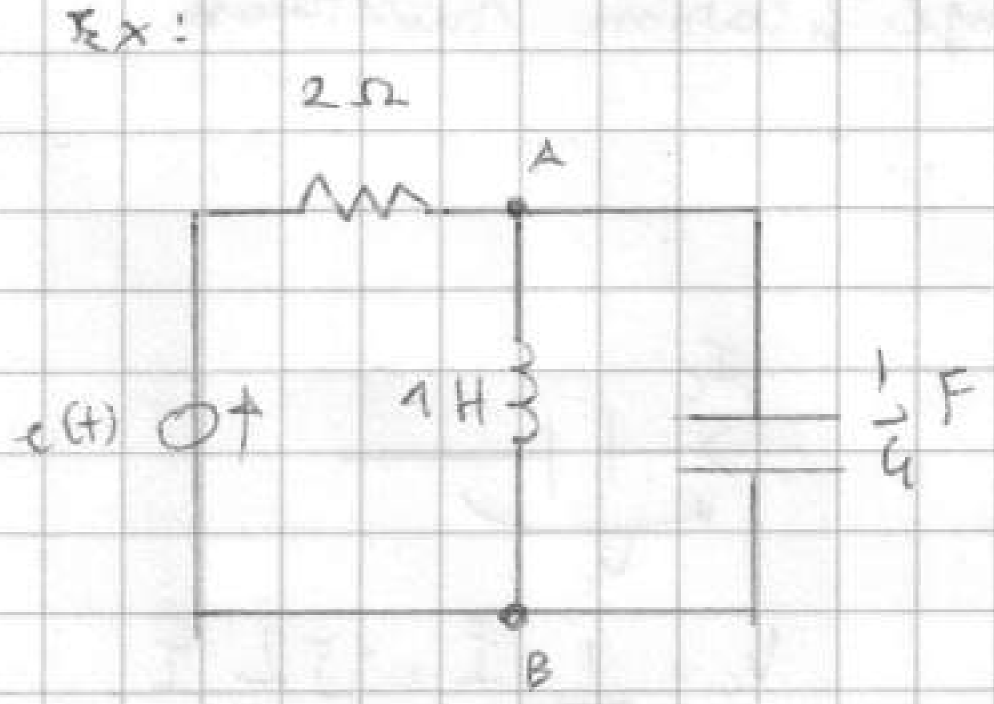


diventa $\bar V = Z \bar I$ dove $\dot Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$. Metodo utile:

$[G_{no}][V_{no}] = [I_{no}]$ diventa $[\dot Y_{no}][\bar V_{no}] = [\bar I_{no}]$ (lo stesso x maglie).

$[Z_m][\bar I_m] = [\bar E_m]$, a $\dot Z \Rightarrow R$, a $\dot Y \Rightarrow G$. Rimanendo nel tempo impossibile.

Ex:

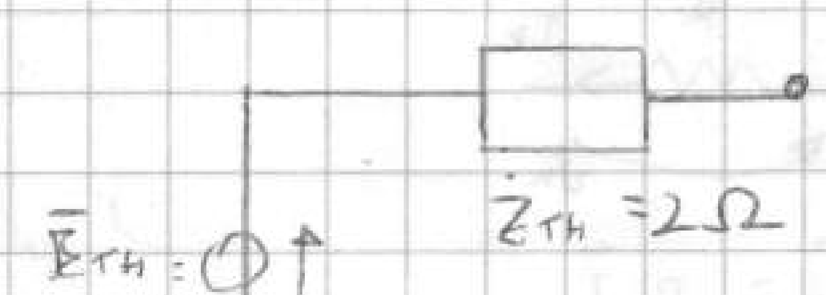


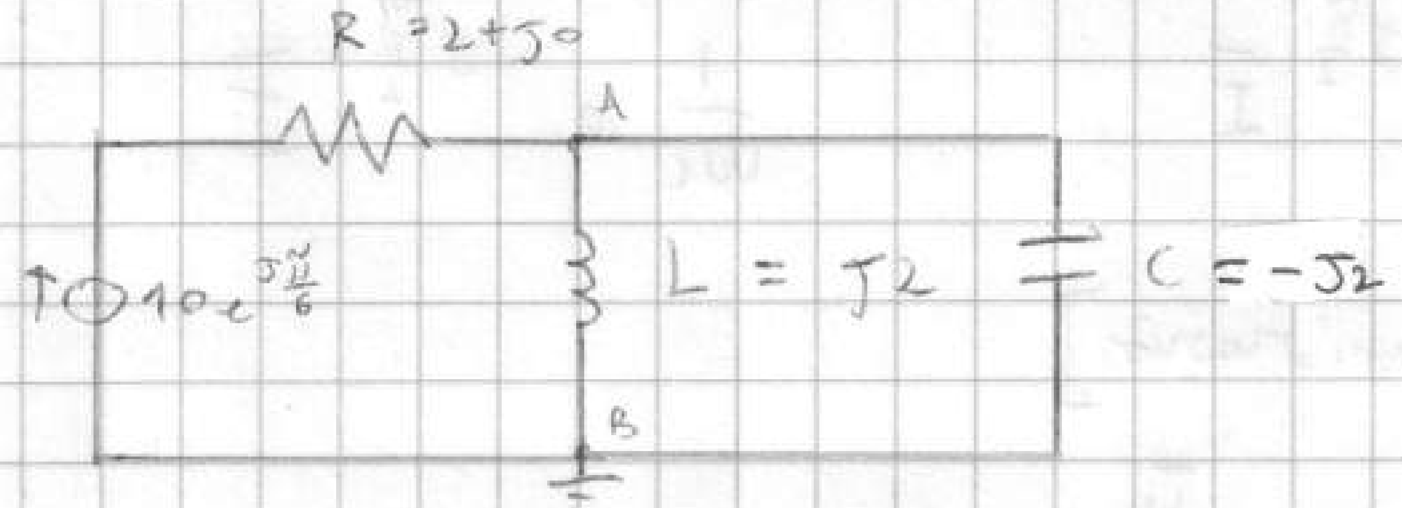
$E_M = 10V$, $\omega = 2\,rad/s$; $\beta = \frac{\pi}{6}$. Qual è tensione tra A, B?

[schema Thevenin difficile se rimango in t].

↳ Aggiro E_{TH} e Z_{TH}

Dobbiamo trovare la tensione a vuoto.





[ω compare solo in operatori; $\bar E = 10e^{j\frac{\pi}{6}}$; $R = 2 + \cancel{j0}$; $L = \overbrace{j\omega L}^{\to \text{compare negli utili.}} = j2$,

$C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = -j2$]. Uso metodo nodi! Autoconduttanza → autoammettenza

$$\left(\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{j2}} - \cancel{\frac{1}{j2}}\right)\bar V_{AB_0} = (\text{ammettenza} \times \text{tensione}) = 10e^{j\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \bar V_{AB_0} = 10e^{j\frac{\pi}{6}}$$

Uguagliando parti immaginarie ho RISONANZA (qui è RISONANZA PARALLELO), ho $y = 0$ e $\dot Z = \infty$. Quanto vale Z_{TH}? Sommo le ammettenze e $Z_{TH} = 2\Omega$, puro resistivo [fasore nullo]. Ma Z_{TH} può essere puramente resistivo o no. Cambiando ω potrebbe apparire in Z_{TH} la REATTANZA!

Stesso circuito ma con $\omega = 4\,rad/s$ (aumento).

$$\dot Z = \left(\frac{1}{2} + j4 + \overbrace{\frac{1\cdot 1/4}{j4}}^{\to -j}\right); \quad \dot V_{AB_0}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{j4} + j\right) = 10e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$\left(\frac{2-j+4j}{4}\right)\bar{V}_{AB_0} = 4\,10\,e^{j\frac{\pi}{6}} / 2 = 20\,e^{j\frac{\pi}{6}}$. La nuova ammettenza

è $(2+3j)$, $(2+3j)\bar{V}_{AB_0} = 20\,e^{j\frac{\pi}{6}} \rightsquigarrow V_{AB_0}\sqrt{4+9}\,e^{j\,\mathrm{atan}\left(\frac{3}{2}\right)}$

Quindi $V_{AB_0} = \frac{20}{\sqrt{13}}\,e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\mathrm{arctg}\frac{3}{2}\right)}$. La tensione è cambiata ed è sfasata.

Z_{TH}, per $w=4$, $= \frac{1}{2+3j} = \frac{1}{\sqrt{13}}\,e^{-j\,\mathrm{arctg}\frac{3}{2}}$ [non c'è collegamento

argomento Z e V] × razionalizzare i complessi molt. × il coniugato.

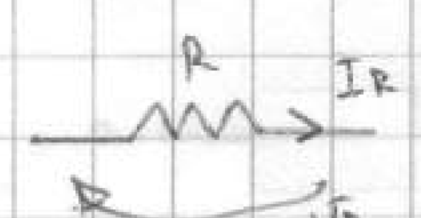
Spostando w compare parte immaginaria [ci fa capire materia]

Vantaggio dei fasori rispetto a Laplace: già sappiamo la soluzione [RPS, sol è sin isofrequenziale, incognita è val. max e fase], ed esporlo le

conoscenze nei circuiti R nei bipoli L, C.

