DINAMICA DELLE STRUTTURE - Prof. M. Lemeo - 28/4/08 : 30/5/08

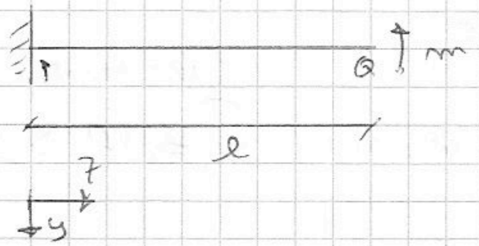
DINAMICA DELLE STRUTTURE 28/4/08

Studio del moto delle strutt. dell'ing. civile, ovvero telai di travi. Si usano i risultati x l'analisi sismica. Si usano modelli (sistemi materiali)

RICHIAMI DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

In trave inflessa $M(z) = -EI\,v''(z)$ ci vogliono 2 cond. da associare (ex. v e v') con $v'(z) = -\varphi(z)$ (rapporto rotazione).

- Valori notevoli di v e φ. Iniziamo da mensola:



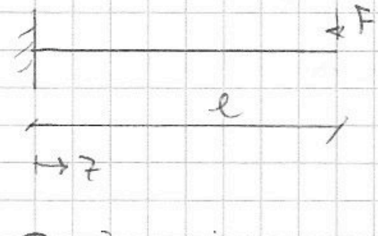
$M(z) = m \rightarrow v''(z) = -m/EI$

quindi $v(z) = -\dfrac{m}{EI}\dfrac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$

Imponiamo $v(0) = v'(0) = 0$ e si ha $C_1 = C_2 = 0$.

$\varphi_z = \dfrac{mz}{EI}$, $v(l) = -\dfrac{ml^2}{2EI}$ (valori da sapere)

- Mensola con forza all'estremo



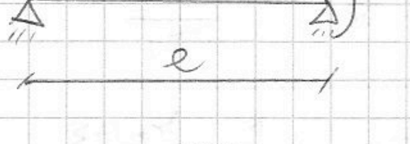
$M(z) = -F(l-z)$

$v''(z) = \dfrac{F}{EI}(l-z)$. Anche qui $v(0) = v'(0) = 0$ $((C_1 = C_2 = 0))$

Quindi $v(l) = \dfrac{Fl^3}{3EI}$, $\varphi_a = -\dfrac{Fl^2}{2EI}$

Valori molto ricorrenti.

- Trave con 2 appoggi e momenti



$\rightarrow$ (se $\nexists$ az. orizzontali si chiamano indifferentemente appoggi)

$M(z) = \dfrac{m}{l}z$; $v''(z) = -\dfrac{m}{EI}\dfrac{z}{l}$; $v\left(\dfrac{l}{2}\right) = \dfrac{ml^2}{16EI}$

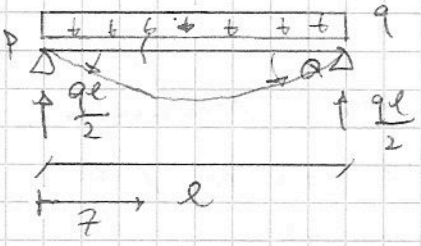
Qui $v(0)=0$ e $v(\ell)=0$

Non possiamo mai imporre cond. del 2° ordine essendo eq. del 2° ordine (ex. $M=0$ in 0.)

Vogliamo la rot. nei 2 estremi:

$$v(0) = -\frac{mL}{6EI}, \quad v(\ell) = \frac{mL}{3EI}$$

- Trave con carico uniforme



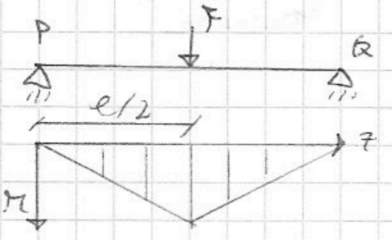
$$M(z) = \frac{q\ell}{2} z - q\frac{z^2}{2}$$

$$v(0) = v(\ell) = 0$$

Convenz.: $\Rightarrow \varphi > 0$

$$\varphi_P = -\frac{q\ell^3}{24EI}, \quad \varphi_Q = \frac{q\ell^3}{24EI},$$

- Trave con forza in mezzeria



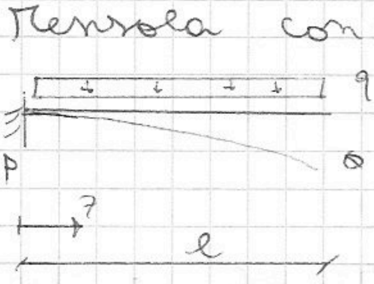
Sfruttiamo simmetria, rotaz. in mezzeria è nulla.

Per $0 \le z \le \ell/2$, $M(z) = \frac{F}{2} \cdot z$

$$v'\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \quad e \quad v(0) = 0$$

$$\varphi_P = -\varphi_Q = -\frac{F\ell^2}{16EI}, \quad v\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{F\ell^3}{48EI}$$

- Mensola con carico uniforme



$$M(z) = -\frac{q}{2}(\ell - z)^2$$

$$v(0) = v'(0) = 0$$

$$v_Q = \frac{qL^4}{8EI}, \quad \varphi_Q = -\frac{qL^3}{6EI}$$

Si può usare anche l'ANALOGIA DI MOHR:

Note le relazioni della trave:

$$\frac{dT}{dz} = q \rightsquigarrow \frac{dM}{dz} = T \Rightarrow \frac{d^2M}{dz^2} = -q$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI} \rightsquigarrow \frac{dv}{dz} = -\varphi \Rightarrow \frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI}$$

Si pone $M^* = v$ e $q^* = \frac{M}{EI}$. Quindi

$$\boxed{\frac{d^2M^*}{dz^2} = -q^*}$$

(spost. coincide con appl. carico fittizio

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI}$$

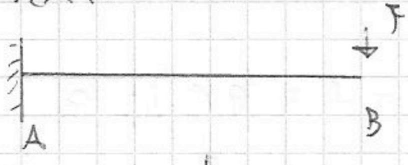
Si pone anche qui $\varphi = -T^*$, allora

$$\boxed{\frac{dT^*}{dz} = -q^*}$$

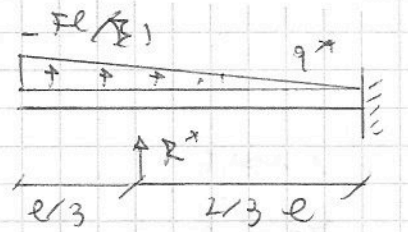
Per v e φ quindi possiamo cons. equilibrio, come se calcolassimo M e T.

La trave di calcolo sarà una trave ausiliaria

Ex:



diventa



Si sostituiscono i vincoli.

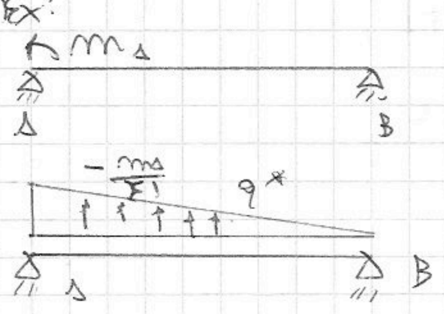
$v_A = \varphi_A = 0 \Rightarrow M_A^* = T_A^* = 0$, ovvero ho l'ESTREMO LIBERO.

In B ho $M_B^* \neq T_B^* \neq 0$, quindi si ha INCASTRO

$R^* = \frac{Fl^2}{2EI}$ (risult. carico triangolare)

$v_B = \frac{Fl^3}{3EI}$, $\varphi_B = -\frac{Fl^2}{2EI}$

Ex:



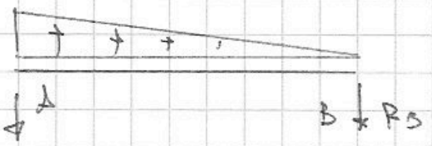
$v_A = 0,\ \varphi_A \neq 0 \Rightarrow M_A^* = 0,\ T_A^* \neq 0$

$v_B = 0,\ \varphi_B \neq 0 \Rightarrow M_B^* = 0,\ T_B^* \neq 0$

Ho sempre appoggio.

Uso la risultante R^*.

Se ho:



per convenzione per def. di caratt. di sollecitazione

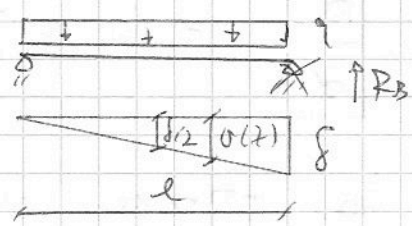
$T = -R_A \qquad T = R_B$

Si può usare anche il PRINCIPIO dei LAVORI VIRTUALI per i SISTEMI RIGIDI.

$L_{ve} = 0.$

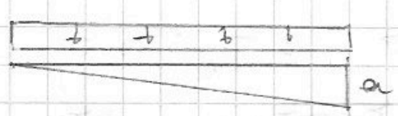
Sostituisco al vincolo la sua reazione e imprimo li uno spost. virtuale da questo reso possibile. Imprimo rotaz. alla trave.

$L_{ve} = L_q + L_{R_B} = ql\,\frac{\delta}{2} + R_B\,\delta = 0$



Ricavo $R_B = -\frac{1}{\delta}\,ql\,\frac{\delta}{2} = -\frac{ql}{2}$

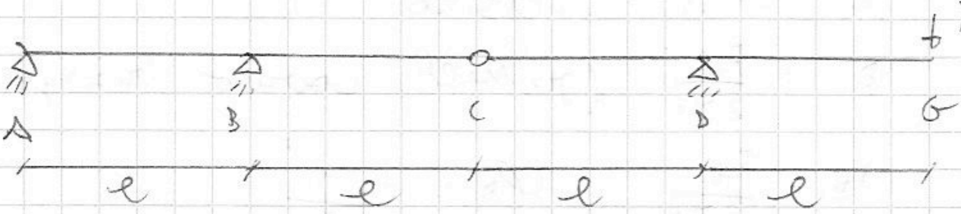
(ip. piccoli spostamenti)



$L = \int q v = q \int v = q\,\frac{1}{2}\,a\,l = (ql)\,\frac{1}{2}\,a$

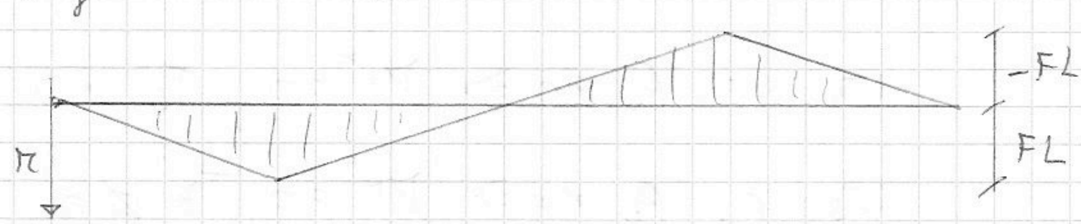
risultante · mezzo spostamento

Es:



(isost. e rettilinea)

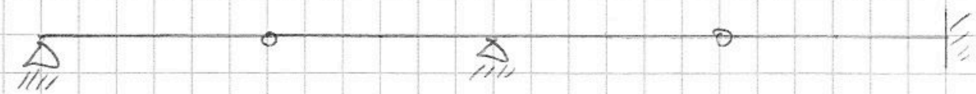
Vogliamo v_G.



$M_B^{*\,G} = M_B^{*\,d} = 0 \quad ; \quad M_C^{*\,S} = M_C^{*\,d} \neq 0$

$T_B^{*\,G} = T_B^{*\,d} = 0 \quad , \quad T_C^{*\,S} = T_C^{*\,d}$

Trave ausiliaria:



q^* segue andamento M

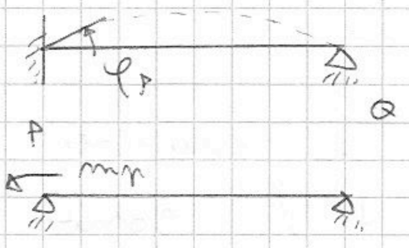
Usiamo PLV introducendo cerniera in G

29/4/2008

Strutture iperstatiche

Metodo forze adatto x grado di iperstaticità bassi. In dinamica perlopiù metodo degli spostamenti.

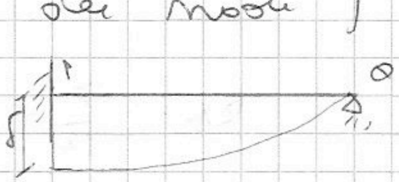
M. f. : si sostituisce vincolo soppresso con sua reazione in modo da garantire congruenza, semplice una volta noti gli spost. notevoli; si usa sempre principio di sovrapposizione eff.



Ex: cedimento angolare imposto φ_P

Questa volta congruenza impone che m_P deve far ruotare di φ_P ovvero $\varphi_P^{m} = \varphi_P$

Ci interessano i CEDIMENTI dei vincoli (spostamento dei nodi)

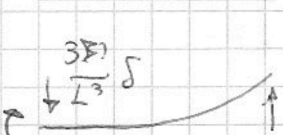


→ δ provoca rot. rigida

R_P è ovviamente concorde con δ.

Infatti possiamo pensare a trave libera e imponiamo condizioni

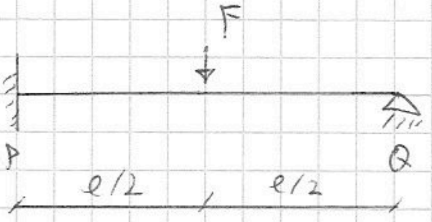
$EI\, v^{IV} = 0$; $v(0) = \delta$; $v'(0) = 0$; $v(l) = 0$



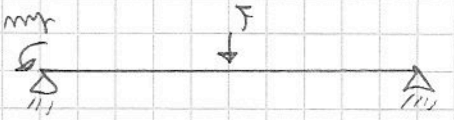
Questo è il sistema di azioni in equilibrio.

