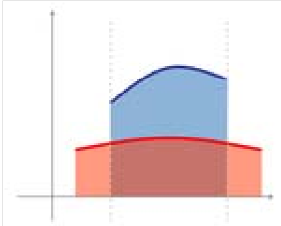
Integrale multiplo

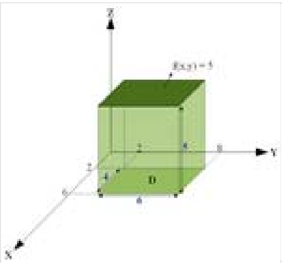
Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.



Integrale come regione sotto una curva

L' **integrale multiplo** è una forma di **integrale** *definito* esteso a funzioni di più variabili reali ($f(x,y)$ o $f(x,y,z)$ ad esempio).

Se concettualmente l'integrale definito per funzioni ad una variabile rappresenta l'area della regione compresa tra la traccia e l'asse delle ordinate, l'integrale per funzioni di due variabili (*integrale doppio*) consiste nella misura dello spazio compreso tra il grafico e il piano contenente il suo dominio, quindi descrivono non più un'area ma un volume di un solido particolare chiamato cilindroide; ciò vale anche considerando gli *integrali tripli* (funzioni a tre variabili) rispetto alla costante *f(x,y,z)=1*. Se il numero delle variabili è superiore si parlerà di "ipervolumi", ovvero di volumi di solidi a più dimensioni, non rappresentabili quindi graficamente.



Integrale multiplo come volume sotto una superficie

Nell'esempio a lato il parallelepipedo dai lati 4x6x5 si può ottenere in due modi:

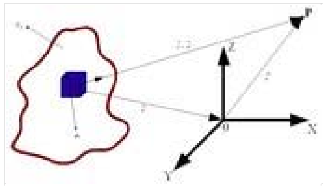
- tramite l'integrale doppio $\iint_D 5\ dxdy$ della funzione *f(x,y) = 5* calcolata nell' "intervallo a due dimensioni" *D* (regione appartenente al piano *xy*)
- tramite l'integrale triplo $\iiint_{parallelepipedo} 1\ dxdydz$ della funzione costante 1 calcolata rispetto all' "intervallo a tre dimensioni" coincidente con il parallelepipedo stesso; in questo caso il volume è calcolato come "somma" di tutti gli elementi infinitesimi che compongono il dominio.

Si parla esclusivamente di integrali definiti in quanto, nel caso di funzioni a più variabili, è impossibile determinare una primitiva dell'argomento dell'integrale e di conseguenza non hanno senso gli integrali indefiniti.

Indice

Alcune applicazioni pratiche

Questi integrali sono utilizzati in numerosi ambiti della fisica.



Calcolo diretto di E - grafico

Nell'elettromagnetismo ad esempio per effettuare il calcolo diretto del campo elettrico (si veda l'immagine in esempio) si applica un *integrale triplo* di una funzione vettoriale:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\|\vec{r} - \vec{r'}\|^3} \rho(\vec{r'}) \mathrm{d}^3 r'$$

Nella meccanica assumono notevole importanza per il calcolo dei momenti di inerzia di particolari solidi rispetto a determinati assi di rotazione, nella determinazione dei centri di massa e nel calcolo dell'attrazione gravitazionale di un disco.

Sono inoltre utilizzati nel calcolo del flusso di campi vettoriali attraverso particolari superfici parametrizzabili.

Definizione matematica

Sia $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ dove $T \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia quindi δ il più grande diametro di una decomposizione *D* su *T*. Allora

$$l = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\ misT_i \in \mathbb{R}$$

è l'**integrale multiplo** di *F* su *T* ($misT_i$ è la misura dell'intervallo infinitesimo del dominio *T*).

Teoremi

Valgono gli stessi teoremi che caratterizzano l'integrale per funzioni ad una variabile, ovvero la linearità, l'additività, il confronto, il valore assoluto oltre al Teorema della media e al Teorema della media pesata.

Teorema della media per gli integrali multipli

Esiste inoltre un teorema per determinare il valore medio di una funzione a più variabili in una regione *D*:

$$\bar{f} = \frac{1}{area\ D} \iint_D f(x,y) dxdy$$

Nelle applicazioni più tecniche, come quelle nel campo dell'ingegneria, ci si riferisce quasi esclusivamente a **integrali doppi** e **tripli** per la tipologia dei problemi analizzati.