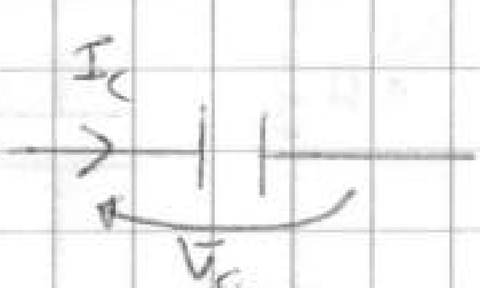
La presa funziona a 220V 50 Hz con $w \approx 100\pi$ semplificazione mostruosa
(→ non è max)

Nella risonanza si annulla la parte immaginaria



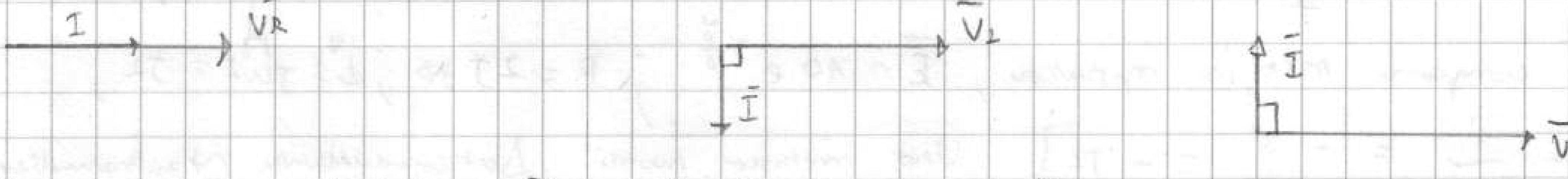
$\bar{V}_R = R\bar{I}$ → $R\bar{I}$

$\bar{V}_L = jwL\bar{I}$ → $wL\,e^{j\frac{\pi}{2}}\,\bar{I}$



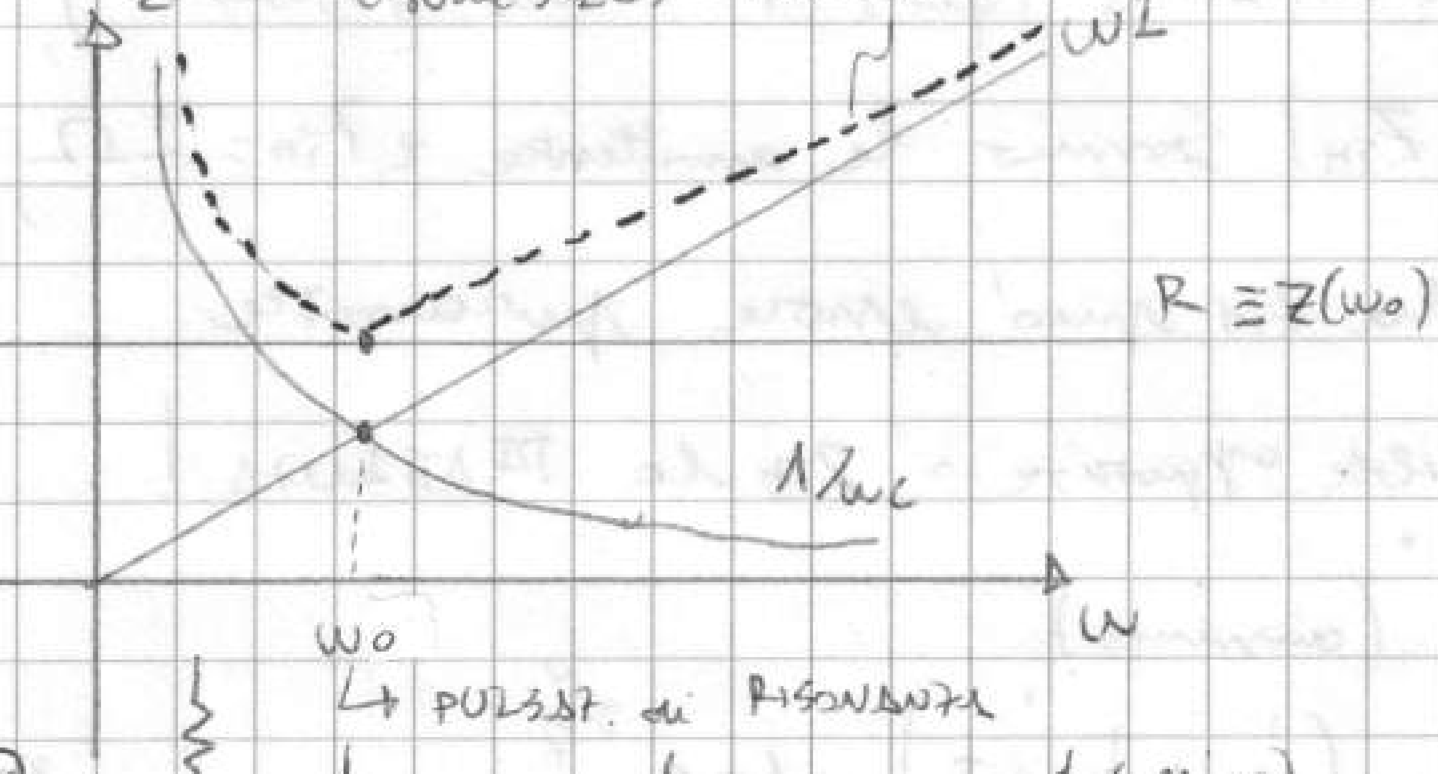
$\bar{V}_C = \frac{1}{jwC}\,\bar{I} = -j\frac{1}{wC}\,\bar{I}$ → $\frac{1}{wC}\,e^{-j\frac{\pi}{2}}\,\bar{I}$

[Anticipo è angolo che ruota in senso antiorario.]



Se avessi fase iniziale [fase i = fase V − arg. Z] ruoterei come corpo rigido.

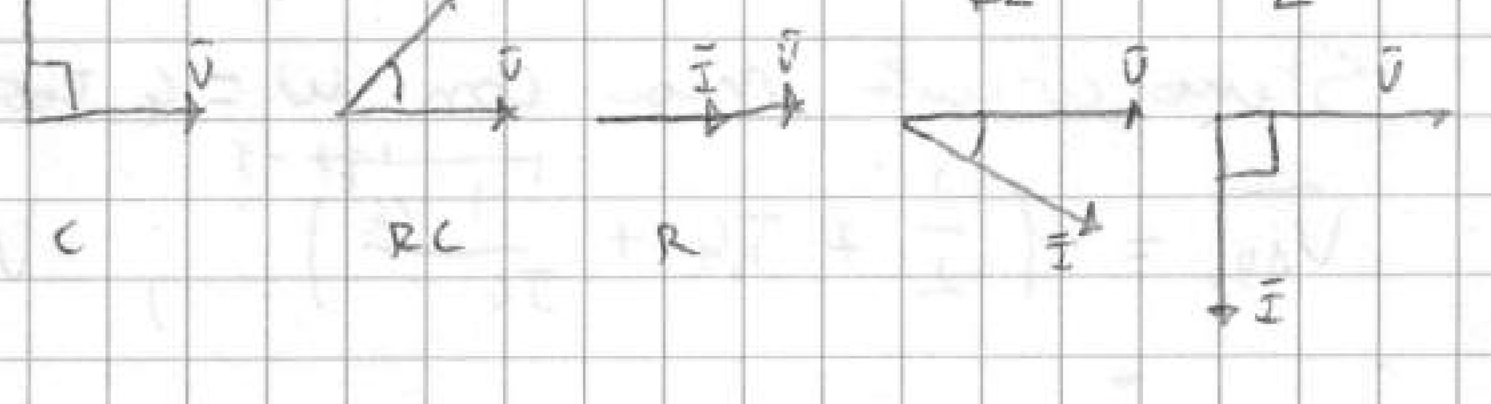
In caso serie, $Z = R + j\left(wL - \frac{1}{wC}\right)$ dove $x = wL - \frac{1}{wC}$ $\bar{I} = \bar{V}/Z\; e^{-j\,\mathrm{atg}\left(\frac{x}{R}\right)}$ ↓ sfasam. tra V e I