Possiamo infatti assegnare F e trovare δ stessi risultati!

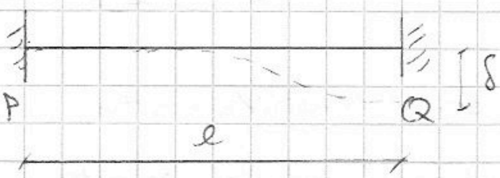
Ex:



$$m_p = \frac{6}{32}FL \quad > \quad M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{32}Fl$$



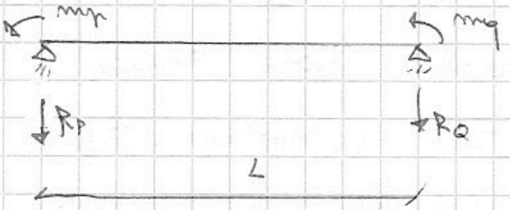
Metodo degli spost. indispensabile per travi con 2 inc.

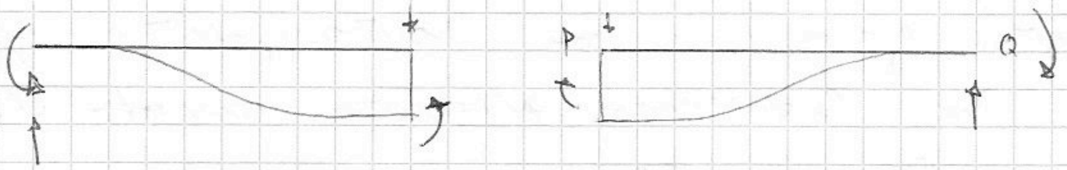


Si scrivono 2 eq. compr.

$$m_p = m_q = \frac{6EI}{L^2}\delta$$

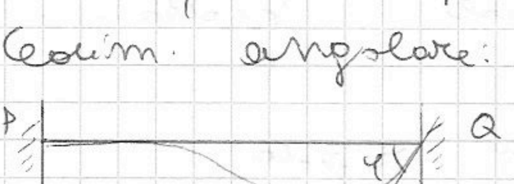
$$R_Q = -R_P = \frac{12EI}{L^3}$$



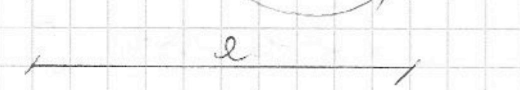


Le incognite si assumono POSITIVE (e quindi ad ex. le reazioni le disegni ↓ ↓), sono le eq. che poi danno i versi!

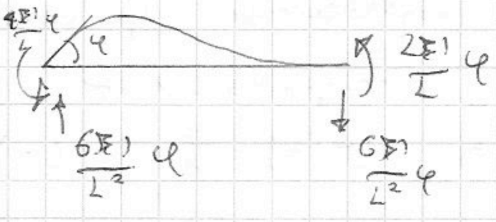
Cedim. angolare:

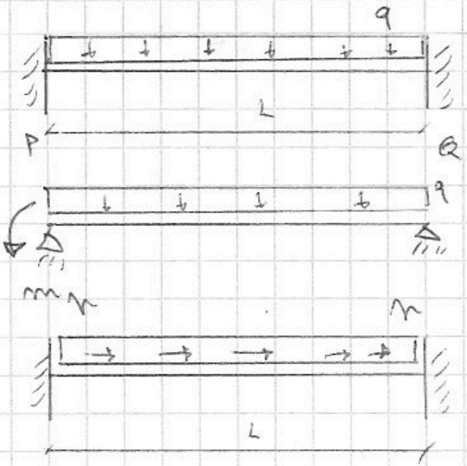


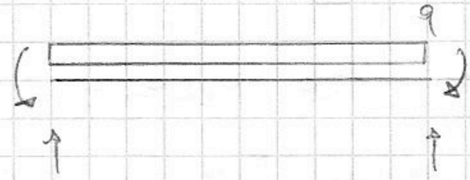
$$m_p = \frac{m_q}{2} = \frac{2EI}{L}\varphi \quad ; \quad R_Q = \frac{6EI}{L^2}\varphi$$



Se:

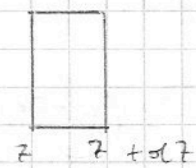






Equilibrio

Cons:



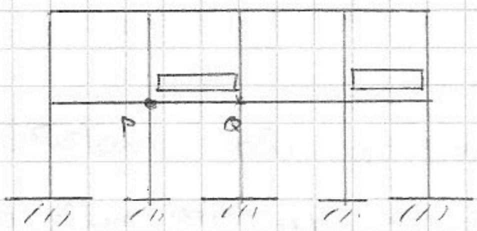
Concio di trave $\rightarrow \dfrac{N}{EA}\, dz =$

$$= dl = w(z+dz) - w(z) \simeq dw$$

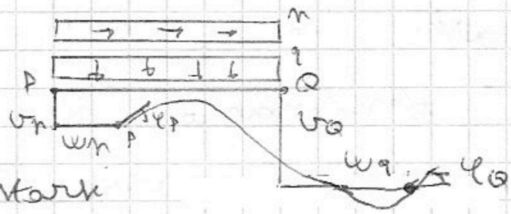
Qui $N = p(l - z)$ [risultante del carico orizzontale]

Usiamo $\boxed{EA\, w' = N}$

Cons:

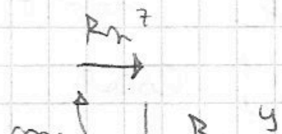


Telaio generico ed estraiamo asta:



Ogni nodo potrà spostarsi e ruotare

Possiamo sostituire forze:



- $R_p^y = -\dfrac{qL}{2} - \dfrac{6EI}{L^2}\varphi_P - \dfrac{6EI}{L^2}\varphi_Q + \dfrac{12EI}{L^3} v_p - \dfrac{12EI}{L^3} v_q$

(sovrapp. effetti presi singolarmente)

- $m_p = \dfrac{qL^2}{12} + \dfrac{4EI}{L}\varphi_P + \dfrac{2EI}{L}\varphi_Q - \dfrac{6EI}{L^2} v_p + \dfrac{6EI}{L^2} v_Q$

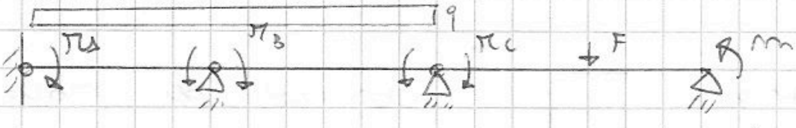
- $R_p^z = \dfrac{EA}{L} w_p - \dfrac{EA}{L} w_Q - \dfrac{pl}{2}$

Il problema è proprio determinare gli spostamenti.

Imponiamo eq. al nodo (ΣF_e = reaz.)

EQUAZIONE DEI TRE MOMENTI

Trave continua. Ris. con m. forze.



Inc. i m sugli appoggi intermedi.
Coppia: az. esterna, Π e caratt. sollecitazione
Si impongono le eq. di congruenza.
In ogni eq. di cong. appaiono solo 3 incognite, 3 mom al massimo (pur avendo trave lunga con tanti appoggi)

Metodo degli spostamenti.
Telaio con aste e nodi. Conviene la notazione matriciale. Si considerano le reazioni dei nodi sulle aste, e si chiede che la loro somma sia = F esterne applicate al nodo. Si applicano le eq. in un sistema di rif. locale per poi proiettarlo su un sist. rif. globale. $\underline{S}_B^{(a)} = Q^{(a)} \hat{\underline{S}}_B^{(a)}$ → asta

"quantità non scalare" ↳ locale

Se

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \qquad (\underline{u} = \underline{T}\,\underline{v}) \text{ in c. globali}$$

$$\begin{bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \\ u_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{\xi\xi} & T_{\xi\eta} & T_{\xi\zeta} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{bmatrix} \qquad (\hat{\underline{u}} = \hat{\underline{T}}\,\hat{\underline{v}}) \text{ in c. locali}$$

$\underline{u} = \underline{\underline{Q}}\,\hat{\underline{u}} = \underline{\underline{Q}}\,\hat{\underline{\underline{T}}}\,\hat{\underline{v}} = \left(\underline{\underline{Q}}\,\hat{\underline{\underline{T}}}\,\underline{\underline{Q}}^T\right)\underline{v} \Rightarrow T = \underline{\underline{Q}}\,\hat{T}\,\underline{\underline{Q}}^T$

Si può calcolare K imponendo N unitari e solo carichi nodali.

5/5/08

SISTEMI MATERIALI

Di 3 tipi. Punto materiale con massa (P, m)
Più punti, n. finito. Sistema di coordinate di riferimento, ci interessa il baricentro.
Sistema continuo, numero ∞ di punti.

Moto di un punto

Ci deve essere OSSERVATORE, rappresentato con terna di assi $T_{\boxed{O}} \rightarrow$ individua l'origine.
Se P è mobile risp. a T_O, la pos. varia nel tempo (descritta in termini finiti).
Interpretabile come eq. parametrica di una curva, la TRAIETTORIA

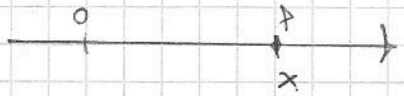
Leggi di moto

$m \cdot \underline{a} = F \rightarrow$ eq. diff. del 2° ordine da
(indica "vettore") associare le 2 cond. iniziali.
Equazione costitutiva di F che α T, P, $\dot{P}$

Vincoli.

Punto che ha limiti alle posizioni nello spazio.
Equivalgono a F applicate al punto senza alterare moto (reaz. vincolari) a diff. delle altre (f. attive).
Reaz. vincolare è sempre $\perp$ a superficie σ (assenza di attrito)

Punto libero ha 3 gdl che si devono individuare
3 param x det la P.
Punto vincolato ha 2 gdl, basta od ex. eq. parametrica superficie.
Ex: punto su retta

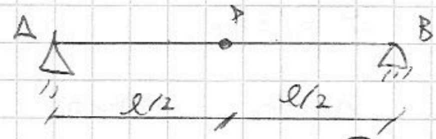


Proiettiamo eq vett su x e ho eq. scalare.

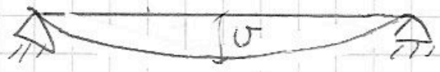
Interesse ristretto a problemi lineari.

•

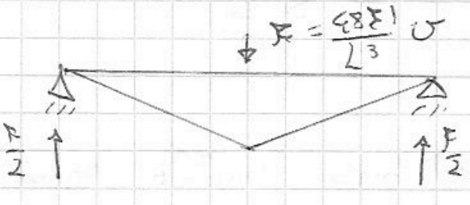
Cons moto P solidale a mezzeria trave la cui m è trascurabile risp. a m di P (altrimenti



avrebbe cons. nel moto, in realtà non la cons. solo come supporto che da reaz. elastica a P). Trave eserciterà su P una F opposta a quella che ha provocato sua deformazione.
Cosa accade a T e M durante il moto?
d da v, quindi variano nel tempo.



Attento al segno che varia con v.



$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{12EI}{L^2}\,v$$

•

Ex: serbatoio sorretto da pilastro, con $\frac{EA}{L}$ trascurabile.
Quindi P si può muovere solo $\perp$ al pilastro.

•

Trave iperstatica studia con sovrapp. effetti, si compongono gli spostamenti.
(10) Trave isostatica di più campate, lo stesso.

Moto armonico:

Posizione P descritta da Θ e R (s). I periodi sono i più importanti.

6/5/2008

$m\underline{a} = \underline{F}$ con $\underline{a} = \ddot{x}\,\underline{e}_x + \ddot{y}\,\underline{e}_y + \ddot{z}\,\underline{e}_z$

o $\underline{a} = \ddot{s}\,\underline{t} + \frac{\dot{s}^2}{r}\,\underline{n}$; $s = s(t)$, $\dot{s}(t)$

$\underline{v} = \dot{s}(t)\,\underline{t}$ [perché $\underline{v} = \frac{d}{dt}OP = \frac{d}{dt}\left(x\,\underline{e}_x + y\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z\right)$

Essendo $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ allora

$\underline{v} = \frac{d}{ds}OP\,\frac{ds}{dt} = \underline{t}\cdot\dot{s}$]

Moto di un punto

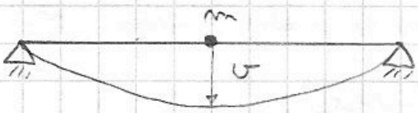
$x = x(t)$

$OP = x(t)\,\underline{e}_x$ Eq dinamica diventa $m\underline{a} = \underline{F} + \underline{R}$

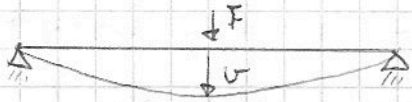
($\underline{R}$ è la reaz. vincolare) allora:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x & \rightarrow \text{moto} \\ \cancel{m}\ddot{y} = F_y + R_y = 0 \\ \cancel{m}\ddot{z} = F_z + R_z = 0 \end{cases} \Bigg\} \text{reaz. vincolari}$$

Cons. moto punto E alla trave:



$$v = \frac{FL^3}{48EI}$$



$$F = \frac{48EI}{L^3}\,v$$

Sostituendo: $m\ddot{v} = -\frac{48EI}{L^3}\cdot v \rightsquigarrow \ddot{v} + \frac{48EI}{mL^3}\,v = 0$

Sono tutte eq. del tipo $\ddot{x} + K\cdot x = 0$, $K > 0$

Se $\left.\begin{matrix} P(0) = P_0 \\ \dot{P}(0) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P(t) = P_0$

C. ness. e suff. di equilibrio è $\underline{F}(P_0, 0, t) = \underline{0}$.

Eq. cost. ed eq. dinamica insieme: $\underline{F} = m\underline{a} \rightsquigarrow$

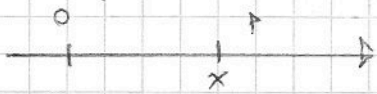
$m\,\underline{a} = \underline{0}$. Eq ammette $P(t) = P_0$; se verificata

P è in equilibrio.