Integrale doppio

Dalla definizione generale, nel caso in cui $T \subseteq \mathbb{R}^2$ si ha che

$$l = \iint_T f(x,y) dxdy$$

è l' **integrale doppio** di *F* su *T*.

Integrale triplo

E' immediata l'estensione della definizione all'integrale triplo. Dalla definizione generale, nel caso in cui $T \subseteq \mathbb{R}^3$ si ha che

$$l = \iiint_T f(x, y, z) dxdydz$$

è l' **integrale triplo** di *F* su *T*.

Metodi di integrazione

La risoluzione dei problemi con integrali multipli consiste nella maggior parte dei casi nel riuscire a ricondurre i calcoli ad una serie di integrali ad una variabile, gli unici direttamente risolvibili.

Esame diretto

In alcuni casi particolari è possibile evitare calcoli diretti e ottenere subito il risultato dell'integrazione.

Costanti

Nel caso di integrazioni di funzioni costanti il risultato è immediato; basta moltiplicare la misura del dominio per il valore della costante *n*. Se *n* = 1, in R^2 si avrà il volume del cilindroide ottenuto, mentre in R^3 il suo ipervolume.

Esempio:

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2 \leq x \leq 4 \ ; \ 3 \leq y \leq 6\}$ e $f(x, y) = 2$
integriamo *f* su *D*:
$$\int_2^4 \int_3^6 2 \ dxdy = misD \cdot 2 = (2 \cdot 3) \cdot 2 = 12$$

Sfruttamento delle simmetrie

Nel caso di domini per i quali sono presenti simmetrie dei vari assi e la funzione presenta almeno una disparità per la rispettiva variabile, l'integrale diventa nullo (la somma di quantità uguali e opposte è nulla).

E' sufficiente che - nella funzioni in R^n - sia dispari la variabile dipendente il cui asse sia simmetrico.

Esempio)1):

Sia $f(x, y) = 2 \ \sin(x) - 3 \ y^3 + 5$ e $T = x^2 + y^2 \leq 1$ la regione di integrazione (disco di raggio 1 con centro nell'origine degli assi, frontiera inclusa).
Sfruttando la linearità degli integrali lo si può scomporre in tre parti:
$$\iint_T (2 \ \sin(x) - 3 \ y^3 + 5) \ dx \ dy = \iint_T 2 \ \sin(x) \ dx \ dy - \iint_T 3 \ y^3 \ dx \ dy + \iint_T 5 \ dx \ dy$$
sia $2 \sin(x)$ che $3 y^3$ sono funzioni dispari ed è inoltre evidente come il disco *T* presenti una simmetria sia per l'asse *x* che per l'asse *y*; ne consegue che l'unico contributo al risultato finale dell'integrale è quello della

funzione costante *5* in quanto gli altri due sono nulli.

Esempio (2):

Si consideri la funzione $f(x,y,z) = x\ e^{y^2+z^2}$ e come regione di integrazione la sfera di raggio 2 e centro nell'origine $T = x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.
La "palla" presenta una simmetria per tutti e tre gli assi, ma è sufficiente quella rispetto alla *x*, variabile per la quale la funzione è dispari, per rendere nullo tutto l'integrale.

Formule di riduzione

Le formule di riduzione sfruttano il concetto di dominio semplice in modo che l'integrale multiplo venga scomposto in un prodotto di altri integrali ad una variabile. Questi vanno svolti da destra verso sinistra considerando le altre variabili da non integrare come costanti (stesso procedimento nel calcolo delle derivate parziali).