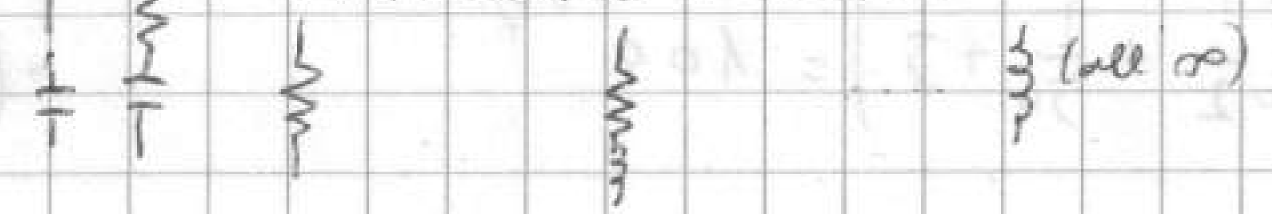


$Z = \sqrt{R^2+x^2}$

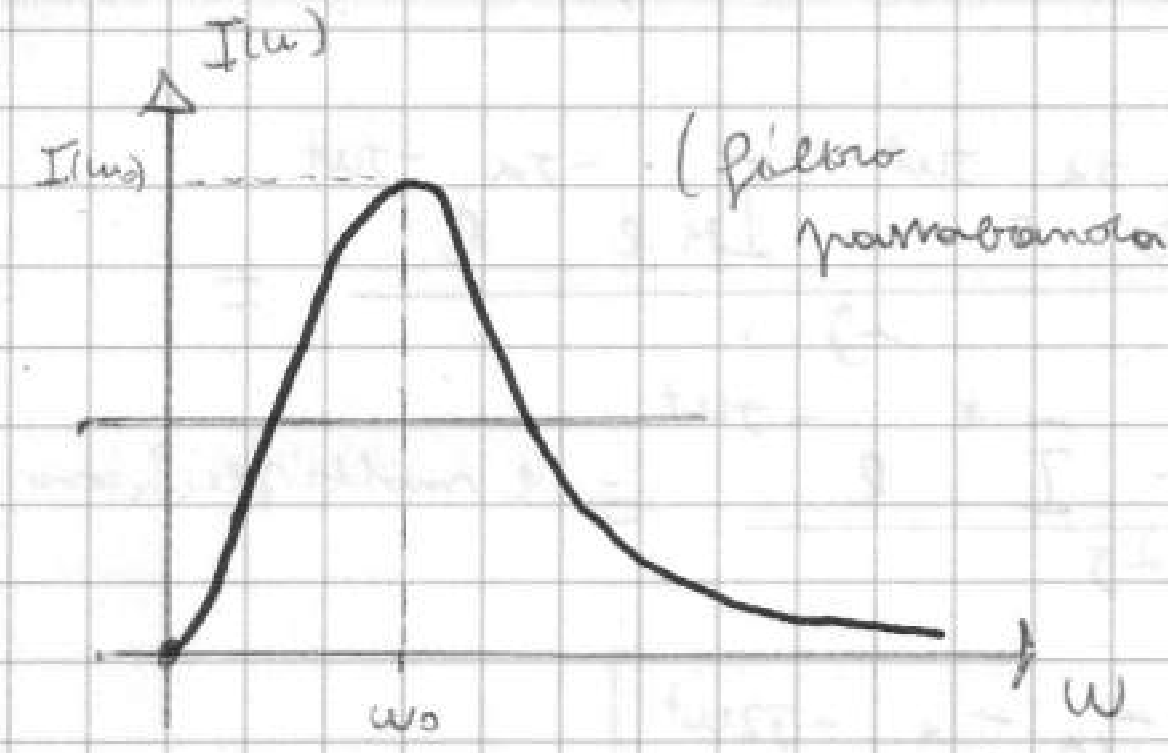
Per valori $w < w_0$ ho RC, $x<0$

Per valori $w > w_0$ ho RL





(56)



$I(\omega_0)$ è il valore di picco più alto.

Per $\omega < \omega_0$ regentino a 0, oltre va asintoticamente.

Sintonia: Cerchiamo quella frequenza di risonanza, facendo "stretto" il picco con trucis.

Nel caso parallelo $Z \to G$ con $\omega L \to \omega C$ e $\frac{1}{\omega C} \to \frac{1}{\omega L}$, pura dualità.

Si chiama ANTI-RISONANZA (effetto è corrente che è min in ω_0)

CALCOLO DELLA POTENZA (in RPS)

$\boxed{p(t) = v(t)\, i(t)}$ "istantanea". Uso direttamente i fasori

Se alimentatore si ha a 220 V a 50 Hz, che senso ha 1 kW? Bipoli non sempre quelli. Ha senso VALORE MEDIO potenza.

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\, dt}$$ → POTENZA ATTIVA: Valor medio della potenza istantanea $[T = 1/f]$

Se i e v sono sfasate, fase concorre alla potenza!

In continua se ho 10 A e 10 V son certo di avere 100 W. In alternata i valori resx come si combinano come Valor medio? L e C son bipoli passivi ma a volte ex. scarico i, v, si può considerare generatore. Potrei avere V e I $\neq 0$ ma $P = 0$

9/11/05

POTENZA IN R.P.S.

$p(t) = v(t)\, i(t)$, – potenza istantanea

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\, dt$$ – potenza media = POTENZA ATTIVA dove $T = \frac{1}{f}$ è il PERIODO

$T = \frac{2\pi}{\omega}$. $v(t) = V_M \sin(\omega t + \beta)$, $i(t) = I_M \sin(\omega t + \alpha)$, β, α fase iniziale; $\varphi = \beta - \alpha$ sfasamento tensione-corrente ($\equiv$ argomento di Z)

Passando ai fasori $v(t) \Longleftrightarrow \bar{V} = V_M e^{j\beta}$ e $i(t) \Longleftrightarrow \bar{I} = I_M e^{j\alpha}$. Per la pot. mi serve il tempo, x rimanere in ambito fasori usiamo Eulero.

Scriviamo $v(t)\cdot i(t)$ tramite le def. euleriane.

$$p(t) = \frac{V_M e^{jB} e^{j\omega t} - V_M e^{-jB} e^{-j\omega t}}{2j} \cdot \frac{I_M e^{j\alpha} e^{j\omega t} - I_M e^{-j\alpha} e^{-j\omega t}}{2j} =$$

sostituendo $\frac{\bar V e^{j\omega t} - \bar V^* e^{-j\omega t}}{2j} \cdot \frac{\bar I e^{j\omega t} - \bar I^* e^{-j\omega t}}{2j} =$ e moltiplichiamo

$$= -\frac{1}{4}\left[\bar V \bar I e^{j2\omega t} \underbrace{- \bar V \bar I^* e^{0} - \bar V^* \bar I e^{0}} + \bar V^* \bar I^* e^{-j2\omega t}\right] =$$

[Calcoliamo a parte: non appare il tempo! $-\left(V_M I_M e^{j(\beta-\alpha)} + V_M I_M e^{j(\alpha-\beta)}\right)$. Molt. e div. per 2 e metto in evidenza segno esponente

$$= -2 V_M I_M \cos(\overbrace{\beta-\alpha}^{\varphi}) = -2 V_M I_M \cos\varphi$$] Da prima:

$$= -\frac{1}{4}\left[-2V_M I_M \cos\varphi + 2V_M I_M \cos(2\omega t + 2\beta - \varphi)\right] \rightarrow \text{ho che}$$

[$\bar V \bar I = V_M I_M e^{j(\beta+\alpha)} \rightarrow \bar V \bar I = V_M I_M e^{j(\beta+\alpha+2\omega t)}$,

$\bar V^* \bar I^* e^{-j2\omega t} = V_M I_M e^{-j(\alpha+\beta+2\omega t)}$. Li sommo e li molt. e divido per 2. $\Rightarrow$

ho $V_M I_M \cos(2\omega t + \alpha + \beta)$, sostituendo φ ho $\rightarrow 2 V_M I_M \cos(2\omega t + 2\beta - \varphi)$]

$$p(t) = \underbrace{\overset{\boxed{1}}{\frac{V_M I_M}{2}\cos\varphi} - \overset{\boxed{2}}{\frac{V_M I_M}{2}\cos(\overbrace{2\omega t}^{\text{pulsazione doppia risp. alle forzanti}} + 2\beta - \varphi)}}_{\text{POTENZA FLUTTUANTE}} \quad \text{2 contributi.}$$

Per il valor medio calcolo prima la media di $\boxed{1}$ poi di $\boxed{2}$.

Essendo $\boxed{1}$ costante, la media coincide con sé stesso; la $\boxed{2}$ è 0

$$\boxed{P = \frac{V_M I_M}{2}\cos\varphi} \rightarrow \text{POTENZA ATTIVA}$$

[integrale nel periodo del coseno]

Noti i fasori ho la P.

In continua avevo semplicemente V · I.