Se $F(x) = 0$, $F(x, \dot{x}) = 0$ (ovvero non cons casi

con dipendenza esplicita da t).

P eq. si cercheranno quindi annullando la forza.

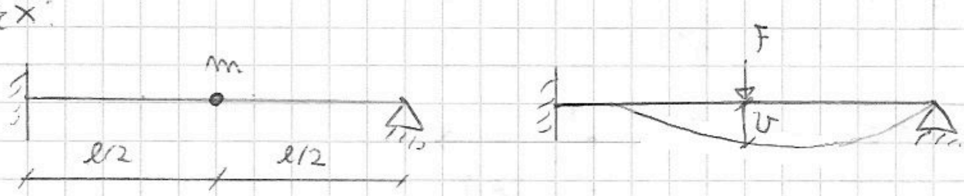


: Ci si rif. a pr. scolari: $F = F(x, \dot{x}, t)$

oppure $\underline{F} = \underline{F}(x, y, z;\ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z};\ t)$ ma $y = z = 0$

durante il moto. $\dot{y} = \dot{z} = 0$

Ex:



$v = \dfrac{7}{768} \dfrac{FL^3}{EI}$

$m\ddot{v} = -\dfrac{768}{7} \dfrac{EI}{L^3} v$

Se cons. moto circolare la pos. è individuata

da Θ o dall'arco $s = R\Theta$.

$\Theta(t) = \dot{\Theta}_0 t + \Theta_0$ se $\dot{\Theta} = \text{cost} = \dot{\Theta}_0$ (m. uniforme)

Moto punto rappresentabile in piano delle fasi

con ascissa x e ordinata $\dot{x}$. La composizione di

due funzioni sin e cos è un'ellisse.

R: ampiezza del moto e $R\omega$ sono i semidiametri

Se moto punto è regolato da $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Ricavo l'int. generale di $x(t)$. Si pone per

comodità $c_1 = R\cos\Theta_0$ $c_2 = -R\sin\Theta_0$. Infatti

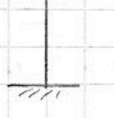
$x(t) = R\cos\Theta_0 \cos\omega t - R\sin\Theta_0 \sin\omega t = R\cos(\omega t + \Theta_0)$

Eq. del moto fissa solo ω. Allora ampiezza

e fase α dalle c. iniziali del moto.

Ex:

(12)



$m\ddot{\xi} + \dfrac{3EI}{h^3}\xi = 0 \rightsquigarrow \ddot{\xi} + \dfrac{3EI}{mh^3}\xi = 0$

allora $\omega^2 = \frac{3EI}{mh^3}$ (fisso quindi anche T oscill.)

$x = R\cos(\dot\theta_0 t + \theta_0)$ $\qquad x_0 = R\cos\theta_0$

$\dot x = -R\dot\theta_0 \sin(\dot\theta_0 t + \theta_0)$; $\qquad \dot x_0 = -R\dot\theta_0 \sin\theta_0$

si ottiene $R = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot x_0^2}{\omega^2}}$ e si ricava θ_0.

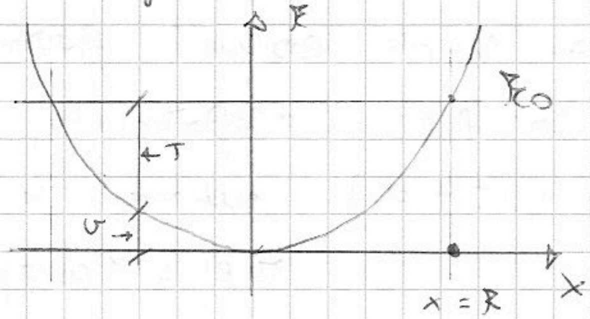
Conservazione dell'energia

$\frac{1}{2} m \dot x^2$ è en. cinetica, $\frac{1}{2} km\, x^2$ è en. potenziale.

F el. è deriv. del potenziale; se $\underline{F} = \nabla V$, V è il potenziale di F.

V è parabolico quindi ha minimo.

Energia totale è costante e pari a E_0, che dà c.i.

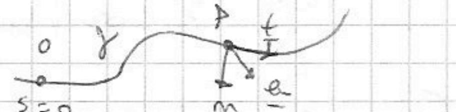


In $x = R$, $E = \frac{1}{2} km R^2 = E_0$

$E = \frac{1}{2} m \dot x^2 = E_0$ ⇒ ricaviamo la velocità massima.

Punto vincolato a una curva

Decomponiamo eq. moto su terna principale ($\underline{b} = \underline{t} \wedge \underline{n}$)



$\underline{a} = \ddot s\, \underline{t} + \frac{\dot s^2}{r} \underline{n}$ (ricorda sempre $R_t = 0$, no attrito)

C'è una f. elastica di richiamo $\underline{F} = -mks\,\underline{t}$

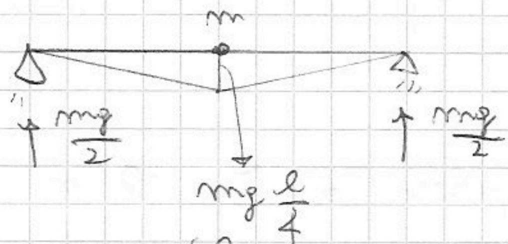
$m\ddot s = -mks$ quindi $\underline{\ddot s + ks = 0}$

Eq. costitutiva $F_t(s, \cancel{\dot s}, \cancel{t}) \Rightarrow F_t = F_t(s)$

Vogliamo pos. equilibrio, cioè $F_t = 0$ verificata solo in $s = 0$.

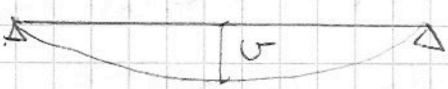
Moti forzati

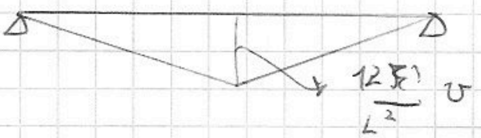
C'è $A m f(t)$ $\underline{t}$ in più; se assente moto è libero.
Supponiamo che forzante sia una costante Am.
Eq. moto: $m\ddot{s} + k m s = A m \rightsquigarrow \ddot{s} + ks = A$.
$s = \frac{A}{k}$
Facciamo cambio di variabile e poniamo $s' = s - \frac{A}{k}$
(spost. origine) e sostituiamo $\ddot{s}' = \ddot{s}$
riottenendo $\underline{\ddot{s}' + k s' = 0}$.



Peso provoca una def in c. statiche, una prima sollecit.

Cons. oscillaz. moti intorno a p. di equil. forzato.
In piccoli spost. si cons. la config. indeformata,





$v = R\cos(\omega t + \alpha)$ quindi ci

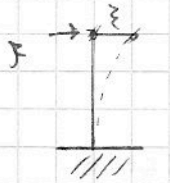
$\omega = \sqrt{\frac{48EI}{\ell^3 m}}$ rif. a 1 config.

In totale $M(t) = \frac{mgL}{4} +$
$+ \frac{12EI}{L^2} R\cos(\omega t + \alpha)$ (statico + dinamico).

Quali sono i max e i min? Se cos. -1 o 1

$$M_{max} = \frac{mgL}{4} \pm \frac{12EI}{L^2} R$$

Cons. serbatoio



$F = \frac{3EI}{h^3}\xi$, $m\ddot{\xi} + \frac{3EI}{h^3}\xi = 0$

$\xi = R\cos(\omega t + \alpha)$; $\omega = \left[\frac{3EI}{mh^3}\right]^{1/2}$

$N = -mg$; $T = \frac{3\mathcal{F}I}{h^3} R\cos(\omega t + \alpha)$;

$$M = -\frac{3\mathcal{F}I}{h^3}(h - z)\underbrace{R\cos(\omega t + \alpha)}_{\xi}$$

portilo se tenda le fibre o sceltra

Quindi x fare verifica vogliamo sapere ξ max

Oscillazioni forzate

$$m\ddot{x} = -kmx + A\cdot m\cdot \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\ddot{x} + kx = A\sin(\omega_1 t + \varphi)$$

Posto $\omega = \sqrt{k}$, si ha

$$X = \underbrace{R\cos(\omega t + \alpha)}_{\text{sol. probl. omogeneo}} + \underbrace{X_*(t)}_{\text{int. particolare}} \quad \begin{cases} \omega_1 \neq \omega \\ \omega_1 = \omega \end{cases}$$

$\ddot{x} + \omega^2 x = A\sin(\omega_1 t + \varphi)$. Supponiamo $A > 0$

Con $\omega_1 \neq \omega$. (basta cambiare fase, si fa)

$$X_*(t) = B\sin(\omega_1 t + \psi)$$

$$-\omega_1^2 B\sin(\omega_1 t + \psi) + \omega^2 B\sin(\omega_1 t + \psi) = A\sin(\omega_1 t + \varphi)$$

$$(\omega_2 - \omega_1^2)B\sin(\omega_1 t + \psi) = A\sin(\omega_1 t + \varphi)$$

Ma argomenti dei sin. sono diversi. Quindi

si pone $\varphi = \psi + (\varphi - \psi)$

$$(1\ m) \qquad = \sin(\omega_1 t + \psi + (\varphi - \psi)) =$$

$$= A\sin(\omega_1 t + \psi)\cos(\varphi - \psi) + A\cos(\omega_1 t + \psi)\sin(\varphi - \psi)$$

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_1^2)B = A\cos(\varphi - \psi) \\ 0 = A\sin(\varphi - \psi) \end{cases}$$

Quindi

$$\sin(\varphi - \psi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \psi = \varphi & \text{se } \omega^2 > \omega_1^2 \\ \psi = \varphi - \pi & \text{se } \omega^2 < \omega_1^2 \end{cases}$$

$$B = \frac{A}{|\omega^2 - \omega_1^2|} > 0 .$$ Ora è moto int. particolare

$$x(t) = R\cos(\omega t + \alpha) + \frac{A}{|\omega^2 - \omega_1^2|}\sin(\omega_1 t + \psi)$$

Si può scrivere

$$\boxed{x(t) = R\cos(\omega t + \alpha) + \frac{A}{|\omega^2 - \omega_1^2|}\cos\left(\omega_1 t + \left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

Sol. è somma di 2 moti armonici

Che moto è?

$$x(t) = R\cos(\omega t + \alpha) + B\sin(\omega_1 t + \psi)$$

Poniamo $\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega}{2}$; $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 - \omega}{2}$ quindi

"di modulazione"

$\omega_1 = \omega_m + \bar{\omega}$; $\omega = \omega_m - \bar{\omega}$

Sost:

$$x(t) = R\cos(\omega_m t + (\alpha - \bar{\omega}t)) + B\sin(\omega_m t + (\psi + \bar{\omega}t)) =$$

$$= R\cos(\omega_m t)\cos(\alpha - \bar{\omega}t) - R\sin(\omega_m t)\sin(\alpha - \bar{\omega}t) +$$

$$+ B\sin(\omega_m t)\cos(\psi + \bar{\omega}t) + B\cos(\omega_m t)\sin(\psi + \bar{\omega}t)$$

In evidenza sin e cos:

$$= \cos(\omega_m t)\left[R\cos(\alpha - \bar{\omega}t) + B\sin(\psi + \bar{\omega}t)\right] +$$

$$- \sin(\omega_m t)\left[R\sin(\alpha - \bar{\omega}t) - B\cos(\psi + \bar{\omega}t)\right] =$$

$$= \cos(\omega_m t)\, a(t)\cos\chi(t) - \sin(\omega_m t)\, a(t)\sin\chi(t)$$

$$a^2(t) = R^2 + B^2 + 2RB\sin(\psi + \bar{\omega}t \cancel{+ \bar{\omega}t} - \alpha)$$ ($2\bar{\omega}t$)

$$\boxed{x(t)} = a(t)\cos\chi(t)\cos(\omega_m t) - a(t)\sin\chi(t)\sin(\omega_m t) =$$

16

$$= a(t)\cos(\omega_m t + \chi(t))$$

Simile a m. armonico ma ampiezza e fase sono funzioni del tempo.

$$a^2(t) \text{ varia tra } \begin{cases} (R+B)^2 \\ (R-B)^2 \end{cases} \Rightarrow |R-B| \leq a(t) \leq R+B$$

Ma si raggiunge questi max e min? Non è detto che sia così, c'è combinazione con la fase che a t.
Abbiamo una MODULAZIONE DI AMPIEZZA.

$$X_*(t) = \frac{A}{|\omega^2 - \omega_1^2|} \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

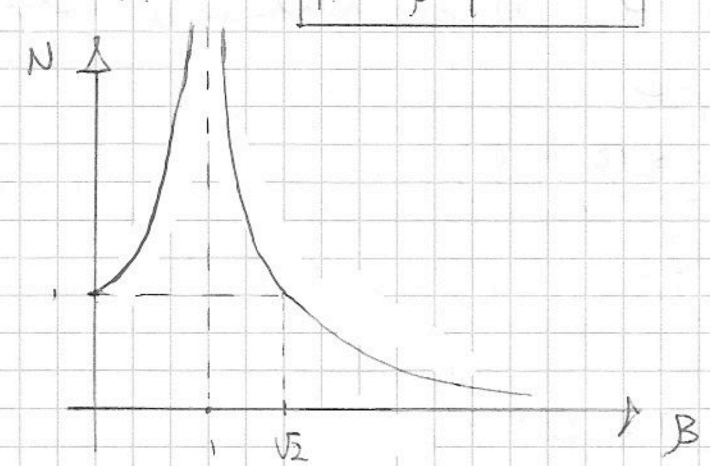
$$F = A m \sin(\omega_1 t + \varphi) \qquad \text{In c. statiche } [F = Am]$$

allora $m\ddot{X} + k m x = A m$ e $X_{ST} = \frac{A}{k}$

$$X_{*,max} = \frac{A}{|\omega^2 - \omega_1^2|}$$ in c. dinamiche. Con $k = \omega^2$ dividiamo per k:

$$X_{*,max} = \frac{A/\omega^2}{\left|\frac{\omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right|} = \frac{X_{ST}}{|1 - \beta^2|} \qquad \text{con } \underline{\beta = \frac{\omega_1}{\omega_2^2}}$$

$$\frac{X_{*,max}}{X_{ST}} = \boxed{\frac{1}{|1 - \beta^2|} = N} \rightarrow$$ FATTORE DI AMPLIFICAZIONE



Max X che ⇒ Max M sono quelli con $\omega_1 \simeq \omega$ (forzante $\simeq \omega$ propria del sistema)

Se $\omega_1 = \omega$?