Domini normali in R2

Asse x

Sia *D* un dominio misurabile normale all'asse *x* e sia $f\,:\,D \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua; siano quindi *α(x)* e *β(x)* (definite in *[a,b]*) le due funzioni che determinano *D*. Allora:

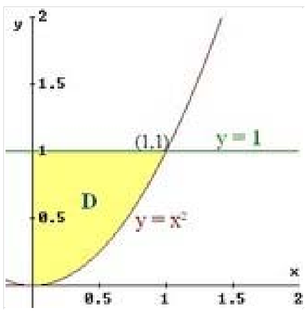
$$\iint_T f(x,y)\ dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\,.$$

Asse y

Sia *D* un dominio misurabile normale all'asse *y* e sia $f\,:\,D \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua; siano quindi *α(y)* e *β(y)* (definite in *[a,b]*) le due funzioni che determinano *D*. Allora:

$$\iint_T f(x,y)\ dxdy = \int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\,.$$

Esempio:



Esempio: regione D per integrale tramite formule di riduzione

Si consideri la regione $D = \{(x,y)\ /\ x = 0, y = 1, y = x^2\}$ (si veda il grafico in esempio). Calcolare

$$\iint_D (x+y)\ dx\ dy\,.$$

Questo dominio è sia normale all'asse x che all'asse y; per poter applicare le formule si devono individuare le funzioni che determinano *D* e l'intervallo di definizione.
In questo caso le due funzioni sono
$\alpha(x) = x^2$ e $\beta(x) = 1$
mentre l'intervallo è dato dall'intersezioni delle funzioni con $x = 0$, e quindi $[a,b] = [0,1]$ (si è scelta la normalità rispetto all'asse x per una miglior comprensione del grafico).

E' ora possibile applicare le formule:

$$\iint_D (x+y)\ dx\ dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (x+y)\ dy = \int_0^1 dx\ [xy\ +\ \frac{y^2}{2}\ ]_{x^2}^1$$

(è stato calcolato per prima il secondo integrale considerando la x come una costante). Le operazioni rimanenti consistono nell'applicazione delle tecniche di integrazione di base:

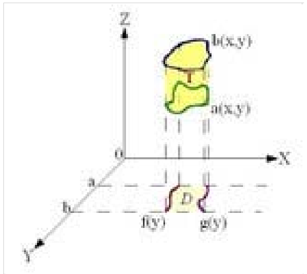
$$\int_0^1 [xy + \frac{y^2}{2}]_{x^2}^1 \, dx = \int_0^1 (x + \frac{1}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}) \, dx = ... = \frac{7}{10}.$$

Se si fosse scelta la normalità rispetto all'asse y si sarebbe potuto calcolare

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} (x+y) \, dx$$

ottenendo lo stesso risultato.

Domini normali in R3



Esempio di dominio normale in R3 (piano xy)

E' immediata l'estensione dell'applicazione delle formule per gli integrali tripli.

Sia *T* un dominio normale al piano *xy* relativamente alle funzioni *α (x,y,z)* e *β (x,y,z)* .
Allora:

$$\iiint_T f(x,y,z) \, dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\alpha(x,y,z)}^{\beta(x,y,z)} f(x,y,z) \, dz.$$

(la definizione è analoga per gli altri 5 casi di normalità in R3).

Cambio di variabili

Molto spesso a causa di domini non facilmente interpretabili (senza normalità o con formule complesse da integrare) si ricorre ad un cambio di variabili per aggirare il problema e integrare funzioni note su regioni "comode", ovvero descrivibili in maniera più semplice tramite formule. Ne consegue quindi che:

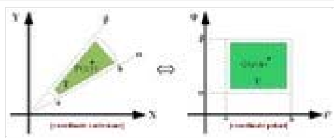
- La funzione deve essere trasformata a seconda del nuovo valore attribuito alle variabili.

  Esempio (1-a):
  Sia $f(x,y) = (x-1)^2 + \sqrt{y}$;
  se si imposta $x' = x - 1, \; y = y'$ quindi $x = x' + 1, \; y = y'$ si ottiene la nuova funzione $f(x,y)_2 = x'^2 + \sqrt{y}.$

- Idem per il dominio in quanto esso è delimitato da funzioni dipendenti sempre dalle variabili originarie alle quali abbiamo applicato la trasformazione (*x* e *y* ad esempio).
- I differenziali (*dx* e *dy* ad esempio) dipendono dal determinante della matrice jacobiana contenente le derivate parziali delle trasformazioni rispetto alle nuove variabili (si veda come esempio il differenziale della trasformazione in coordinate polari).

Esistono tre principali "generi" di cambio di variabili (una in *R2*, due in *R3*), tuttavia è possibile giostrare con questo metodo in modo da operare la sostituzione che più si ritiene effiace.