Es: sul resistore avrei $p(t) = R i^2(t)$, $P = \frac{1}{T}\int_0^T R i^2(t)\, dt =$

(da $\bar V = R \bar I$, avrei $V_M \cancel{e^{j\beta}} = R I \cancel{e^{j\beta}}$ → fase ininfluente; sostituendo, $\varphi = \beta - \alpha = 0$ su R) $= R \boxed{\frac{I_M^2}{2}}$ → contributo corrente che dà potenza, non tutta ma solo una parte

Definisco il VALORE EFFICACE $\boxed{\underset{[RMS]}{I_{eff}^2} = \frac{I_M^2}{2}}$ e così da prima ho $R I_{eff}^2$

Mandando una I in continua per avere stessa potenza devo mandare I_{eff}

Uguagliando $\frac{1}{T}\int_0^T R i^2(t)\,dt = R I_{eff}^2$ trovo $R I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T R i^2(t)\,dt \rightsquigarrow$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}$$

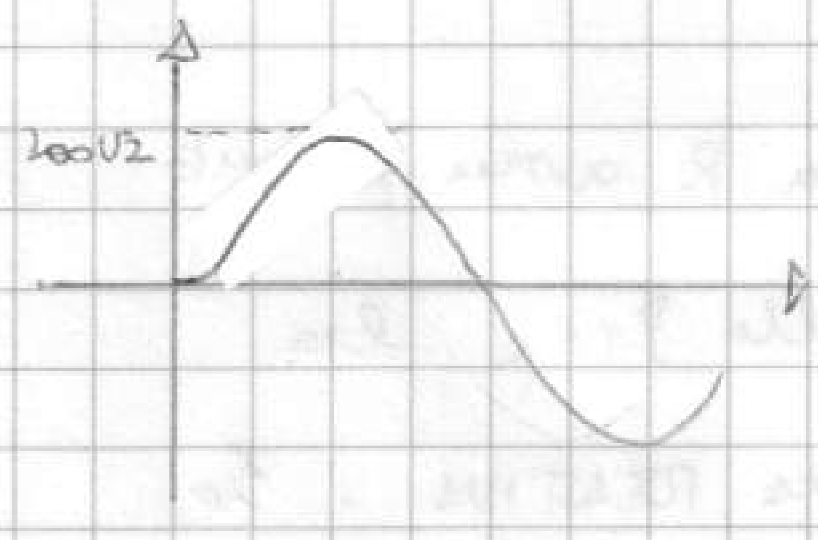
(gli inglesi lo chiamano ROOT MEAN SQUARE, radice media al quadrato)

Nei dati tecnici si da valore efficace, non massimo. Ho:

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{V_M^2}{2}}$$

Nel caso sinusoidale $\boxed{I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}}$ e $V_{eff} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$

Se rete fornisce 220 V so che quello è valore efficace, quello massimo è $V_M = 220\sqrt{2}$ [nel mondo si da RMS]. Osservando oscill. ho:



Si semplifica l'espressione della potenza:

$$\boxed{P = V_{eff}\, I_{eff} \cos\varphi} \rightarrow \text{FATTORE DI POTENZA}$$

Voltmetro applicato a presa legge V_{eff}, lo stesso l'amperometro, mentre poi uso wattmetro x ottenere $\cos\varphi = \frac{P}{V_{eff} I_{eff}}$. Si omette perché son certo che son valori efficaci.

Trattando i fasori posso scegliere di fare modulo x valore massimo o modulo x valore efficace. Dipende da approccio matematico o elettrotecnico.

Ora il fasore si può definire in 2 modi:

$\bar{V} =$
- $\rightarrow V_M e^{j\beta} \rightarrow \frac{1}{2}|\bar{V}||\bar{I}|\cos\varphi$ [ELETTRONICI x FORMA D'ONDA]
- $\rightarrow V_{eff} e^{j\beta} \rightarrow |\bar{V}||\bar{I}|\cos\varphi$ → nella potenza si tratta questo modo [ELETTROTECNICA CLASSICA]

Ex ho RL, $\dot{Z} = R + j\omega L$. Se voglio la potenza media faccio $\bar{V} = \dot{Z}\bar{I}$.

Quindi $V I \cos\varphi$ dove $\varphi = \arctan\frac{\omega L}{R}$ e $I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$ ma ci sono troppi errori atan → cos → si perdono dati.

Come tirare P attiva direttamente dai fasori?

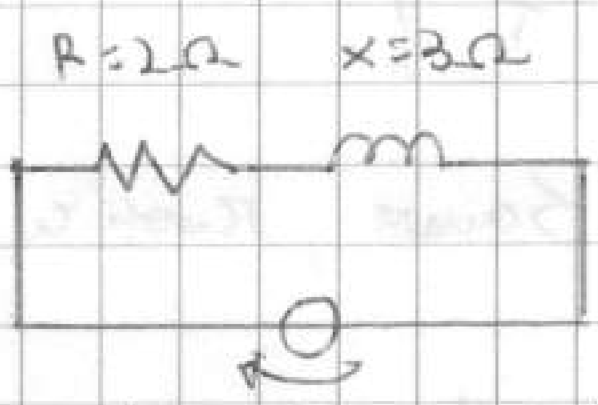
Voglio $VI\cos(\beta-\alpha)$; facendo il prodotto $\bar V \bar I$ avrei $VI e^{j(\beta+\alpha)}$; se

valori efficaci

faccio $\bar I^*$ $\quad \bar V \bar I^* = VI e^{j(\beta-\alpha)} = VI\cos\varphi + jVI\sin\varphi$

Prendo parte reale VI ho: $\Re_e\{\bar V \bar I^*\} = P$, senza passare x cos e atan

Ex: R=2Ω X=3Ω



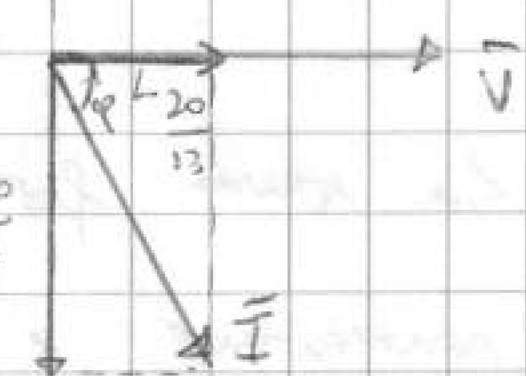
$\left[\omega = 100 \frac{rad}{s} \rightarrow X = \omega L = 3 \rightarrow L = \frac{3}{100}\right]$
↳ effetti ω solo su impedenza non su fasori.

$v(t) = \sqrt{2}\, 10 \sin(100t)$

→ mantengo f. cartesiana

$\bar V = 10$; applico ohm → $\bar I = \frac{\bar V}{\dot Z} = \frac{\bar V}{2+j3} = \frac{10}{(2+j3)} \cdot \frac{(2-j3)}{(2-j3)} = \frac{20-j30}{4+9} =$

$= \frac{20}{13} - j\frac{30}{13}$; $\bar I$ è sfas. in ritardo su V [perché c'è L]



Utilizzando $P = \Re_e\{\bar V \bar I\}$ ho $= \left\{10 \cdot \left[\frac{20}{13} + j\frac{30}{13}\right]\right\} = \frac{200}{13}$ W

Ma cosa ci faccio con parte immaginaria?

$\bar V \bar I^*$ è una POTENZA COMPLESSA, $\dot A = \bar V \bar I^*$. Senza R avrei avuto potenza attiva nulla. $|\dot A| = VI$ → il modulo della P.C. è la POTENZA APPARENTE $= P + jQ$ dove Q = POTENZA REATTIVA. Se bipolo è L o C ideale $P = jQ$. Con legge di Ohm $\dot A = \dot Z \bar I \bar I^* = \dot Z I^2 = (R + jX) I^2$ quindi $P = RI^2$ e $jQ = jX \cdot I^2$. Formule coerenti.

$$\begin{cases} P = RI^2 \rightarrow \text{sempre} > 0 \text{ in conv. degli utilizzatori} \\ Q = XI^2 \rightarrow \text{d. dalla natura capacitiva o induttiva } \left[\omega L \text{ o } -\frac{1}{\omega C}\right] \end{cases}$$

↳ > 0 bipolo L; < 0 bipolo C

Usando fasori non si passa x il tempo e addirittura posso definire bipoli tramite comportamento della potenza.

Come dimensionare Q? "W" vanno alla potenza attiva

$[\dot A] = [VA]$ (VOLT AMPERE), $[Q] = [VAR]$ = (VOLT AMPERE REATTIVI)

Q tiene conto componente I in quadratura con V

Posso avere stessa P con I diverse (se L assorbe molto, dissipa).

Problema è il trasporto corrente.

Perché alta tensione è a 400kV e arriva a trasmissione locale (400V)

Porto enorme carico di potenza × servire Italia. (VI). Voglio trasportare P. Se dovessi portare 10^9 W, con 400 V quanta I ho? → determino sezione conduttore (immagina fare cavi a conduttori spessi di rame). Si alza la V per ridurre $|I|$. C'è anche problema di isolamento. L'aria standard in cond. standard raggiunti i $30 \frac{kV}{cm}$ [$\vec{E}$ perfora il dielettrico aria]. Arrivando all'ultimo utilizzatore riduco V anche × questioni di isolamento.