Risonanza dell'oscillatore armonico

$$x(t) = R\cos(\omega t+\alpha) - \frac{A}{2\omega}\, t \cos(\omega t + \varphi)$$

ampiezza crescente col tempo ed è ILLIMITATA

Se amp oscilla tra 0 e max si hanno i BATTIMENTI.
In risonanza ↑ ampiezza e velocità.

Ex. sensore a riposo, poi soggetto a sisma che muove la base con legge $x_\Omega = A\sin(\omega_1 t)$, P si trova spostato di ξ.

Eq moto:

$$m\ddot{x} = -mk\xi \quad , \quad mk = \frac{3EI}{h^3}$$

(sist. rif. inerziale)

$$x = \xi + x_\Omega \quad , \quad \ddot{x} = \ddot{\xi} + \ddot{x}_\Omega = \ddot{\xi} - A\omega_1^2 \sin(\omega_1 t)$$

$$\ddot{\xi} + k\xi = A\omega_1^2 \sin(\omega_1 t)$$

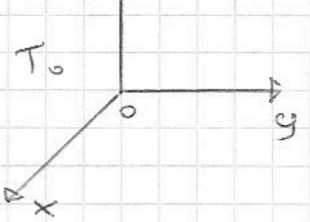
$$\xi(t) = R\cos(\omega t + \alpha) + \frac{A\omega_1^2}{|\omega^2 - \omega_1^2|} \sin(\omega_1 t + \psi)$$

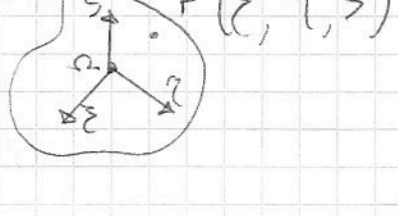
Problema è sempre $\omega \simeq \omega_1$.

SISTEMA MATERIALE RIGIDO: 9/5/08

MOTO DI UN CORPO RIGIDO

Dist. invariate tra i punti di un sistema. Con terna solidale al corpo





$$OP(t) = O\Omega(t) + \Omega P(t)$$

$$P(t) = \Omega(t) + \xi\, \underline{e}_\xi(t) + \eta\, \underline{e}_\eta(t) + \zeta\, \underline{e}_\zeta(t)$$

I versori cambiano nel tempo perché corpo si muove.

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2}\left(\underline{e}_\xi \times \underline{\dot{e}}_\xi + \underline{e}_\eta \times \underline{\dot{e}}_\eta + \underline{e}_\zeta \times \underline{\dot{e}}_\zeta \right)$$

$$\frac{d}{dt}\underline{e}_\xi = \underline{\omega} \times \underline{e}_\xi = -\frac{1}{2}\left(\qquad \right) \times \underline{e}_\xi =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Ricorda: } \underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w}) = \underline{v}(\underline{u}\cdot\underline{w}) - \underline{w}(\underline{u}\cdot\underline{v}) \\ \qquad\qquad (\underline{u} \times \underline{v}) \times \underline{w} = \underline{v}(\underline{u}\cdot\underline{w}) - \underline{u}(\underline{v}\cdot\underline{w}) \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\dot{\underline{e}}_\xi (\underline{e}_\xi \cdot \underline{e}_\xi) - e_\xi (\dot{e}_\xi \cdot e_\xi) +$$

$$\dot{\underline{e}}_\eta \cancel{(e_\xi \cdot e_\eta)} - e_\eta (\dot{\underline{e}}_\eta \cdot e_\xi) + \dot{e}_\zeta (e_\zeta \cdot e_\xi) +$$

$$- e_\zeta (\dot{e}_\zeta \cdot e_\xi)\Big)$$

Essendo $e_\eta \cdot \underline{e}_\xi = 0$, $\dot{e}_\eta \cdot e_\xi + \underline{e}_\eta \cdot \dot{\underline{e}}_\xi = 0$

allora $\dot{\underline{e}}_\eta \cdot \underline{e}_\zeta = - e_\eta \cdot \dot{e}_\xi$

Cambio segno:

$$\frac{1}{2}\left(\dot{\underline{e}}_\xi - \cancel{(\dot{e}_\xi \cdot \underline{e}_\xi)}\, \underline{e}_\xi + (\dot{\underline{e}}_\xi \cdot \underline{e}_\eta)\, \underline{e}_\eta + \right.$$

$$\left. (\dot{\underline{e}}_\xi \cdot \underline{e}_\zeta)\, \underline{e}_\zeta \right) = \frac{1}{2}\left(2 \dot{e}_\xi \right)$$

Infatti $\dot{\underline{e}}_\xi = (\dot{\underline{e}}_\xi \cdot \cancel{\underline{e}_\xi})\, \underline{e}_\xi + (\dot{e}_\xi \cdot \underline{e}_\eta)\, e_\eta +$

$+ (\dot{\underline{e}}_\xi \cdot \underline{e}_\zeta)\, \underline{e}_\zeta$

Quindi $\boxed{\underline{\omega} \times \underline{e}_\xi = \dot{\underline{e}}_\xi}$

Abbiamo $P(t) = \Omega(t) + \xi\, \underline{e}_\xi(t) + \eta\, \underline{e}_\eta(t) + \zeta\, \underline{e}_\zeta(t)$

$$\underline{v}_\eta = \underline{v}_\Omega + \xi\, \underline{\omega} \times \underline{e}_\xi + \eta\, \underline{\omega} \times \underline{e}_\eta + \zeta\, \underline{\omega} \times \underline{e}_\zeta$$

$$\underline{v}_P = \underline{v}_\Omega + \underline{\omega} \times \Omega P$$

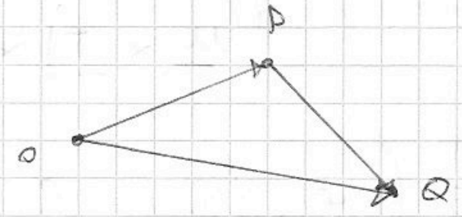
$$\underline{v}_Q = \underline{v}_\Omega + \underline{\omega} \times \Omega Q$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{v}_P - \underline{v}_Q = \underline{v}_\Omega + \underline{\omega} \times QP}$$

È caratteristica di un moto rigido!

Infatti: $QP \cdot \underbrace{(\underline{v}_P - \underline{v}_Q)}_{} = \underline{\omega} \times QP \cdot QP = 0$

$$= \frac{d}{dt} PQ$$



$PQ = PO + OQ$ quindi:

$$\left[P - Q = (O - P) + (Q - O) \right]$$

$$QP \cdot \frac{d}{dt} QP = 0 \rightsquigarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (QP \cdot QP) = 0 \Rightarrow QP \text{ di lungh. costante}$$

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \omega \times AB$$

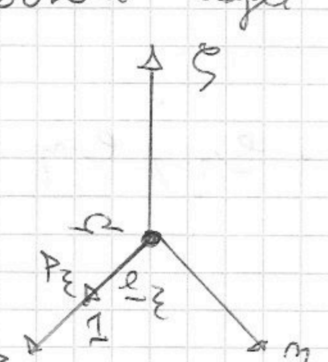
<u>Moto rigido traslatorio</u>

Cons:

$P_0 = P(0)$ allora $P(t) = P_0 + \underline{u}(t)$

$Q_0 = Q(0)$ $\qquad Q(t) = Q_0 + \underline{u}(t)$

Versori degli assi solidali non cambiano orientamento.



$$P_\xi(0) - \Omega(0) = \underline{e}_\xi$$

$$P_\xi(t) = P_\xi(0) + \underline{u}(t)$$

$$\Omega(t) = \Omega(0) + \underline{u}(t)$$

Diff.

$$P_\xi(t) - \Omega(t) = P_\xi(0) - \Omega(0) = \underline{e}_\xi \;!$$

(rimane sempre // a se stesso)

$\hookrightarrow = e_\xi(t)$

Vale $\forall$ versore. Quindi

$\dot{\underline{e}}_\xi = 0$

$\dot{\underline{e}}_\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\omega} = \underline{0}}$

$\dot{\underline{e}}_\zeta = 0$

$P(t) = \Omega(t) + \xi \underline{e}_\xi + \eta \underline{e}_\eta + \zeta \underline{e}_\zeta \rightarrow$ si può'

$\Omega(t) + \xi \underline{e}_x + \eta \underline{e}_y + \zeta \underline{e}_z$

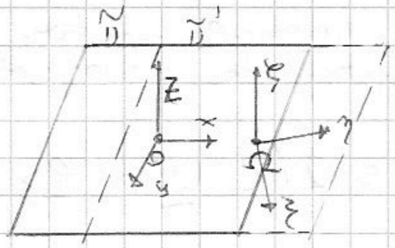
Essendo $\underline{\omega} = \underline{0}$, $\underline{v}_P = \underline{v}_\Omega + \cancel{\underline{\omega} \times QP}$ (tutti i punti hanno stessa velocità)

v possono essere $\neq$ nel tempo. Se cost. ho moto traslatorio uniforme (oltre che rettilineo) e $\underline{a_P} = 0$.

Cons. moto rigido generale

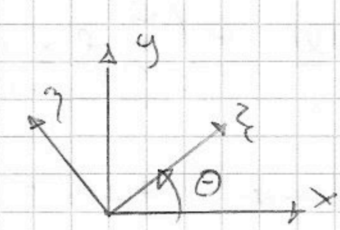
$$a_P = \underline{a}_Q + \dot{\underline{\omega}} \times QP + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times QP)$$

Moto rigido piano



$\tilde{\Pi}$ e $\tilde{\Pi}'$ sempre sovrapposti, coincidenti. Scegliamo terna

Ho $\underline{e}_\xi$, $\underline{e}_\eta$ ed $\underline{e}_\zeta$.



$$\underline{P}(t) = \Omega(t) + \xi \underline{e}_\xi(t) + \eta \underline{e}_\eta(t) + \zeta \underline{e}_\zeta(t)$$

Proiettiamo:

$x(t) = x_\Omega(t) + \xi \sin\theta - \eta \sin\theta$

$$y(t) = y_{\Omega(t)} + \xi \sin\theta + \eta \cos\theta$$

$$z(t) = \zeta = \text{cost.} \qquad \text{si ha:}$$

$$\dot{\underline{e}}_\xi = \left(-\underline{e}_x \sin\theta + \underline{e}_y \cos\theta\right)\dot\theta = \dot\theta\, \underline{e}_\eta$$

$\dot{\underline{e}}_\eta = -\dot\theta\, \underline{e}_\xi$. Sost. in ω:

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2}\left(\underline{e}_\xi \times \dot{\underline{e}}_\xi + \dots\dots\right) = \dot\theta\, \underline{e}_\zeta = \dot\theta\, \underline{e}_z$$

Quanti param. servono x def. la pos. della terna nello spazio? 3 origine + 3 angoli di Eulero. Se fisso 1 asse ho solo 1 gdl.

<u>Moto relativo</u>:

Moto risp. a 2 sist. di riferimento

Moto risp. a T_0 fisso è moto "assoluto".

$$P(t) = \Omega(t) + \xi(t)\, \underline{e}_\xi(t) + \dots$$

$$\underline{v}_a = \dot P(t) = \left(\dot\Omega + \xi \dot{\underline{e}}_\xi\right) + \left(\dot\xi\, \underline{e}_\xi\right)$$

$$\underline{a}_a = \ddot P(t) = \left(\ddot\Omega + \xi \ddot{\underline{e}}_\xi\right) + \underbrace{2\dot\xi\, \dot{\underline{e}}_\xi}_{\text{acc. complementare } a_c \text{ o centrifuga composta}} + \left(\ddot\xi\, \underline{e}_\xi\right)$$

$$\underline{a}_c = 2\left(\dot\xi\, \dot{\underline{e}}_\xi + \dot\eta\, \dot{\underline{e}}_\eta + \dot\zeta\, \dot{\underline{e}}_\zeta\right) = 2\left(\dot\xi\, \underline{\omega} \times \underline{e}_\xi + \dot\eta\, \underline{\omega} \times \underline{e}_\eta + \dot\zeta\, \underline{\omega} \times \underline{e}_\zeta\right) = 2\,\underline{\omega} \times \underbrace{\left(\dot\xi\, \underline{e}_\xi + \dots + \dot\zeta\, \underline{e}_\zeta\right)}_{\underline{v}_r}$$

In moto traslatorio $\underline{\omega} = 0$ e quindi $\underline{a}_c = 0$

Se " " uniforme $\underline{a}_a = \underline{a}_r$, sist. di rif. inerziale.