Coordinate polari


Passaggio da coordinate cartesiane a polari

In *R2* se il dominio sul quale si deve integrare presenta una "simmetria" circolare (ovvero descrive corone circolari) e la funzione abbia delle caratteristiche "particolari" (si mostrerà meglio in seguito) si può applicare il *passaggio in coordinate polari* (vedi esempio in figura), ovvero vengono trasformati i generici punti *P(x,y)* in coordinate cartesiane nei rispettivi punti in coordinate polari. Ciò permette di cambiare la "forma" del dominio e semplificare la funzione per rendere più semplici e immediati i calcoli.

La relazione fondamentale per effettuare la trasformazione della funzione è la seguente:

$$f(x,y) \rightarrow f(\rho \, \cos\phi, \rho \, \sin\phi)$$

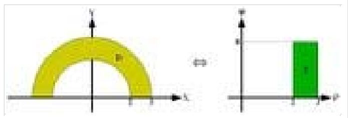
Esempio (2-a):

Se $f(x,y) = x + y$
applicando la trasformazione si ottiene
$f(\rho, \phi) = \rho \cos\phi + \rho \sin\phi = \rho\ (\cos\phi + \sin\phi)$.

Esempio (2-b):

Se $f(x,y) = x^2 + y^2$
Si ottiene in questo caso
$f(\rho, \phi) = \rho^2 (\cos\phi^2 + \sin\phi^2) = \rho^2$
sfruttando la prima relazione fondamentale della trigonometria (molto utile per la semplificazione di questi calcoli).

La trasformazione del dominio avviene esplicitando la lunghezza dei raggi della corona e l'ampiezza dell'angolo descritto per definire gli intervalli *ρ*, *φ* a partire da quelli *x*, *y*.


Esempio trasformazione dominio da cartesiano a polare

Esempio (2-c):

Sia $D = x^2 + y^2 \leq 4$, ovvero una circonferenza di raggio *2*; è evidente che l'angolo descritto è l'angolo giro, quindi *φ* varierà da *0* a *2π*, mentre il raggio della corona va da *0* a *2* (la corona con raggio interno nullo è proprio un cerchio) e *ρ* varierà da *0* a *2*.

Esempio (2-d):

Sia $D = \{x^2 + y^2 \leq 9,\ x^2 + y^2 \geq 4,\ y \geq 0\}$ ovvero la corona circolare nel semipiano delle *y* positive (si veda la figura in esempio); si nota che *φ* descrive un angolo piatto mentre *ρ* varia da *2* a *3*. Di conseguenza il dominio trasformato sarà il seguente rettangolo: $T = \{2 \leq \rho \leq 3,\ 0 \leq \phi \leq \pi\}$.

Il determinante jacobiano di questa trasformazione è il seguente:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi \end{vmatrix} = \rho$$

ottenuto inserendo le derivate parziali di *x = ρ cos(φ)*, *y = ρ sin(φ)* nella prima colonna rispetto a *ρ* e nella seconda rispetto a *φ* .

I differenziali *dx dy* nella trasformazione di coordinate diventano così *ρ dρ dφ*.

Una volta trasformata la funzione e valutato il dominio, si può definire la formula per il cambio di variabili in coordinate polari:

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \iint_T f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\rho\ d\rho d\phi$$

Si noti come *φ* è valido nell'intervallo *[0, 2π]* mentre *ρ*, essendo la misura di una lunghezza, può avere esclusivamente valori positivi.

Esempio (2-e):

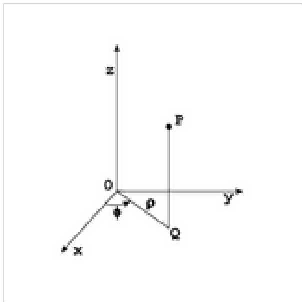
Sia $f(x,y) = x$ e il dominio lo stesso dell'esempio 2-d.
Dall'analisi di D precedentemente effettuata sono già noti gli intervalli di ρ (da 2 a 3) e φ (da 0 a π). Si muti ora la funzione:
$f(x,y) = x \longrightarrow f(\rho, \phi) = \rho \ \cos\phi$;
infine si applichi la formula per l'integrazione:
$$\iint_D x \ dxdy = \iint_T \rho\cos\phi \ \rho \ d\rho d\phi \, .$$
Una volta noti gli intervalli si ha
$$\int_0^\pi \int_2^3 \rho^2 \cos\phi \ d\phi \ d\rho = \int_0^\pi \cos\phi \ d\phi \ [\frac{\rho^3}{3}]_2^3 = [\sin\phi]_0^\pi \ (9 - \frac{8}{3}) = 0 \, .$$