10/11/2005

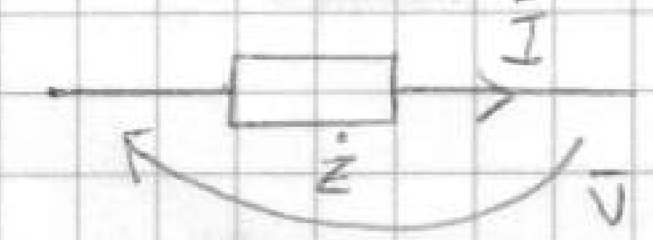
$$\dot{A} = \bar{V}\,\bar{I}^* = P + jQ$$

Q → Potenza reattiva [VAR]

P → Potenza attiva [W]

$\dot{A}$ → Potenza complessa

$|\dot{A}|$ = Potenza apparente [VA]



$$\bar{V} = V_{eff}\, e^{j\beta}, \quad \bar{I} = I_{eff}\, e^{j\alpha}, \quad \varphi = \beta - \alpha$$

V_{eff} → $V_M/\sqrt{2}$

$P = VI\cos\varphi$, $Q = VI\sin\varphi$ → definisco φ ⇒ $\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{Q}{P}}$ → nel lato potrei avere anche un generatore

Se lato è Z puro allora $\underline{\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}}$ e $\bar{V} = \dot{Z}\bar{I}$ ⇝ $\dot{A} = RI^2 + jXI^2$

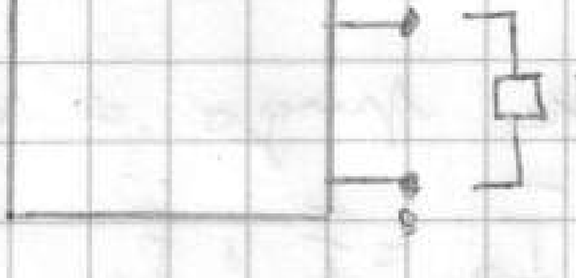
In conv. utilizzatori capacità ha potenza reattiva, quindi erogata

Se $X<0$, $Q<0$ in C.U. → Q erogata → Bipolo C

Se $X>0$, $Q>0$ in C.U. → Q assorbita → Bipolo L

→ TH. DELL' ADATTAMENTO DELL' IMPEDENZA

MAX. TRASF. POTENZA in reg. p. sinusoidale



tramite Th. Thevenin ⇝

$\dot{Z}_{TH} = R_{TH} + jX_{TH}$, $R_e + jX_e = \dot{Z}_e$

Devo max. corrente. In rete puramente resistiva $R_e = R_{TH}$.

→ Z minima. $\dot{Z} = \dot{Z}_{TH} + \dot{Z}_e = (R_e + R_{TH}) + j(X_e + X_{TH})$. In risonanza $X_e = -X_{TH}$ ⇒ reattanza th può essere capacitivo o induttivo, quindi prendo elemento esterno opposto [se lo cambia non so cosa accade!]

Se dentro ho un bipolo equivalente a quella frequenza del tipo C, fuori metto L. Si deve soddisfare $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_e C_{TH}}}$

⇓

$$\boxed{\dot{Z}_e = \dot{Z}_{TH}^*}$$

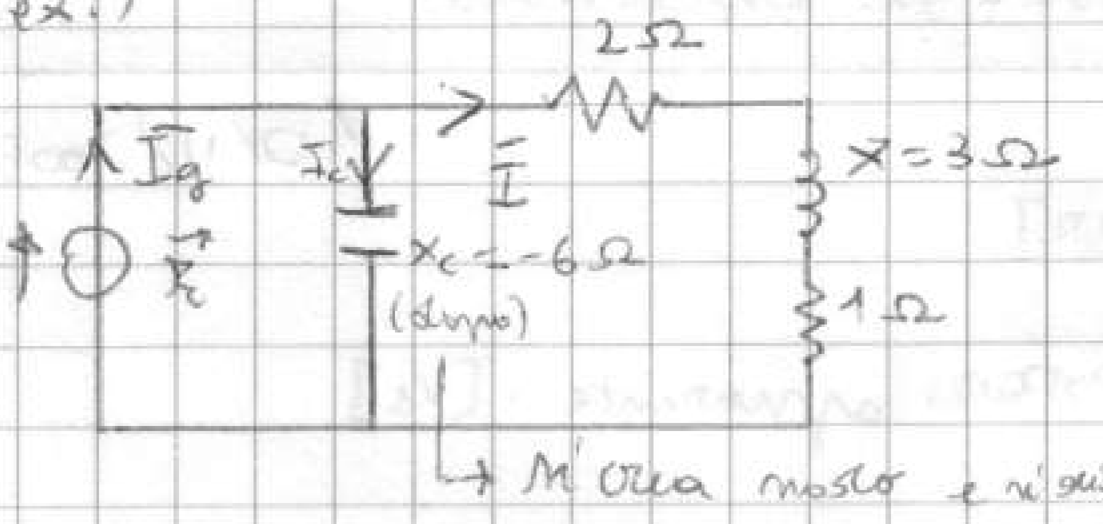
Ex. Se ho $Z_c = 1+j1$, fuori metto $1-j1$ → capacità.

Banda audio va da 20 Hz a 20 kHz → microfono deve agire quasi come R puro x ostacolare al max la potenza.

Anche con controllo di potenza 90, non posso avere P > di $Z_c = Z_{TH}^*$.

Un limite forte alla trasmissione energia è I da trasmettere a carico.

(ex:)



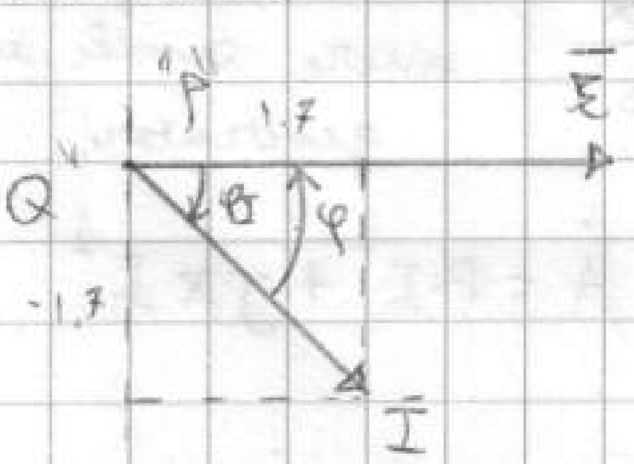
Se $e(t) = \sqrt{2}\,10 \sin \omega t$, $\bar E = 10 + j0$

$Z_{tot} = R + jX$ (serie) $= 3 + j3\ \Omega$

$[\bar I_g = \bar I]$; $\bar I = \frac{10}{Z} = \frac{10}{3+j3} = \frac{30-j30}{\underbrace{18}_{\text{modulo al }^2}} =$

$= \frac{5}{3} - j\frac{5}{3} \simeq 1,7 - j1,7$. Diagramma:

(essendo unico generatore lo metto orizzontale), $\overset{\text{ritardo}}{\varphi_1} = \text{atan}(-1) = \frac{\pi}{4}$



$|\bar I| = \frac{5}{3}\sqrt{2} \simeq 2,3$ A

Pensiamo $\bar E$ come ente erogatore energia elettrica. Potenza trasferita al carico è $P = R|\bar I|^2 = 3 \cdot \frac{50}{9_3} = \frac{50}{3}$ W. Ente erogatore però vorrebbe solo $\bar I$ in fase, VI cos φ

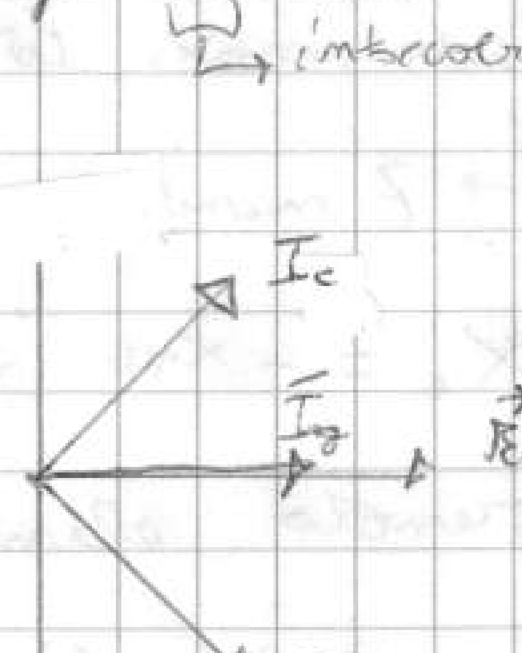
→ fa pagare anche sfasamento ⇒ mette contatore che misura VAR [VARMETRO] e ti faccio pagare I sin φ.

(X è parametro che modella il motore, come risparmio) Mi ricordo che X può essere < 0. Se all'ente faccio vedere X di meno pago di meno.

Uso componente che da Q < 0. → attacco CONDENSATORE ⇒ $\bar I_g = \bar I + \underbrace{\bar I_c}_{\text{introdotta}}$

Cond. non altera tensione → $\bar I_c = \frac{10}{-j6}$ [maglia] $=$

$+j\frac{5}{3} \simeq j1.7$, $\bar I_g$ ora è IN FASE con $\bar E$ perché $I_g + I$ annulla la parte immaginaria.