Moto rispetto a sistema non inerziale

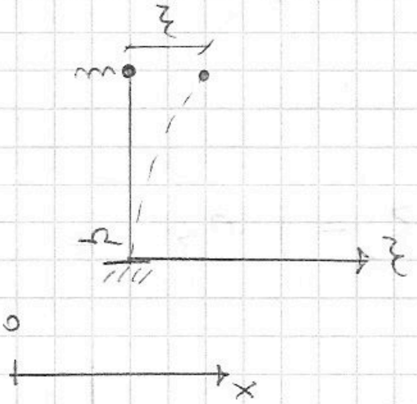
$\underline{F} + \underline{R} = m\underline{a} \to$ (terna inerziale) $= m\left(\underline{a}_r + \underline{a}_\tau + \underline{a}_c\right)$

$m\underline{a}_r = \underline{F} + \underline{R} \underbrace{- m\underline{a}_\tau - m\underline{a}_c}_{} =$

Si aggiungono le forze apparenti dette f. di trascinamento e forza complementare.

$= F' + R$

Cons. serbatoio rispetto a sisma.



Si può operare risp. a Ω, ξ.

$\underline{a}_r = \ddot{\xi}\, \underline{e}_\xi \quad , \quad \underline{a}_\tau = \ddot{X}_\Omega\, \underline{e}_x$

$m\underline{a}_r = F - m\underline{a}_\tau - \cancel{m\underline{a}_c}$

$\underline{F} = -k m \xi\, \underline{e}_x$, quindi

$\cancel{m}\ddot{\xi} = -k\cancel{m}\xi - \cancel{m}\ddot{X}_\Omega \quad , \quad \boxed{\ddot{\xi} + k\xi = A\omega_1^2 \sin(\omega_1 t)}$

moto relativo nel sist. rif. non inerziale

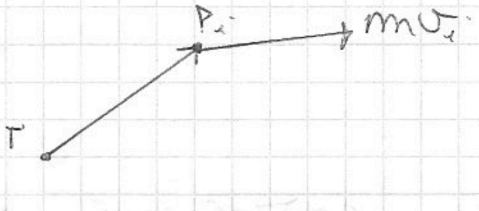
Dinamica del moto rigido.

$\underline{Q} = \sum_i m_i \underline{v}_i$

Pos. del baricentro: $m\, OG = \sum m_i\, OP_i$, deriviamo:

$m\underline{v}_G = \sum m_i \underline{v}_i$

$\underline{Q} = \int_C \mu\, \underline{v}\, dC$



Mom. q. di moto $k_T = \sum_i TP_i \times m\, \underline{v}_i$

(in sist. di punti materiali)

$\underline{K}_{\Omega} = \sum \Omega P_i \times m_i (\underline{v}_\Omega + \underline{\omega} \times \Omega P_i) = \sum \Omega P_i \times m_i v_\Omega =$

polo

$= \sum m_i \Omega P_i \times v_\Omega = m\, \Omega_G \times \underline{v}_\Omega + \sum m_i\, \underline{\omega}\, \overline{\Omega P_i}^2 +$

$[\Omega P_i \cdot \Omega P_i = \overline{\Omega P_i}^2$, quad. lunghezza segmento$]$

$- \sum m_i\, \Omega P_i (\Omega P_i \cdot \underline{\omega})$

$m_i \overline{\Omega P_i}^2 \cdot \underline{\omega} = m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2)\, \underline{\omega} +$

$- \sum m_i (\Omega P_i \cdot \underline{\omega}) \Omega P_i = m_i (\xi_i p + \eta_i q + \zeta_i r) \cdot$
$(\xi_i \underline{e}_\xi + \eta_i \underline{e}_\eta + \zeta_i \underline{e}_\zeta) =$

$= - \sum m_i \Big[(\xi_i^2 p + \xi_i \eta_i q + \zeta_i \xi_i r)\, \underline{e}_\xi +$

$+ (\xi_i \eta_i p + \eta_i^2 q + \eta_i \zeta_i r)\, \underline{e}_\eta + \dots \Big] =$

$= \sum \underbrace{m_i (\eta_i^2 + \zeta_i^2)} p\, \underline{e}_\xi + \sum m_i (\xi_i^2 +$
$\zeta_i^2)\, q\, \underline{e}_\eta + \dots \rightarrow$ [mom. inerzia (risp. a ξ) A]

$A p\, \underline{e}_\xi + B q\, \underline{e}_\eta + C r\, \underline{e}_\zeta$

$- (\sum m_i \xi_i \eta_i) q = -C' q$ → prodotto di inerzia

si annullano se

T_Ω è terna principale

$\Downarrow$

Equazioni cardinali della dinamica:

(24) Dist. F interne e F esterne.

$m_i \underline{a}_i = \underline{F}^{(i)} + \underline{F}^{(e)}$

↳ tutte coppie di braccio nullo

Sommo su tutti i punti del sistema:

$\underbrace{\sum m_i \underline{a}_i}_{} = \underline{R}^{(e)}$. Essendo $\dot{Q} = m\dot{\underline{v}}_G = m\underline{a}_G$,

$$\boxed{m \underline{a}_G = \underline{R}^{(e)}} \quad (1)$$

Momento risp. a polo T:

$TP_i \times m_i \underline{a}_i = TP_i \times \left(\underline{F}^{(i)} + \underline{F}^{(e)} \right)$

Sommo e ottengo:

$$\boxed{\sum TP_i \times m_i \underline{a}_i = \underline{M}_T^{(e)}} \quad (2) \quad \boxed{= \dot{\underline{k}}_T \begin{cases} T \text{ fisso} \\ T = G \end{cases}}$$

Essendo $k_T = \sum TP_i \times m \underline{v}_i$, derivando ho:

$\dot{k}_T = \sum (\cancel{\underline{v}_i} - \underline{v}_T) \times m_i v_i + \sum TP_i \times m_i \underline{a}_i$

Se T coincide con il baricentro ho di nuovo $\times$ tra due vett. //. ↳ se T è fisso

---

12/5/08

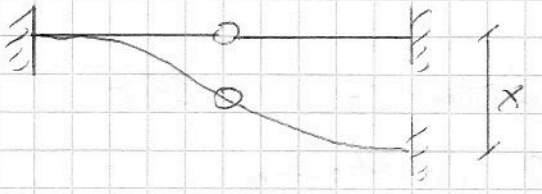
Nel caso che gli assi y-x sono assi di inerzia principale:

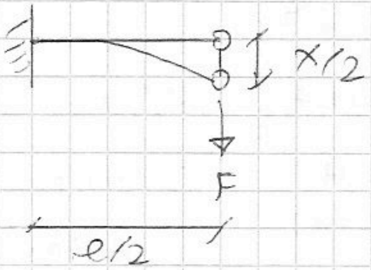
$k_\Omega = A p\, e_\xi + B q\, e_\eta + C r\, e_\zeta$

$\omega = p\, e_\xi + q\, e_\eta + r\, e_\zeta$

Nel caso di moto rigido piano se $T = G$ e ζ è asse principale d'inerzia. (vedi slide)

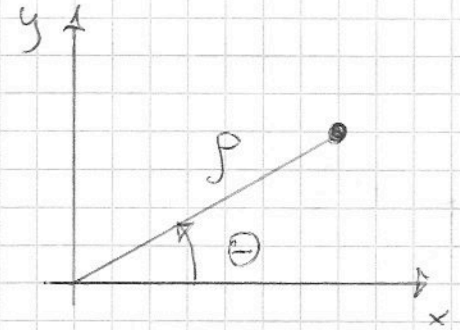
$(\longrightarrow)$





$$F = \frac{3EI}{(\ell/2)^3}\,\frac{x}{2}$$

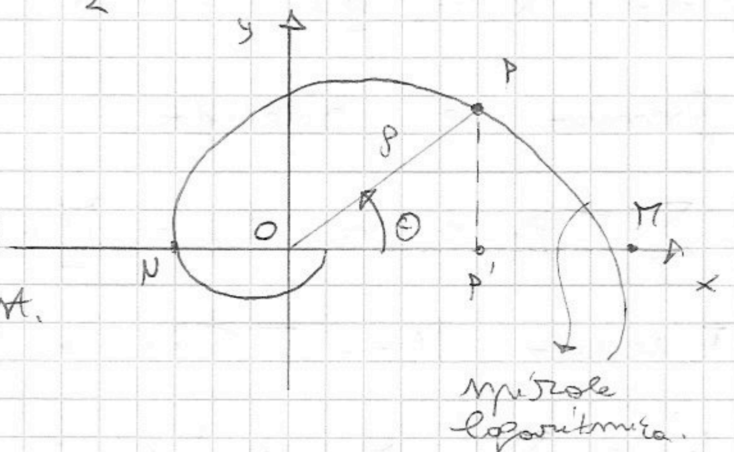
Moto armonico smorzato



Eq. curva assume forma $\rho = \rho(\theta)$

Cons. $\rho = \bar\rho\, e^{\underbrace{\theta \cot g\, \alpha}_{\text{costante}}}$

Cons. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$



ρ è decrescente, → a O
(si avvicina indefinitivamente)

Cons. $\dot\theta > 0$; $\omega = \dot\theta$ = cost.

Quindi $\theta = \omega t + \theta_0$ e

$\rho = \bar\rho\, e^{(\omega t + \theta_0)\cot g\,\alpha}$ Allora:

$$x = \bar\rho\, e^{(\omega t + \theta_0)\cot g\,\alpha} \cdot \cos(\omega t + \theta_0) =$$

$$= \underbrace{\left(\bar\rho\, e^{\theta_0 \cot g\,\alpha}\right)}_{R} e^{(\omega \cot g\,\alpha)t} \cos(\omega t + \theta_0) =$$

[pongo $-\omega \cot g\,\alpha = h > 0$] $x(t) = R e^{-ht}\cos(\omega t + \theta_0)$

P' oscilla lungo x, intorno a O ed è decrescente. Moto di P' è il M.A.S.

Vanno trovati gli istanti di arresto del moto:
Deriv. e annulliamo:

$$\dot x(t) = -hRe^{-ht}\cos(\omega t + \theta_0) - \omega R e^{-ht}\sin(\omega t + \theta_0) =$$

[pongo $h = A\sin\varphi$ e $\omega = A\cos\varphi$]

26 $= -AR e^{-ht}\cdot \sin(\omega t + \theta_0 + \varphi)$

Si deve annullare il seno:

$\omega t + \Theta_0 + \varphi = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$

$\forall n$ c'è istante di arresto $\boxed{t_n = \frac{n\pi}{\omega} - \frac{\Theta_0 + \varphi}{\omega}}$

Quale ascissa corrisponde?

$$X_n = x(t_n) = R\, e^{-\frac{h}{\omega}\left(n\pi - (\Theta_0 + \varphi)\right)} \cdot \cos(n\pi - \varphi)$$

$\cos n\pi \cos\varphi + \sin n\pi \sin\varphi = \dots$

Quindi:

$$\boxed{X_n = R\, e^{-\frac{h\pi}{\omega} \cdot n} \cdot e^{\frac{(\Theta_0 + \varphi)h}{\omega}} (-1)^n \cos\varphi}$$

Ci interessa rapp. tra 2 semioscillazioni:

$$\left|\frac{X_n}{X_{n-1}}\right| = e^{-\frac{h\pi}{\omega} n} \Big/ e^{-\frac{h\pi}{\omega}(n-1)} = e^{-\frac{h\pi}{\omega}} \Rightarrow \text{è COSTANTE}$$

Passo ai log:

$$\boxed{\ln|X_n| - \ln|X_{n-1}| = -\frac{h\pi}{\omega}} \rightarrow \text{DECREMENTO LOGARITMICO della semioscillazione}$$

$t_n - t_{n-1}$ è tempo x 1 osc. semplice (2 semiosc. cons.)

$t_n - t_{n-1} = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow$ COSTANTE $\quad T = \frac{2\pi}{\omega}$ è il PERIODO del M.A.S.

anche se M.A.S. non è periodico!

$$x(t) = R e^{-ht} \cos(\omega t + \Theta_0)$$

$$\dot{x}(t) = -h x(t) - \omega R e^{-ht} \sin(\omega t + \Theta_0)$$

$$\ddot{x}(t) = -h\dot{x} + h\,\omega R e^{-ht} \sin(\omega t + \Theta_0) + \omega^2 x(t)$$

la si ottiene da: $-\dot{x}(t) = \text{''}$. Quindi:

$$\boxed{\ddot{x} + 2h\dot{x} + (h^2 + \omega^2)x = 0} \rightarrow \text{EQ. COST. DEI MOTI ARM. SMORZATI}$$

Verifica:

$\lambda^2 + 2h\lambda + h^2 + \omega^2 = 0$

$\lambda = -h \pm \sqrt{-\omega^2} = -h \pm i\omega$

$x = e^{-ht}\left(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t\right)$

$x = R e^{-ht} \cos(\omega t + \theta_0)$

$C_1 = R \cos\theta_0$; $C_2 = -R\sin\theta_0$. Quindi:

$x = R e^{-ht} \cos(\omega t + \theta_0)$ ✓

Costante di smorz. h e periodo $T = 2\pi/\omega$

R e θ_0 da c. iniziali.

$\ddot{x} + 2p\dot{x} + qx = 0$; $\boxed{\begin{matrix} p > 0 \\ q - p^2 > 0 \end{matrix}}$ e $\omega^2 = q - p^2$

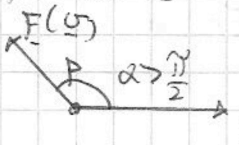
→ c. necessarie x essere eq. osc. m.a.s.

Se $p = h$ diventa EQ osc.