Coordinate cilindriche

In R_3 l'integrazione su domini aventi una base circolare può avvenire tramite il passaggio in *coordinate cilindriche*; la trasformazione della funzione si effettua con la seguente relazione:

$$f(x,y,z) \rightarrow f(\rho \ \cos\phi, \rho \ \sin\phi, z)$$

La trasformazione del dominio non è difficile in quanto graficamente varia solo la forma della base mentre lo sviluppo tridimensionale segue quello della regione di partenza.



Coordinate cilindriche

Esempio (3-a):

Sia $D = \{x^2 + y^2 \leq 9, \ x^2 + y^2 \geq 4, \ 0 \leq z \leq 5\}$ (ovvero il "tubo" avente come corona circolare di base la regione nell'esempio 2-d e come altezza 5); applicando la trasformazione si ottiene la regione $T = \{2 \leq \rho \leq 3, \ 0 \leq \phi \leq \pi, \ 0 \leq z \leq 5\}$ (ovvero il parallelepipedo con base il rettangolo nell'esempio 2-d e altezza 5).

Poichè la componente z rimane invariata nella trasformazione, i differenziali $dx \ dy \ dz$ variano come nel passaggio in coordinate polari, ovvero diventano $\rho \ d\rho \ d\varphi \ dz$.

Si può quindi applicare la formula finale per il passaggio in coordinate cilindriche:

$$\iiint_D f(x,y,z) \ dxdydz = \iiint_T f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)\rho \ d\rho d\phi dz$$

E' consigliabile utilizzare questo metodo nel caso di domini cilindrici, conici, o comunque regioni per le quali è comodo sia delimitare l'intervallo delle z che trasformare la base circolare e la funzione.

Esempio (3-b):

Sia $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ con dominio d'integrazione il cilindro
$D = \{x^2 + y^2 \leq 9, \ -5 \leq z \leq 5\}$.
La trasformazione di D in coordinate cilindriche è la seguente:
$T = \{0 \leq \rho \leq 3, \ 0 \leq \phi \leq 2\pi, \ -5 \leq z \leq 5\}$
mentre la funzione diventa
$f(\rho \ \cos\phi, \rho \ \sin\phi, z) = \rho^2 + z$
Si applica infine la formula di integrazione:
$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z) \ dxdydz = \iiint_T (\rho^2 + z) \ \rho \ d\rho d\phi dz \, ;$$

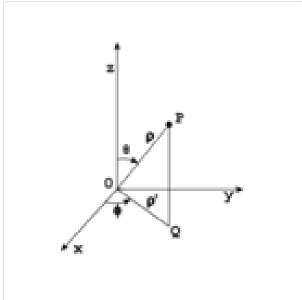
esplicitando la formula si ha

$$\int_{-5}^{5} dz \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{3} (\rho^3 + \rho z) d\rho = 2\pi \int_{-5}^{5} [\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2 z}{2}]_0^3 \ dz =$$

$$= 2\pi \int_{-5}^{5} (\frac{81}{4} + \frac{9}{2} z) dz = \ldots = 2\pi (\frac{405}{2} + 225).$$

Coordinate sferiche

In R_3 alcuni domini presentano una simmetria sferica, ovvero è possibile determinare le coordinate di ogni punto appartenente alla regione di integrazione tramite due angoli e una distanza. Si può sfruttare, quindi, il *passaggio in coordinate sferiche*; la funzione viene trasformata tramite la seguente relazione:



Coordinate sferiche

$$f(x, y, z) \longrightarrow f(\rho \sin\theta \cos\phi, \rho \sin\theta \sin\phi, \rho \cos\theta)$$

Si noti che i punti appartenenti all'asse z non hanno caratterizzazione unica in coordinate sferiche, quindi θ può variare da 0 a π .