[CONDENSATORI IN DERIVAZIONE AL CARICO] → RIFASAMENTO

Allora $Q_c = Q$ (in modulo) [calata I da trasmettere]

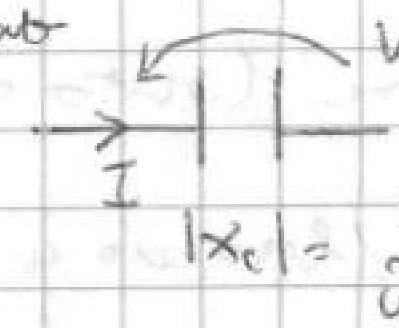
$[Q_g = Q - Q_c$ → penso in modulo; $= Q + Q_c$ → "−" è interno a Q$]$

↓

(Q) Capacità condensatore nel rifasamento.

$Q = VI \sin\varphi$; $P = VI\cos\varphi$ $\Rightarrow$ $Q = P\,tg\varphi$. La potenza nel carico è ovviamente dallo sfasamento. Voglio che Q_c [modulo] corregga φ ad un nuovo valore $\rightarrow$ $Q_q = P(\underbrace{tg\varphi}_{\text{angolo vecchio}} - \underbrace{tg\varphi'}_{\text{angolo desiderato}})$ [nell'ex. abbiamo rifasato tutto] $= Q_c$.

$-\frac{1}{x_c}$



$V = \frac{I}{\omega C}$ tens.

Quindi $\frac{1}{\omega C} I^2 = \boxed{\omega C V^2}$ applicato al rifas.

Capacità da mettere per il rifasamento è $\boxed{C = \frac{P(tg\varphi - tg\varphi')}{\omega V^2}}$

[se avevo invece una capacità avrei messo ~ in parallelo].

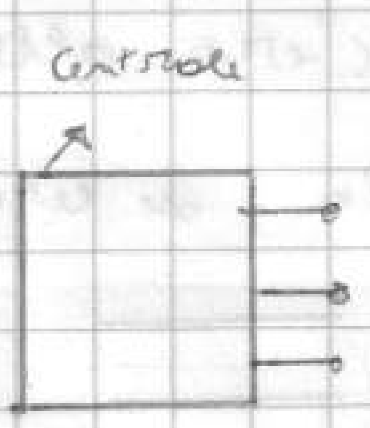
Motori elettrici induttivi [globalmente carichi sono R e L e si parla quindi di C già rifasamenti]. Nel rifasamento non cambio generatore. [L'approx. che c'è Z_{TH}, condensatore alza un po' la tensione ma lo trascuro]

Nel rifasamento non considero i [illegible] (applicato in impianti grossi!) perché utente normale non avrebbe $\cos\varphi$ molto depressi. Si applica a macchine "grosse", anche ad ex. ascensori. Chi non è [illegible].

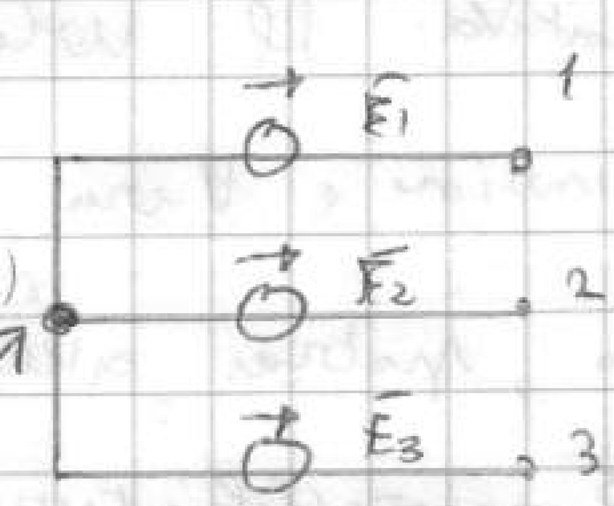
//

SISTEMI TRIFASE: Cuore del sistema sono tre fem sinusoidali che hanno fase iniziale opportunamente sfasata l'1 con l'altro. Il SIS. TRIF. SIMMETRICO è quello in uso.

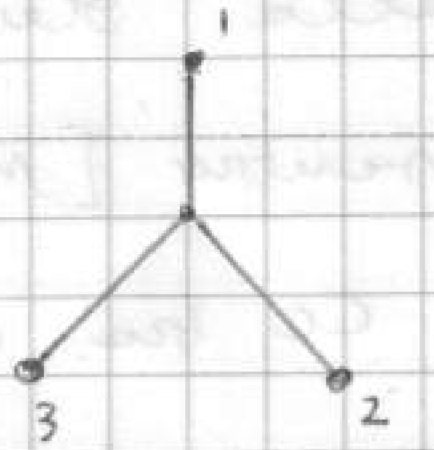
Da centrale escono 3 morsetti



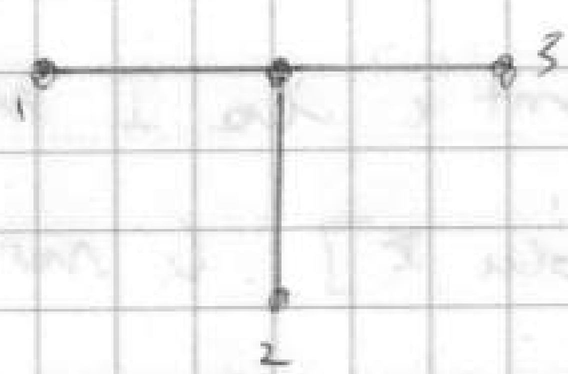
Schema Thevenin:



Deformando ottengo:

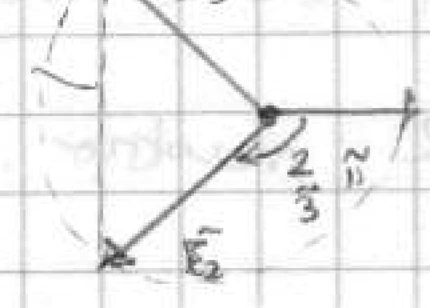


o



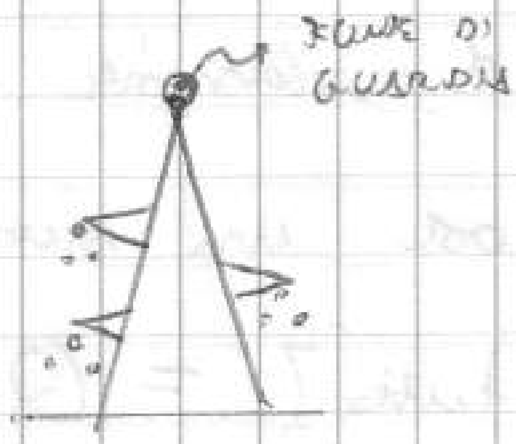
Sistema è SIMMETRICO se moduli fasori sono uguali e reciproco sfasamento è $\frac{2}{3}\pi$.

$\bar E_1 = E$, secondo fasore se è sfasato in ritardo è SEQUENZA DIRETTA, altrimenti è INVERSA, $\rightarrow \bar E_2 = \bar E_1 e^{-j\frac{2}{3}\pi}$, $\bar E_3 = \bar E_1 e^{-j\frac{4}{3}\pi}$



[congiungente $\bar E_2$, $\bar E_2$ è $\perp$ al $\bar E_1$, IMPORTANTE]

Il traliccio generalmente ha conf. a 3 con a volte gruppi di SUB CONDUTTORI [tra loro non c'è ΔV]. Ci sono linee a $\boxed{400kV}$ + TRASMISSIONE



132kV, 21kV. + è alto il traliccio, + è alta la tensione (evito archi elettrici tra linea e terreno)

Primo traliccio sono isolatori, ulteriore dielettrico separatore.

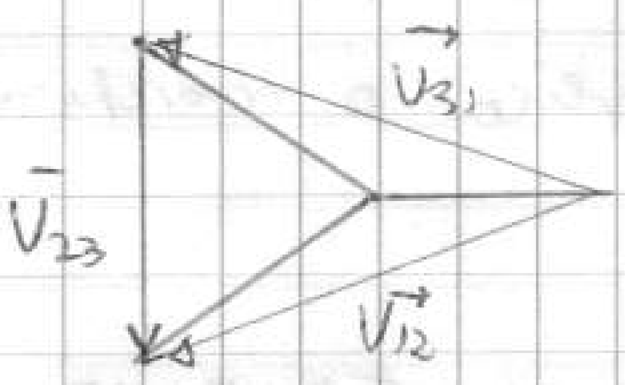
La F. di GUARDIA è collegata a terra; uniformo $\vec{E}$ × impedire buchi nel dielettrico → svolge da "~~parafulmine~~" → "sistema di protezione da scariche atmosferiche".

400kV è la TRASMISSIONE (nazionale); nei centri urbani c'è prima distrib.

132kV è la SUBTRASMISSIONE; a loro volta servono piccole trasmissioni 21 kV.