$-Re^{-ht} \le x(t) \le Re^{-ht}$

Resistenza passiva:

F. che agisce su un punto è $= 0$ se $v_P = 0$ e



forma $\alpha > \frac{\pi}{2}$ con $\dot{P}$ (pr. vel(t). è <0)

Se $\underline{F} = -e\,\underline{v}$ (costante con $\underline{v}$) è una resistenza VISCOSA.

∃ pos. equilibrio? L'origine.

$\ddot{s} + 2h\dot{s} + ks = 0$

$\lambda^2 + 2h\lambda + k = 0$

Le soluzioni sono $\lambda = -h \pm \sqrt{h^2 - k}$

Se $h^2 - k > 0$ si hanno 2 radici reali distinte.

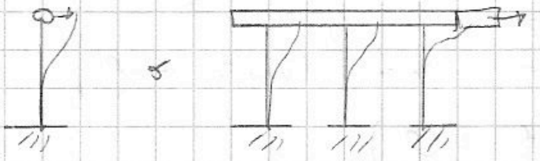
Vogliamo annullare $\dot{s}(t)$

Oscillatore semplice smorzato

Corpo su guida orizz. senza attrito con F. di richiamo e F. viscosa.
ν nei casi reali è 5÷7%, quasi sempre molto piccola.

[riepilogo:] 13/5/08

Abbiamo cons. modelli a 1 g.d.l.

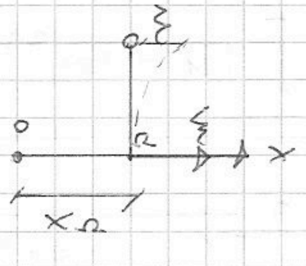


governati da $m\ddot{x} = F = -kmx$

Abbiamo trasc. deform. assiale pilastri, e abb. trasc. la massa dei pilastri risp. al traverso (proporzionalmente) che è >> rigido.
Poi abb. aggiunto forza che varia sinusoidalmente
la sol. dell'eq. è $m\ddot{x} = -kmx + Am\sin(\omega_1 t + \varphi)$
quindi $x = R\cos(\omega t + \alpha) + B\sin(\omega_1 t + \varphi)$ e
$B = \frac{A}{|\omega^2 - \omega_1^2|}$

Se $\omega_1 = \omega$ moto non ha limiti di oscill. cresce.
Importante x_{max} xké le sollecitazioni sono α ad esso.
Perché aggiunta forzante? xké strutture eccitate da sisma, moto del terreno.

$$m\ddot{\xi} = -mk\xi - m\ddot{x}_{\Omega}$$



Si è poi passati a modelli con dissipazione. Si è introdotta la res. viscosa hx
e quindi si ha $\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = 0$ e la soluzione è $x = Re^{-ht}\cos(\omega t + \alpha)$
È un oscill. smorzato.

ω è diverso da quello di prima, è $\omega_0^2 = k - h^2$

quindi $\omega^2 = \omega_0^2 - h^2$.

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + (h^2 + \omega^2)x = 0$$

Sono sempre moti ∞ che velocemente vanno a 0

(non ha tanta imp. quale moto si stabilisce)

Cons. <u>forzante in sistema con smorz.</u>

[A > 0, basta cambiare φ]

$$m\ddot{x} = -kmx - 2hm\dot{x} + A \cdot m \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = A\sin(\omega_1 t + \varphi)$$

$X_0(t) + X_*(t)$ è la soluzione (int gen + int part)

$$X_*(t) = B\sin(\omega_1 t + \psi) \quad [B > 0]$$

Sostit:

$$-\omega_1^2 B\sin(\omega_1 t + \psi) + 2h\omega_1 B\cos(\omega_1 t + \psi) + kB\sin(\omega_1 t + \psi)$$

Sostituiamo $\varphi = \psi + (\varphi - \psi)$;

$$= A\sin(\omega_1 t + \psi)\cos(\varphi - \psi) + A\cos(\omega_1 t + \psi)\sin(\varphi - \psi)$$

$$\begin{cases} B(k - \omega_1^2) = A\cos(\varphi - \psi) \\ B\,2h\omega_1 = A\sin(\varphi - \psi) \end{cases}$$ quadrato e sommo.

$$B^2\left[(k - \omega_1^2)^2 + 4h^2\omega_1^2\right] = A^2$$ quindi

$$\boxed{B = \frac{A}{\left[(k - \omega_1^2)^2 + 4h^2\omega_1^2\right]^{\frac{1}{2}}}}$$

Riassumendo, $\boxed{X(t) = \underbrace{x_0(t)}_{\downarrow} + B\sin(\omega_1 t + \psi)}$

va velocemente a 0, dopo un transitorio c'è

30 solo il 2° termine, il 1° lo trascuro

Come è comporta l'ampiezza B? Studio il denom: al variare di ω_1 (forzante moto):

$$f(\omega_1) = \left[(k-\omega_1^2)^2 + 4h^2\omega_1^2\right]^{1/2}$$

$$\frac{df}{d\omega_1} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}(k-\omega_1^2)(-2\omega_1) + 4h^2 \cdot 2\omega_1}{f(\omega_1)}$$

$$\frac{df}{d\omega_1} = \frac{2\omega_1(2h^2+\omega_1^2-k)}{\underbrace{f(\omega_1)}_{\text{non si annulla mai}}}$$

Dove si annulla? (a parte il caso banale)

$$\boxed{\omega_1^{*2} = k - 2h^2} \rightarrow \text{possibile punto, quindi:}$$

$$\frac{df}{d\omega_1} = \frac{2\omega_1(\omega_1^2 - \omega_1^{*2})}{f(\omega_1)}$$

Se $\omega_1 > \omega_1^*$, f è crescente e B è decrescente

" $\omega_1 < \omega_1^*$, " " decrescente " " " crescente

Quindi ω_1^{*2} è il max della funzione.

Non ho B illimitata, ho solo un massimo, pari a:

$$B^* = \frac{A}{(k-k+2h^2)^2 + 4h^2(k-2h^2)} = \frac{A}{\left(4h^2(k-h^2)\right)^{1/2}} \Rightarrow$$

$$B^* = \frac{A}{2h\sqrt{(k-h^2)}} \quad \text{Dividiamo per } k \quad = \frac{A/k}{2\sqrt{\frac{h^2}{k}\left(1-\frac{h^2}{k}\right)}}$$

B^* è > se h^2 è piccolo risp a k. Per contenere B^* $\frac{h^2}{k}$ deve essere grande.

Vogliamo ω molto distante da ω_1

Fattore di amplificazione

Nel moto armonico $N = \frac{1}{|1-\beta^2|}$

Curve per ν + basso tendono ad avere max. + elevato:

$\omega_1^* = \sqrt{k - 2h^2}$, $\omega_1^* = \omega_0 \sqrt{1-2\nu^2}$ e $\omega = \omega_0 \sqrt{1-\nu^2}$

quindi $\beta = \sqrt{1-2\nu^2}$

<u>Costante di smorzamento.</u>

Come misurare h? Si possono mis. le semioscillazioni

$\ln|x_n| - \ln|x_{n-1}| = \frac{-\pi h}{\omega}$

Misuriamo + semioscill. x ridurre l'errore. Si misura anche T e si ricava.

<u>Energia</u>

Potenza forzante + pot. res. viscosa = var. nel tempo dell'E totale.

Cons. trascorso il transitorio e nella x cons solo $x_a(t)$.

<u>Isolamento dalle vibrazioni</u>

Attivo: macchina vibrante, vogliamo ridurre le sol. al supporto di collegamento interponendo un dispositivo.

Problema è anche supporto mobile su dispositivo (isolamento passivo)

<u>Forze addizionali di tipo + generale:</u>

$m\ddot{x} + 2hm\dot{x} + kmx = F = fm$, periodica con $T = T_F$

 Si sviluppa in serie.

e quindi $\omega_1 = 2\pi / T_F$

Forzanti variabili con legge qualsiasi

Caso simile a quello reale del sisma.

$$x(t) = R e^{-ht} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\dot{x}(t) = -h\, x(t) - R\omega e^{-ht} \sin(\omega t + \alpha)$$

$x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

$R\cos\alpha = 0$ (se) $\quad -\cancel{h x_0} - R\omega \sin\alpha$ (allora) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} e^{-ht} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Cons. eq. moto $F = m\ddot{x} = m \frac{d\dot{x}}{dt}$. Si può anche scrivere $F\,dt = m\,d\dot{x}$ e si può integrare tra t_0 e t_1.

$\int_{t_0}^{t_1} m\, d\dot{x} = m(\dot{x}(t_1) - \dot{x}(t_0))$. Se F è cost. tra $t_0 = \tau$ e $t_1 = \tau + \Delta\tau$ si ha $F(\tau)\Delta\tau = m\dot{x}(\tau + \Delta\tau)$ perché fissiamo $\dot{x}(t_0) = 0$.

Telai soggetti ad azione sismica

Nell' eq. del moto + f. apparente del moto di trascinamento $(m\ddot{x})$

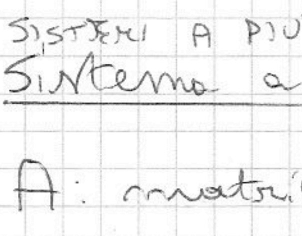
SISTEMI A PIÙ GRADI DI LIBERTÀ

Sistema a 2 g.d.l.

A: matrice che molt. le acceleraz.

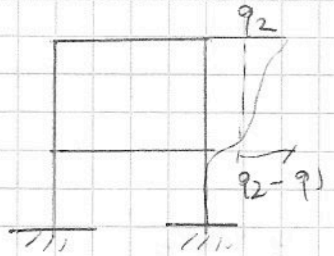
C: " " " " velocità

B: " elastica (in statica è mat. di rigidezza)



(Se nullo q_2) ξ. $\frac{12EJ}{h^3} q_1 = F_1$

$F_2 = -\frac{24EJ}{h^3} q_1$



Ricorda: $(\underline{A}\,\dot{\underline{q}})_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, q_j$ e

p. scalare: $\underline{u}\cdot\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i$

16/05/08

Sistema a 3 gradi di libertà

Con le solite ipotesi nel pilastro (rig. EI, alt. h).

$A\ddot{x} + Bx = f$

$A_{11} = m_1$; $A_{22} = m_2$; $A_{33} = m_3 \rightarrow A = \begin{bmatrix} m_1 & & \emptyset \\ & m_2 & \\ \emptyset & & m_3 \end{bmatrix}$

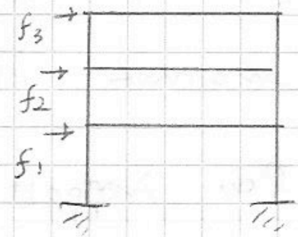
Se il sistema è STATICO, $\ddot{x} = 0$ e $Bx = f$ e quindi

$\sum_j B_{ij}\, x_j = f_i$ con $i = 1, \dots, n$ $\quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$

Se $x_j = 1$ e $x_i = 0$ con $i \neq j$

$B_{ij} = f_i$

Questo è il metodo che si usa per compilare le colonne di B.

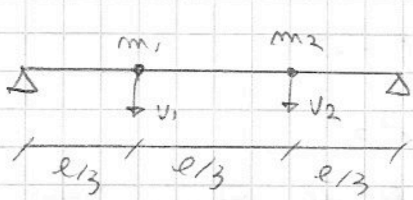


Impongo spostamenti unitari sui 3 nodi e trovo le f_i risultanti

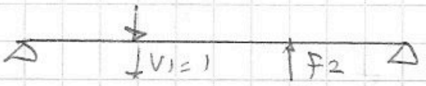
Ex: $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$ $\quad f_1 = 6 \times \frac{12EI}{h^3}$; $f_2 = -3 \times \frac{12EI}{h^3}$; $f_3 = 0$

$B_{11} = f_1$; $B_{22} = f_{22}$; $B_{31} = f_3$

Sistema a 2 g.d.l.

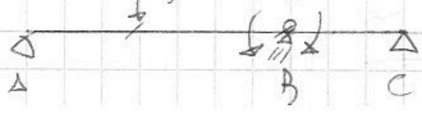


Devo risolvere $V_1 = 0$, $V_2 = 1$ e $V_1 = 1$, $V_2 = 0$

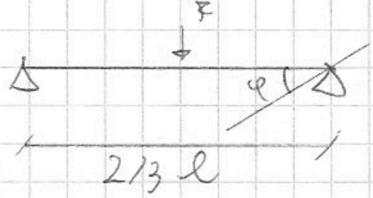


$V_1 = 1$, $V_2 = 0$

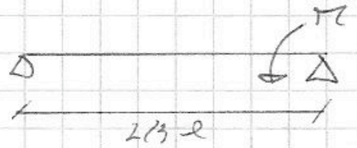
Sfrutto l'equazione dei 3 momenti



Congruenza: $\varphi_B^s = \varphi_B^d$

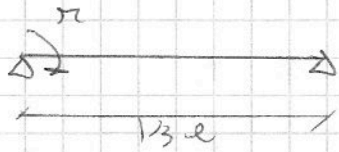
1) 

$$\varphi = \frac{F\left(2/3\, l\right)^2}{16\, EI} = \frac{F l^2}{36 EI}$$

2) 

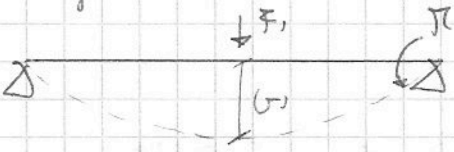
$$\varphi_B = \frac{M}{3EI}\left(\frac{2}{3} l\right)$$

Congruenza:

3) 

$$\varphi_B^D = \frac{2ML}{3EI}\left(\frac{2}{3} l\right) \qquad \frac{F l^2}{36 EI} + \frac{2}{9}\frac{ML}{EI} = -\frac{ML}{9EI}$$

Voglio conoscere V_1 ed imporre $v_1 = 1$



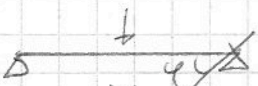
$$V_1 = \frac{F_1}{48 EI}\left(\frac{2}{3} l\right)^3 + \frac{M L^2}{36 EI} \Rightarrow \underline{V_1 = \frac{5}{1296}\frac{F L^3}{EI}}$$

Teorema di Betti

Se ho due sistemi in equilibrio e calcolo gli spostamenti del primo causati dal secondo essi sono uguali al lavoro della forza del primo che produce spostamenti nel secondo.