Il dominio di integrazione che meglio si adatta a questo passaggio è ovviamente la sfera.

<u>Esempio (4-a)</u>:

Sia $D = x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ (sfera di raggio 4 e centro nell'origine); tramite la trasformazione si ottiene la regione $T = \{0 \leq \rho \leq 4, \ 0 \leq \phi \leq 2\pi, \ 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

Il determinante jacobiano di questa trasformazione è il seguente:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \rho\cos\theta\cos\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\theta$$

I differenziali $dx\ dy\ dz$ vengono quindi trasformati in $\rho^2 \sin(\theta)\ d\rho\ d\theta\ d\varphi$.

Si ricava infine la formula finale di integrazione:

$$\iiint_D f(x, y, z)\ dxdydz = \iiint_T f(\rho \sin\theta \cos\phi, \rho \sin\theta \sin\phi, \rho \cos\theta) \rho^2 \sin\theta\ d\rho d\theta d\phi$$

E' consigliabile utilizzare questo metodo nel caso di domini sferici **e** funzioni facilmente semplificabili tramite la prima relazione fondamentale della trigonometria estesa in R_3 (si veda l'esempio 4-b); negli altri casi è spesso consigliato ricorrere al passaggio in coordinate cilindriche (si veda l'esempio 4-c).

<u>Esempio (4-b)</u>:

Sia D la stessa regione dell'esempio 4-a ed $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
La trasformazione della funzione è molto semplice:
$f(\rho \sin\theta \cos\phi, \rho \sin\theta \sin\phi, \rho \cos\theta) = \rho^2$
mentre del dominio già conosciamo gli intervalli della regione trasformata in T:
$(0 \leq \rho \leq 4, \ 0 \leq \phi \leq 2\pi, \ 0 \leq \theta \leq \pi)$.
Si applica quindi la formula d'integrazione:

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\ dxdydz = \iiint_T \rho^2\ \rho^2 \sin\theta\ d\rho d\theta d\phi \ ;$$

sviluppando si ha

$$\iiint_T \rho^4 \sin\theta\ d\rho d\theta d\phi = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^4 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \int_0^\pi \sin\theta [\frac{\rho^5}{5}]_0^4\ d\theta =$$

$$= 2\pi\ [\frac{\rho^5}{5}]_0^4\ [-\cos\theta]_0^\pi = 4\pi \cdot \frac{1024}{5} = \frac{4096\pi}{5}.$$

Esempio (4-c):

Sia D la palla di centro 0 e raggio a ($D = x^2 + y^2 + z^2 \leq 9a^2$) ed $f(x,y,z) = x^2 + y^2$.
Analizzando il dominio potrebbe sembrare conveniente adottare il passaggio in coordinate sferiche, infatti gli intervalli delle variabili che delimitano la nuova regione T sono immediati:

$0 \leq \rho \leq 3a,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi$.

Tuttavia trasformando la funzione si ottiene

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 \longrightarrow \rho^2 \sin^2\theta \cos^2\phi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\phi = \rho^2 \sin^2\theta$.

Applicando la formula per l'integrazione si otterrebbe

$$\iiint_T \rho^2 \sin^2\theta \rho^2 \sin\theta\ d\rho d\theta d\phi = \iiint_T \rho^4 \sin^3\theta\ d\rho d\theta d\phi$$

molto complicato da svolgere. Il problema si risolve utilizzando il passaggio in coordinate cilindriche. I nuovi intervalli di T diventano

$0 \leq \rho \leq 3a,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ -\sqrt{9a^2 - \rho^2} \leq z \leq \sqrt{9a^2 - \rho^2}$;

l'intervallo delle z è stato ottenuto dividendo la palla in due semisfere semplicemente risolvendo la disequazione della definizione di D (e trasformando direttamente $x^2 + y^2$ in ρ^2). La nuova funzione è semplicemente ρ^2.
Applicando quindi la formula di integrazione si ha

$$\iiint_T \rho^2 \rho\ d\rho d\phi dz.$$

Sviluppando si ottiene

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{3a} \rho^3 d\rho \int_{-\sqrt{9a^2-\rho^2}}^{\sqrt{9a^2-\rho^2}} dz = 2\pi \int_0^{3a} 2\rho^3 \sqrt{9a^2 - \rho^2}\ d\rho.$$