Poiché centro stella non è accessibile si misura il collegamento ▷ (primo)

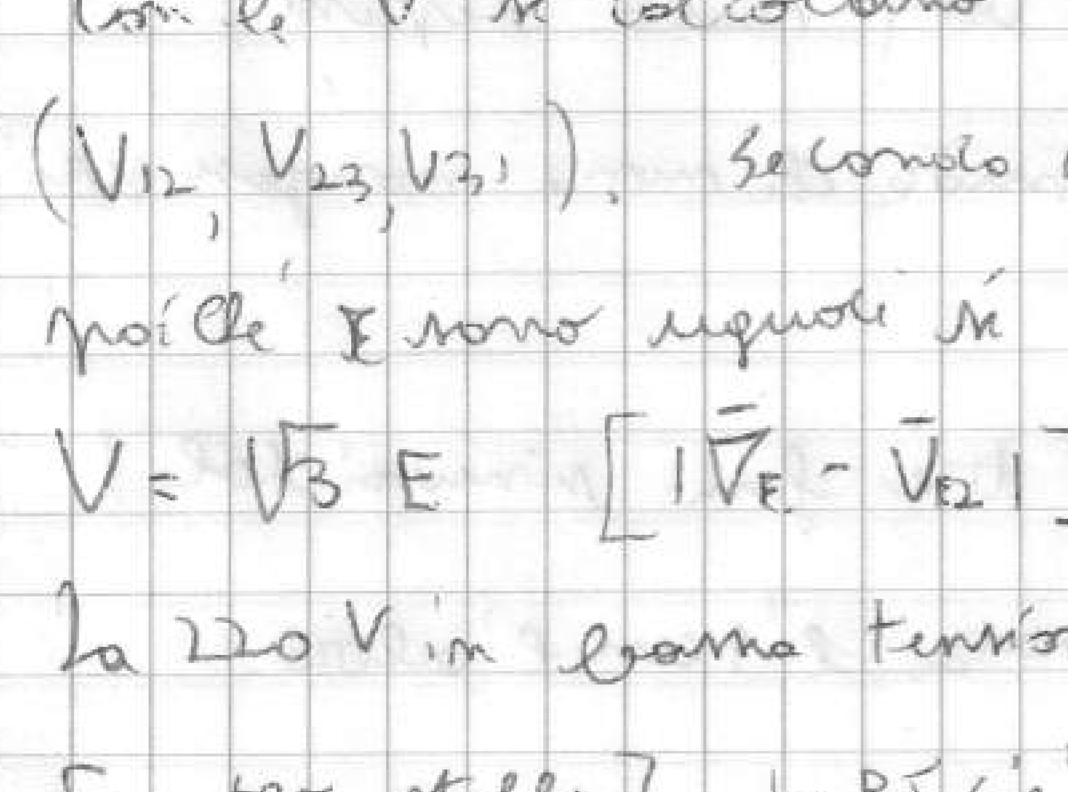
Con le V si calcolano tensioni tra fase a fase → TENSIONI CONCATENATE (V_{12}, V_{23}, V_{31}). Secondo il th. di Cornant e poiché E sono uguali si parla di unica



$V = \sqrt{3}\,E \quad [\,|\bar{V}_{E1} - \bar{V}_{E2}|\,] \to 400V$

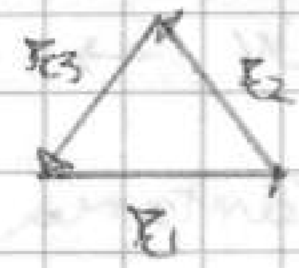
La 220V in bassa tensione oltre ai 3 conduttori è distribuito 4 cond. [centro stella]. In BT c'è 4 cond. NEUTRO. BT è < 1000V a 50 Hz secondo normativa. Il valore nominale $E = \frac{400}{\sqrt{3}} \approx 230$ V [prima c'era altra convenzione e V era 380V → $E \approx 220V$]. Ente erogatore oscilla di circa 10%, potrei avere diversi V.

Ex: apparecchiatura monofase, ho anche centro stella dei



carichi. Quant'è la I nel neutro [si trascurano Z di E]. Ci sarebbe CC tra i due centri. Applichiamo il TH. di Thevenin (neutro e esterno). $Y_{TH} = Y_1 + Y_2 + Y_3$. $V_s = V_{TH}$

V_s = (metodo nodi) ⇒ $(Y_{TH})\bar{V}_s = \sum_{h=1}^{3} Y_h E_h$. Voglio corrente nulla nel neutro. Statisticamente Z_1, Z_2, Z_3 sono uguali ⇒ scrivo

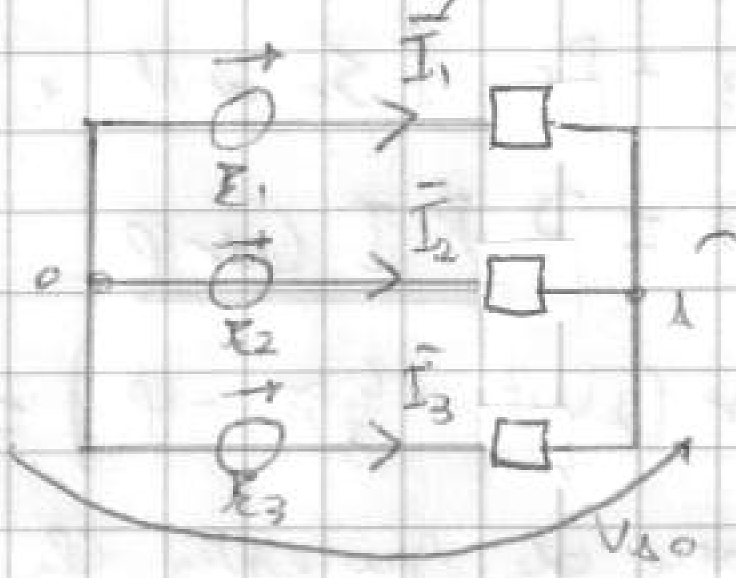
$3\dot{y}\bar{V}_s = \dot{y}\left(\sum_{h=1}^{3}\bar{E}_h\right)$ → poligono forze  ⇒ $= 0$

Se le 3 imp. sono uguali $V_s = 0$ ⇒ TEOREMA dell'UNICITÀ del CENTRO STELLA ↳ $V_{sn} = 0$ ⇒ $I_n = 0$

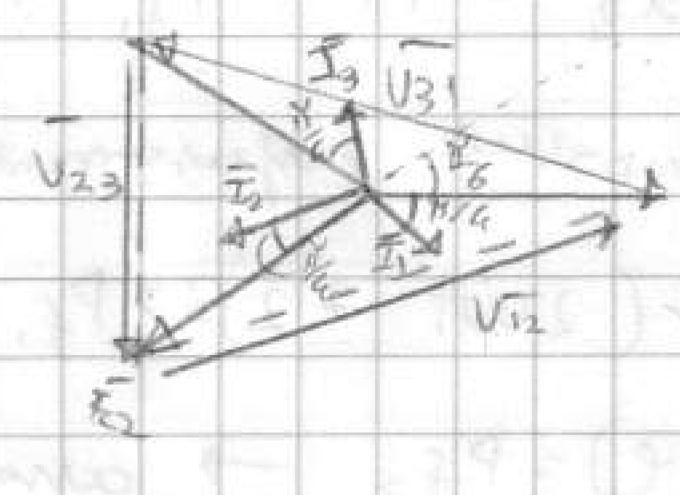
11/11/05

Se V efficace monofase è 220 V si costruisce trifase

$\bar{E}_1 = 220\,V\dot{u}$ gli altri sfasati di $\frac{2}{3}\pi$: $\bar{E}_2 = 220\, e^{-j\frac{2}{3}\pi} V\dot{u}$ $\quad \bar{E}_3 = 220\, e^{-j\frac{4}{3}\pi} V\dot{u}$



con i fasori:



$\bar{V}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2$

$\bar{V}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1$

$\bar{V}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3$

Rappresentare stella sfasata, V_{12} è sfasato di 30° in anticipo su $\bar{E}_1$

Riportando i vettori al centro stella sfasata di 30°.

$\sum_{h=1}^{3} \bar{E}_h = 0$ e $V = \sqrt{3}E$.