$L_{12} = F v \quad ; \quad F = 1 \qquad 1 \cdot v = \varphi \cdot 1$

$L_{21} = m \varphi \quad ; \quad m = 1$

$\varphi = \frac{FL}{16 EI} \qquad v_1 = \frac{ML}{16 EI}$

Ponendo $v_1 = 1$ trovo F_1 e F_2.

Pongo $F_1 = B_{11} = b$, $F_2 = B_{21} = -b_2$

Equazione del moto

$$\begin{cases} m_1 \ddot{v}_1 + b_1 v_1 - b_2 v_2 = 0 \\ m_2 \ddot{v}_2 - b_2 v_1 + b_1 v_2 = 0 \end{cases}$$

Il potenziale $= \frac{1}{2}(Bv)\, v$

Ricordandosi che

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \quad \text{se } U = Bv, \quad U_i = \sum_i B_{ij} v_i \Rightarrow$$

$$(Bv)\, v = \sum_{j=1}^{n} v_i B_{ij} v_j$$

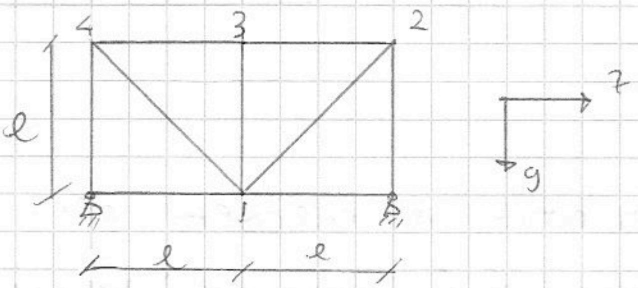
$$B = \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad B_{ij} = -\frac{\partial^2 V}{\partial v_i \, \partial v_j}$$

Le forze:

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{\partial V}{\partial v_1} = -B_{11} v_1 - B_{21} v_2 = -b_1 v_1 + b_2 v_2 ; \\[2ex] F_2 = \dfrac{\partial V}{\partial v_2} = -B_{12} v_1 - B_{22} v_2 = b_2 v_1 - b_1 v_2 ; \end{cases}$$

L'energia cinetica: $T = \frac{1}{2} m_i \cdot \dot{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_i \dot{v}_2^2$

Trave reticolare:



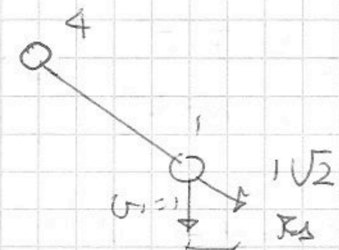
Ipotesi: aste di massa trascurabile. Masse concentrate nei nodi, ho 8 gdl

$q_1 = v_1$, $q_3 = v_2$, $q_5 = v_3$, $q_7 = v_4$

$q_2 = w_1$, $q_4 = w_2$, $q_6 = w_3$, $q_8 = w_4$

Impongo $v_1 = 1$ ed il resto nullo.

$$F_{13} = \frac{EA}{L} \cdot 1 ; \quad F_{14} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{EA}{2L}$$



$$F_{12} = \frac{EA}{2L} ; \quad F_{1A} = 0 ; \quad F_{1B} = 0$$

$$B_{11} = \frac{EA}{L} + \frac{2EA}{2L\sqrt{2}} ; \quad B_{21} = 0 ; \quad B_{31} = -\frac{EA}{2L\sqrt{2}}$$

$$B_{41} = \frac{EA}{2L\sqrt{2}} ; \quad B_{51} = -\frac{EA}{L} ; \quad B_{61} = 0 ; \quad B_{71} = B_{81} = -\frac{EA}{2L\sqrt{2}}$$

La matrice A ha le masse sulla diagonale: $A\ddot{q} + Bq = 0$

Moto di un sistema conservativo:

Se non ho dissipazioni $A\ddot{q} + Bq = 0$ alla quale associo le condizioni iniziali $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$

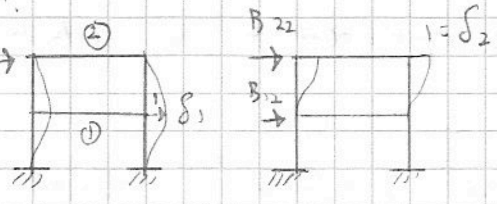
A e B sono matrici simmetriche.

$A_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial q_j} = A_{ji}$, $B_{ij} = -\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \cdot \partial q_j} = B_{ji}$ Con A a struttura diagonale

Pertanto $u \cdot A v = \sum_{ij} u_i A_{ij} v_j =$

$= \sum_{ij} u_i A_{ji} v_i = A u v$ analogamente $v \cdot B v = B u \cdot v$

Ex:



Per il teorema di Betti

$L_{AB} = B_{21} \cdot \delta_2$

$L_{BA} = B_{12} \cdot \delta_1$

$B_{21} \cdot \overset{1}{\cancel{\delta_2}} = B_{12} \cdot \overset{1}{\cancel{\delta_1}}$

$B_{12} = B_{21}$

Per simmetria del tensore elasticità. Inoltre A e B sono DEFINITE POSITIVE $\begin{cases} Au \cdot u > 0 & \forall u \neq 0 \\ Bu \cdot u > 0 \end{cases}$ essendo $T = \frac{1}{2} A \dot q \dot q$

T deve risultare > 0, $\dot q \cdot \dot q$ è > 0 e quindi $A > 0$.

Per B invece, $Bx = f$; $Bx \cdot x \geq 0$ essendo $x \cdot x > 0$, $B > 0$ $\forall x \neq 0$

Definisco l'AUTOVETTORE $Bu = \lambda A u$ (λ = autoval., u = autovett. di B risp. ad A)

$\det (B - \lambda A) = 0$.

Ho n radici che possono essere reali o complesse.

Dato un λ_i autovalore, sostituendolo trovo l'autovettore collegato u_i a meno di un coeff. moltiplicativo.

Impongo la normalizzazione $u^i A u^i = 1$

Gli autovettori corrisp. a due autovalori λ_i e λ_j distinti godono di una proprietà di ortogonalità:

$B u^{(i)} = \lambda_i A u^{(i)}$; $B u^{(j)} = \lambda_j A u^{(j)}$.

Moltiplico per u^j e u^i

$u^j B u^i = \lambda_i A u^j u^i$

$u^T B u^i = \lambda_j A u^j u^i$

essendo B sym $B u^i = B u^j$

da cui $0 = (\lambda_i - \lambda_j) A u^i u^j$

$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow A u^i \cdot u^j = 0$

Deve quindi essere $A u^i u^j = 0 \quad \forall \lambda_i \neq \lambda_j$

Considerando la normalizzazione, $\boxed{A u^{(i)} u^{(j)} = \delta_{ij}}$ $\begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Δ di Kronecker

Se un autovalore è radice multipla di molteplicità m dell'eq. caratteristica, allora a tale autovalore corrispondono m autovettori.

Dim. che autoval. $\in \mathbb{R}$:

Se per assurdo $\lambda_i = \alpha + i\beta$, $B u^i = \lambda A u^i$ esiste anche il coniugato $B U^{(i)*} = \lambda_i A U^{(i)*}$; moltiplicando come prima per U^i e u^{i*} e sottraendolo

$0 = (\lambda_i - \lambda_i^*) A u^i \cdot u^{i*}$ da cui $\lambda_i = \lambda_i^*$ e quindi λ_i è REALE. (ed inoltre anche positivo)

$\Downarrow$

Autovalori sono REALI e POSITIVI

Posso quindi ordinarli: $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$

La relazione $B u^i = \lambda_i A u^i$ in componenti diventa

$$\sum_s B_{rs} u_s^i = \lambda_i \sum A_{rs} u_s^i$$

$U_s^{(i)}$ → colonna; s → riga

$$U_{si} = \begin{bmatrix} U_1^{(1)} & U_1^{(2)} & \dots & U_1^{(n)} \\ \vdots & & & \\ U_n & \dots & \dots & U_n^n \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \Lambda_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i$$

Con queste matrici:

$$\sum_s B_{rs} U_{si} = \sum_s A_{rs} \sum_j U_{sj} \Lambda_{ji}$$

Ovvero $BU = AU\Lambda$

Analogamente

(38) $U^i A U^j = \delta_{ij}$, in componenti $\sum_r \sum_s U_r^i$

Sist. dinamici conservativi:

$$\underline{A}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{B}\,\underline{q} = \underline{0}$$ No f di dissipazione

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \\ q_n \end{bmatrix}$$ → spostamenti del sistema

$\underline{q}(0) = \underline{q}_0$, $\dot{\underline{q}}(0) = \dot{\underline{q}}_0$ A e B sym e def pos

$\underline{B}\,\underline{u} = \underset{\text{autoval.}}{\underline{\lambda}}\,\underline{A}\,\underline{u}$ → (autovettore di B risp. ad A)

Scrivibile anche come $(\underline{B} - \lambda\underline{A})\,\underline{u} = \underline{0}$.

Deve essere $\det(\underline{B} - \lambda\underline{A}) = 0$ e sviluppandolo si avrà $p^n(\lambda) = 0$ con n radici $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ $\lambda_1 \ldots \lambda_i \ldots \lambda_n$.

Imponiamo cond. scalare $\underline{u}^{(i)} \cdot \underline{A}\,\underline{u}^{(i)} = 1$ per eliminare indet.

Si ha anche $\underline{u}^{(i)} \cdot \underline{A} \cdot \underline{u}^{(j)} = 0$ Unendo si ha $\underline{u}^{(i)} \cdot A \cdot u^{(j)} = \delta_{ij}$ → op. di Kronecker

I λ sono però tutti $\in \mathbb{R}^+$ e ordinarie!

Se ordinabili, $\sum_{r,s} u_r^{(i)}\, A_{rs}\, u_s^{(j)} = \delta_{ij}$.

Introduciamo quindi U / $[U_{si}] = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} & \cdots & u_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ u_n^{(1)} & \cdots & u_n^{(n)} \end{bmatrix}$

e allora scriviamo:

$$\underline{U}^T\,\underline{A}\,\underline{U} = \underline{I}$$

Si def $[\Lambda_{rs}]$ con diagonale di λ e senza sommatoria si ha $\Lambda_{ij} = \delta_{ij}\,\lambda_i$

Cambio di variabili: $\underline{q} = \underline{U}\,\underline{\varphi}$ allora

$\ddot{\underline{q}} = \underline{U}\,\ddot{\underline{\varphi}}$ e sost: $\underline{A}\,\underline{U}\,\ddot{\varphi} + \underline{B}\,\underline{U}\,\varphi = \underline{0}$;

premolt. per $\underline{U}^T$ e si ha $\boxed{\ddot{\underline{\varphi}} + \underline{\Lambda}\,\underline{\varphi} = \underline{0}}$

Essendo Λ diag ho n eq. disaccoppiate.

φ: coord. normali.

C. iniziali: $\underline{q}(0) = \underline{U}\,\underline{\varphi}(0) = \underline{q}_0$. Molt. per $\underline{U}^{-1}$:

sappiamo che $\underline{U}^T\,\underline{A}\,\underline{U} = \underline{I}$ e quindi

$\underline{U}^{-1} = \underline{U}^T\,\underline{A}$, sost. $\underline{\varphi}(0) = \underline{U}^T\,\underline{A}\,\underline{q}_0$

Analogamente $\dot{\underline{\varphi}}(0) = \underline{U}^T\,\underline{A}\,\dot{\underline{q}}_0$

Quindi l'i-esima eq è $\ddot{\varphi}_i + \lambda_i \varphi_i = 0$ eq. di 1 moto armonico essendo $\lambda_i > 0$. Quindi scriviamo $\ddot{\varphi}_i + \omega_i^2 \varphi_i = 0$ la cui sol è

$\varphi_i = A_i \cos(\omega_i t + \alpha_i)$.

Dato $\underline{q} = \underline{U}\,\underline{\varphi}$, la generica compon. è data da

$q_j = \sum_{i=1}^{n} u_j^{(i)} \varphi_i$

Cons. 1 sola φ: $q_j = u_j^{(i)} \varphi_i$ ovvero

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{(i)} \\ \vdots \\ u_n^{(i)} \end{bmatrix} A_i \cos(\omega_i t + \alpha_i)$$

$\Downarrow$

40 "Oscillazioni caratteristiche" o "modi

normali di vibrazione".

Si può direttamente cercare sol del tipo

$\underline{q} = \underline{u} \cos(\omega t + \alpha)$. Sost:

$$-\omega^2 \underline{A}\, \underline{u} \cancel{\cos(\omega t + \alpha)} + \underline{B}\, \underline{u} \cancel{\cos(\omega t + \alpha)} = 0$$

$(\underline{B} - \omega^2 \underline{A})\underline{u} = \underline{0}$ con autoval $\lambda = \omega^2$.