Si applica ora la trasformazione

$$9a^2 - \rho^2 = t \longrightarrow dt = -2\rho d\rho \longrightarrow d\rho = \frac{dt}{-2\rho}$$

(gli intervalli diventano $0, 3a \longrightarrow 9a^2, 0$). Si ha

$$-2\pi \int_{9a^2}^0 \rho^2 \sqrt{t} dt;$$

dato che $\rho^2 = 9a^2 - t$, si ricava

$$-2\pi \int_{9a^2}^0 (9a^2 - t)\sqrt{t} dt;$$

invertendo gli estremi d'integrazione e moltiplicando i termini tra parentesi l'integrale si può scomporre in due parti direttamente risolvibili: $2\pi[\int_0^{9a^2} 9a^2\sqrt{t}\ dt - \int_0^{9a^2} t\sqrt{t}\ dt] = 2\pi[9a^2\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}]_0^{9a^2} =$

$$= 2 \cdot 27\pi a^5 (6 - \frac{2}{5}) = 54\pi \frac{28}{5} a^5 = \frac{1512\pi}{5} a^5.$$

Applicando il passaggio in coordinate cilindriche si è riusciti a ricondurre l'integrale triplo ad un'integrale ad una variabile più facilmente risolvibile grazie a calcoli molto meno complessi.

Esempio di applicazioni matematiche - Calcoli di volume

Grazie ai metodi precedentemente descritti è possibile dimostrare il valore del volume di alcuni solidi.

- **Cilindro**

  Considerando come dominio la base circolare di raggio *R* e come funzione la costante dell'altezza *h*, si applica direttamente il passaggio in coordinate polari.
  $$Volume = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{r} h\rho \, d\rho = h2\pi[\frac{\rho^2}{2}]_0^R = \pi R^2 h$$
  Verifica: Volume = area di base * altezza = $\pi R^2 \cdot h$

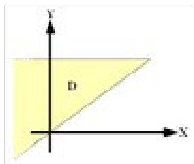
- **Sfera**

  E' di rapida dimostrazione la formula applicando il passaggio in coordinate sferiche della funzione costante *1* integrato sulla sfera di raggio *R* stessa.
  $$Volume = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{R} \rho^2 d\rho = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta \frac{R^3}{3} d\theta = \frac{2}{3}\pi R^3[-\cos\theta]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

- **Tetraedro** (piramide a base triangolare o 3-simplesso)

  Il volume del tetraedro con vertice nell'origine e spigoli di lunghezza *l* adagiati sui tre assi cartesiani può essere calcolato tramite le formule di riduzione considerando, ad esempio, la normalità rispetto al piano *xy* e all'asse *x* e come funzione la costante *1*.
  $$Volume = \int_0^{l} dx \int_0^{l-x} dy \int_0^{l-x-y} dz = \int_0^{l} dx \int_0^{l-x} (l-x-y)dy =$$
  $$\int_0^{l} (l^2 - 2lx + x^2 - \frac{(l-x)^2}{2})dx = l^3 - ll^2 + \frac{l^3}{3} - [\frac{l^2}{2} - lx + \frac{x^2}{2}]_0^l =$$
  $$= \frac{l^3}{3} - \frac{l^3}{6} = \frac{l^3}{6}$$
  Verifica: Volume = area di base * altezza / 3 = $\frac{l^2}{2} \cdot l/3 = \frac{l^3}{6}$

Integrale multiplo improprio



Esempio di dominio improprio

Nel caso di domini illimitati o integrandi illimitati presso qualche parte della frontiera del dominio si parla di **integrale doppio improprio** o **integrale triplo improprio**.

Se una funzione è non negativa ($f(x,y) \geq 0$) l'integrale o converge o diverge all'infinito.

Voci correlate

- Integrale
- Principali teoremi dell'analisi che sfruttano gli integrali multipli
  - Teorema della divergenza
  - Teorema di Stokes
  - Teorema di Green

Bibliografia

Fonti verificate su: Robert A. Adams - Calcolo differenziale 2, Funzioni di più variabili ISBN 8840810242