Immaginiamo carico equil. a stella $\dot{Z} = 2 + j2\,\Omega$. So che $V_{so} = 0$

[Ż uguali] ↝ risparmio il metodo nodi

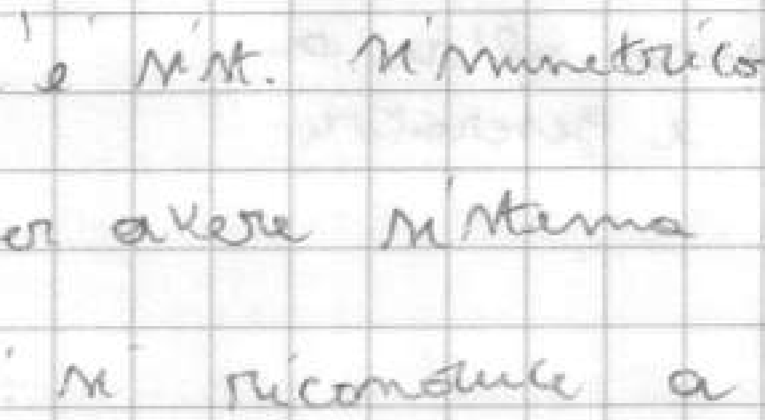
- $\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}} = \dot{y}\bar{E}_1 = \frac{220}{2+j2} = \frac{220}{2\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$
- $\bar{I}_2 = \bar{I}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ → SFASATORI: non alterano modulo ma sfasano

  ↳ $\frac{\bar{E}_2}{2+j2} = \frac{220\, e^{-j\frac{2}{3}\pi}}{2\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$
- $\bar{I}_3$ è sfasata di $\frac{\pi}{4}$ in ritardo su $\bar{E}_3$

C'è sist. simmetrico di correnti ↝ si dice EQUILIBRATO

Per avere sistema simmetrico ed equilibrato devo avere Ż uguale.

Ci si riconduce a schema MONOFASE EQUIVALENTE:



∄ I neutro → simbolo che ci dice che $V_{AO} = 0$ [ci dà calcolo]

Tutte apparecchiature trifase sono costruite x essere simm. e equilibr.

Motore monofase (es. lavatrice) → max 2 kW. L'ascensore è trifase può sprigionare 10 kW → fa meno rumore di motore monofase. Perché?

Se calcolo la p istantanea:

$$\begin{cases} e_1(t) = E\sqrt{2}\sin(\omega t) \\ e_2(t) = E\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \\ e_3(t) = E\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi) \end{cases} \sim \begin{cases} i_1(t) = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t - \varphi) \\ i_2(t) = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi) \\ i_3(t) = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi) \end{cases}$$

qui è $\pi/4$

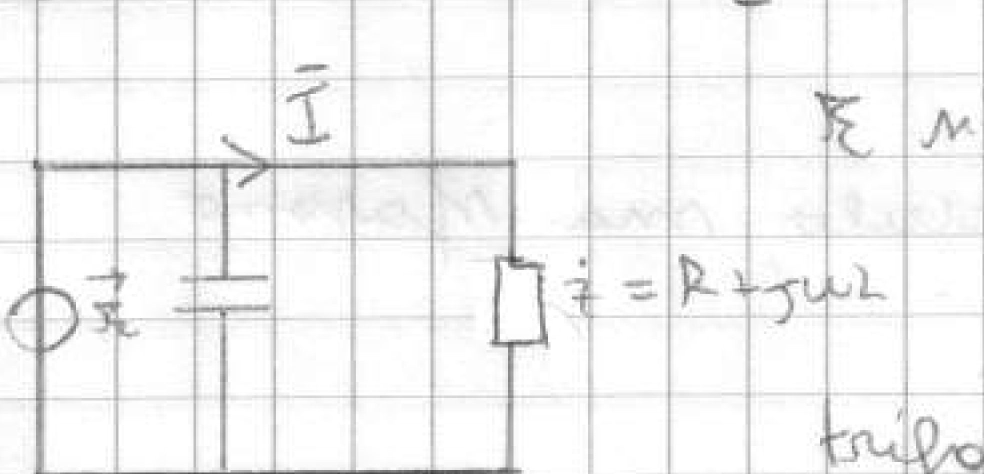
[Th. Millman: p erogata da generatori è assorbita da resistenze]

$p(t) = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3 = P_1 + P_{f_1} + P_2 + P_{f_2} + P_3 + P_{f_3}$ (Se sist. è simm. ed eq. $P_1 = P_2 = P_3$) [moduli e sfasamenti uguali] $\rightarrow = 3EI\cos\varphi$

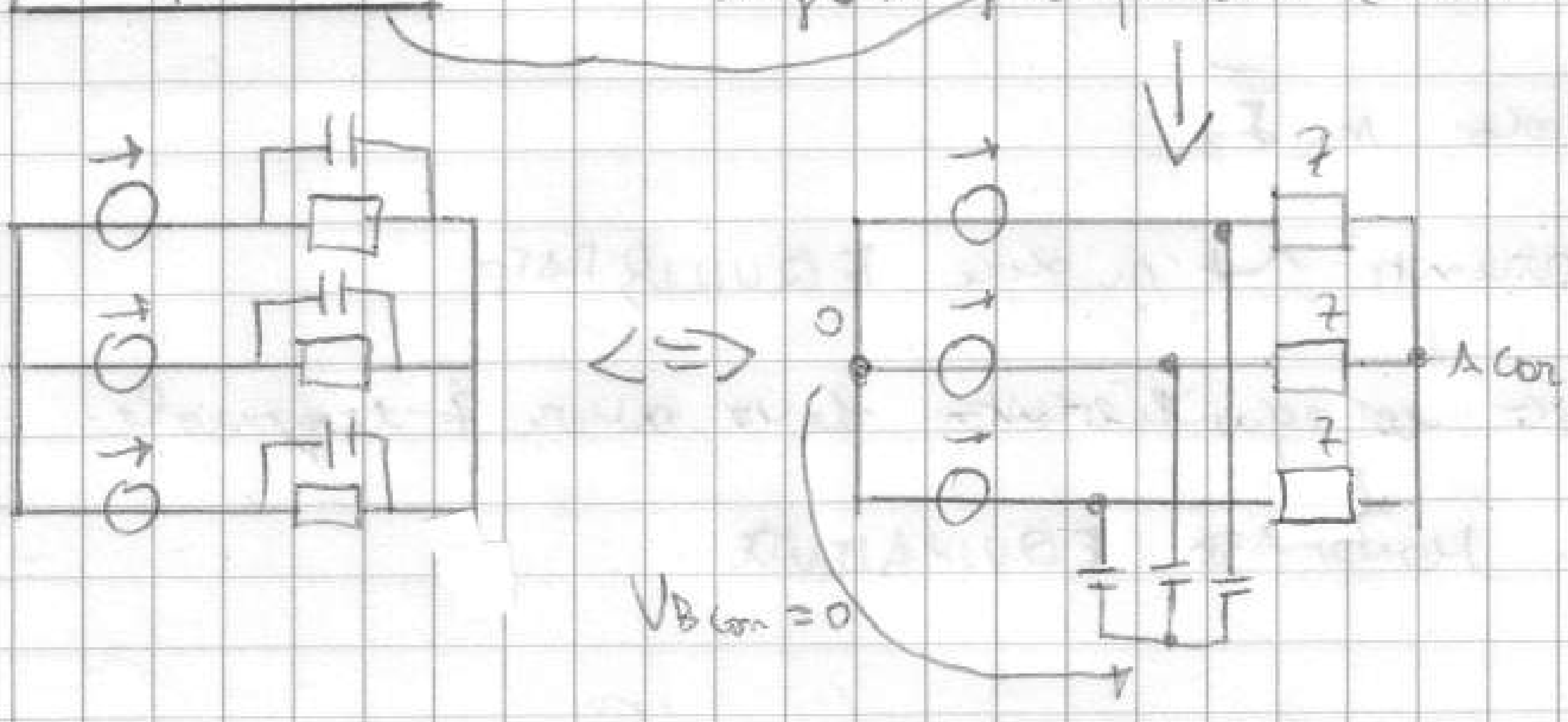
(p fluttuanti: $-EI\cos(2\omega t - \varphi) = P_{f_1}$; $-EI\cos(2\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi) = P_{f_2}$; $-EI\cos(2\omega t - \frac{8}{3}\pi - \varphi) = P_{f_3}$ → anche un fasore di potenza che nulla ha a che vedere con pot. complessa → formano sistema simmetrico $= 0$)

Un sist. trifase simm. ed eq. gode di p istantanea costante. Nel trifase non ho p.f che significa VIBRAZIONE NULLA ⇒ aumento notevolmente la potenza → motore trifase è SILENZIOSO

[$p(t) = \sqrt{3}\, VI \cos\varphi$ → non è sfasamento tra V e I ma tra tensione stellata e corrente di linea]



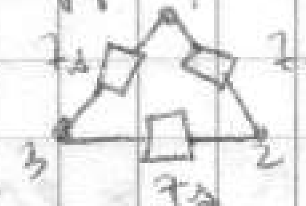
E simula ente erogatore, Z il carico. Se $\bar{I}$ sfasata rifaso con condensatore. Può derivare sist. trifase perché questo è unito centro stella.



(è anche centro stella condensatori oltre a carichi e generatore)

Carichi possono essere collegati a triangolo [gen. vede stessa cosa]

Ho $Z_\Delta = 3\dot{Z}_\lambda$ [soggetto concatenato]. Le monofase si collegano con presa a Z, i motori



. Condensatori sempre collegati a triangolo perché a parità di potenza la capacità è minore e sono economici.

$C_{\lambda} = \dfrac{Q_c}{\omega E_2}$ è il triplo di quella a triangolo [comp. inverso impedenza]

FINE CORSO (11/11/2005)