Otteniamo gli $\omega_1 \dots \omega_m$ e $\forall\, \omega_i$ det. l'autovett $\underline{u}^{(i)}$.

$$\underline{q} = \sum_{k=1}^{m} A_k\, \underline{u}^{(k)} \cos(\omega_k t + \alpha_k)$$ Imp. c. iniz:

$\underline{q} = \underline{u}^{(i)}$ e $\underline{\dot{q}}_0 = \underline{0}$ Quindi

$$\underline{u}^{(i)} = \sum_k A_k\, \underline{u}^{(k)} \cos\alpha_k \quad e$$

$$\underline{0} = \sum_k (-\omega_k) A_k\, \underline{u}^{(k)} \underbrace{\operatorname{sen}\alpha_k}_{\Downarrow}, \; = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$$

$\underline{u}^{(i)} = \sum_k A_k\, \underline{u}^{(k)}$ valida se $A_k = \delta_{ki}$. Allora

$$\underline{q} = \underline{u}^{(i)} \cos(\omega_i t + \cancel{\alpha_i})$$

Sist. con 2 g.d.l.

$$m_1 \ddot{v}_1 = -k_1 v_1 + k_2 v_2$$
$$m_2 \ddot{v}_2 = -k_1 v_2 + k_2 v_1$$

Cerchiamo sol del tipo $\underline{q} = \underline{u} \cos \omega t$ di

$\underline{A}\, \underline{\ddot{q}} + \underline{B}\, \underline{q} = \underline{0}$

Anche qui si ottengono gli ω.

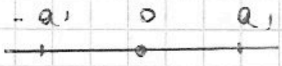
C. di norm.:

$$\begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} m = 1$$

$$\left(\left(u_1^{(1)}\right)^2 + \left(u_2^{(1)}\right)^2 \right) m = 1$$

Moto generico è c. lineare dei 2 moti e (in generale) non period.
Cons eq. del moto con $m = 1$ (e quindi $\frac{U}{\sqrt{m}} = \underline{U}$).

<u>Ellissoide</u> a 1 dim:  $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 1$

In generale ellissoide a n dim:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1 \quad \text{con } a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$$

Al sistema quindi associamo $\underline{B}\,\underline{v} \cdot \underline{v} = 1$ ovvero $\sum_{rs}^{2} B_{rs} v_r v_s = 1$. Passo in c. normali:

$\underline{v} = \underline{U}\,\underline{\varphi} \rightsquigarrow \underline{B}\,\underline{U}\,\underline{\varphi} \cdot \underline{U}\,\underline{\varphi} = 1$ ovvero

$\underline{U}^T \underline{B}\,\underline{U}\,\underline{\varphi} \cdot \underline{\varphi} = 1$ cioè $\underline{\Lambda}\,\underline{\varphi} \cdot \underline{\varphi} = 1$

$\lambda_1 \varphi_1^2 + \lambda_2 \varphi_2^2 = 1$. In forma canonica:

$\frac{1}{a_1^2} = \lambda_1$, $\frac{1}{a_2^2} = \lambda_2$. Sost. $\frac{\varphi_1^2}{a_1^2} + \frac{\varphi_2^2}{a_2^2} = 1$

Assi c. normali $\equiv$ assi ellisse!

Facciamo intersez. ellissoide e piano per origine e troviamo ellisse E'.

20/5/08

<u>Energia</u>

(42) In sist. conservativo non si consuma.

$-V$: energia potenziale

Com. sistemi forzati.

<u>Forzanti armoniche</u>

Trasf. da c. lagrangiane generali a c. normali tramite $\underline{q} = \underline{U}\,\underline{\varphi}$ con $[U_{sr}] = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} & \dots & u_1^{(n)} \\ \vdots & & \\ u_n^{(1)} & \dots & u_n^{(n)} \end{bmatrix}$

e si ha $\ddot{\underline{\varphi}} + \underline{\Lambda}\,\underline{\varphi} = \underline{U}^T \underline{f}^\circ \sin(\bar{\omega}t + \varphi)$ con

$\underline{U}^T \underline{\varphi}^\circ = \sum_s \underset{(u_r^{(s)})}{U_{sr}} f_r^\circ$

Ho in proprietà di risonanza $(\bar{\omega} = \omega_i)$

<u>Forzante con legge qualsiasi</u>

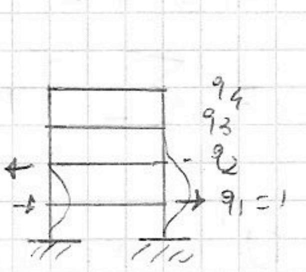
Generica $\underline{f}$, si può studiare la singola i-esima forz. e sommare gli effetti

<u>Sistemi smorzati:</u>

Rimane $\underline{U}^T \underline{C}\,\underline{U}$; se diventa diagonale ho eq. disaccoppiate.

Di solito smorz. è assegnato come % delle freq. caratt.

Esempio telaio:



$\times$ calcolare m. elastica imprimo $q_1 = 1$ e vedo spost. $\frac{12EJ \cdot 2}{h^3} \to 1°$ mont. $=$

$= k\ 2$. Sul 2° si applica una forza negativa per avere . Lo stesso applicando q_2 e così calcolo le colonne di $\underline{B}$

Det. i λ di $\underline{B}\,\underline{u} = \lambda \underline{A}\,\underline{u}$ e poi sostituendo in $(\underline{B} - \omega^2 A)\,\underline{u} = 0$ ottengo $\forall \lambda_i$ l'autovett u_i.

1° autovett: tutti stesso segno

2° " : 1 cambio di "

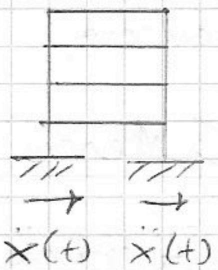
3 " : 2 " " " e così via

Proprietà importante.

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= A\, u_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha) \\ q_2 &= A\, u_2^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha) \\ q_3 &= A\, u_3^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha) \\ q_4 &= A\, u_4^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha) \end{aligned}\right] \rightarrow 1° \text{ modo di vibr.}$$

Se c'è sisma ho moto a base pilastri.

Eq. moto relativo.



$$U^T \underline{A}\,\ddot{x} = \sum_r U_{ri} (\underline{A}\,\underline{\ddot{x}})_r =$$

$$= \sum_r \sum_s U_{ri} A_{rs} \ddot{x}_s =$$

Cons generica $A = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_m \end{bmatrix}$, ovvero masse distinte.

$$= \sum_r \underbrace{U_{ri}}_{\to u_r^{(i)}} m_r \ddot{x}$$

$$U^T A U = I \;;\; AU = U^{-T} \;;\; A = U^{-T} U^{-1} = (U U^T)^{-1}$$

$$\varepsilon^{(1)}\% = \frac{g_1}{g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_n^2} \times 100$$

(44) Telai con masse concentrate nei nodi

Cons nodo come corpo rigido con inerzia di rotazione trascurabile. A ogni nodo si attribuisce il peso di metà dei traversi che ad esso concorrono. Eq moto ∀ nodo

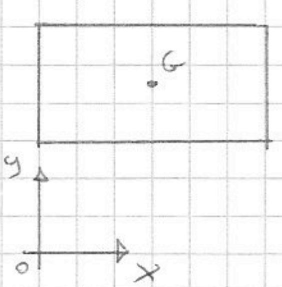
$$m \ddot{y}_p = R_y^e \; ; \; m \ddot{z}_n = R_z^e \; ; \; 0 = M_x^e$$

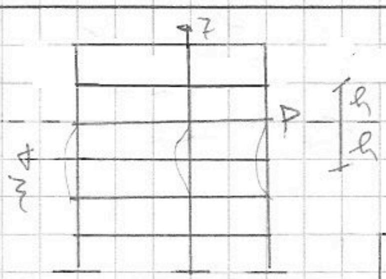
$\ddot{y}_p \to \ddot{v}_p$; $\ddot{z}_n \to \ddot{w}_n$

Possiamo mettere x ultime eq. equil. a rotazione.
Sistema + rigido ha ω caratt + elevate ed ellisse è + piccola.

23/05/08

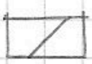
$$m\ddot{x} = R_x^e$$
$$m\ddot{y} = R_y^e$$
$$C\ddot{\varphi} = M_z^e$$



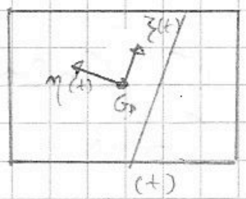


Cons. pilastri con stessa inerzia.

MOTO DI TELAI SPAZIALI

Applicazione spaziale del metodo degli spost.
Sist. di c. locali x valutare reaz. (ex. traccia impalcato e  spost in c. globali e

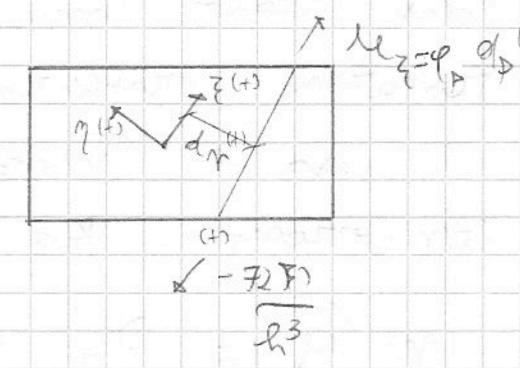
$$\underline{s}_p = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}$$; In c. locali con origine nel baricentro:



$$\underline{\hat{s}}_p = \begin{bmatrix} u_p^{\xi} \\ u_p^{\eta} \\ \varphi_p \end{bmatrix} \qquad \underline{\hat{M}}_p^{(t)} = \begin{bmatrix} R^{\xi} \\ R^{\eta} \\ R^{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p^{\xi} \\ u_p^{\eta} \\ \varphi_p \end{bmatrix}$$

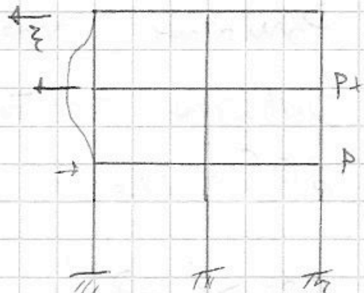
Assegno $\xi = 1$ e quindi una forza di $6 \times \frac{12EI}{h^3}$ che agirà sul telaio (in dir. opposta).

$$= -\frac{72EI}{h^3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_p^{(t)} \\ 0 & 0 & 0 \\ d_p^{(t)} & 0 & d_p^{(t)} \cdot d_p^{(t)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_p^{\xi} \\ M_p^{\eta} \\ \varphi_p \end{bmatrix} +$$



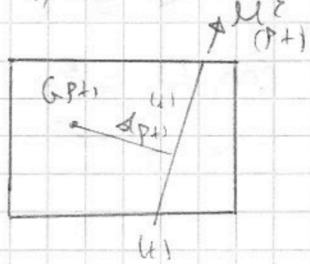
Cons. impalcato superiore $p+1$ che subisce $M_\xi = 1$

$$+\frac{36EI}{h^3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{(p+1)}^{(t)} \\ 0 & 0 & 0 \\ d_p^{(t)} & 0 & d_p^{(t)}\, d_{p+1}^{(t)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{(p+1)\xi}^{(t)} \\ M_{(p+1)\eta}^{(t)} \\ \varphi_{(p+1)}^{(t)} \end{bmatrix} +$$



Non è detto che $G_{p+1} = G_p$

$$M_{(p+1)}^{\xi} = \varphi_{p+1}\, d_{(p+1)}^{(t)}$$

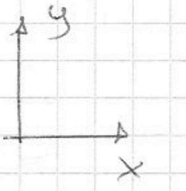


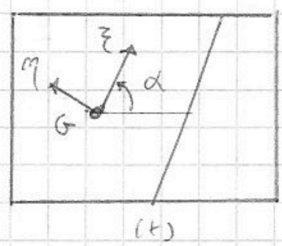
Mentre nel piano inferiore:

$$+\frac{36EI}{h^3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{(p-1)}^{(t)} \\ 0 & 0 & 0 \\ d_p^{(t)} & 0 & d_p^{(t)}\, d_{(p-1)}^{(t)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{(p-1)}^{\xi} \\ M_{(p-1)}^{\eta} \\ \varphi_{(p-1)} \end{bmatrix}$$

Al globale:

Cons. matrice di trasform.





$$Q = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sist. loc.

$$\underline{\Pi}_p = \underline{Q}\,\underline{\hat{\Pi}}_p \quad ; \quad \underline{s}_p = \underline{Q}\,\underline{\hat{s}}_p$$

$$\underline{\hat{\Pi}}_p = \left(\underline{\hat{k}}_{m}^{(t)}\,\underline{\hat{s}}_p + \underline{\hat{k}}_{p(p+1)}^{(t)}\,\underline{\hat{s}}_{(p+1)} + \underline{\hat{k}}_{p(p-1)}^{(t)}\,\underline{\hat{s}}_{(p-1)}\right)$$

 Nel globale:

$\underline{k}_{pp} = \underline{Q}\,\hat{\underline{k}}_{pp}\,\underline{Q}^T$. Se $\underline{u} = \underline{Q}\,\hat{\underline{u}}$ allora
$\underline{v} = \underline{Q}\,\hat{\underline{v}}$

$\underline{v} = \underline{T}\,\underline{u}$, $\hat{\underline{v}} = \hat{\underline{T}}\,\hat{\underline{u}} = \hat{\underline{T}}\,\underline{Q}^T\,\underline{u}$ e sostituendo

$\underline{v} = \underline{Q}\,\hat{\underline{T}}\,\underline{Q}^T\,\underline{u}$; quindi $\underline{T} = \underline{Q}\,\hat{\underline{T}}\,\underline{Q}^T$

Allora

$\underline{k}_{pp} = \underline{Q}\,\hat{k}_{pp}\,\underline{Q}^T$ ecc.

Trasformiamo nel globale:

$$\underline{\Pi}_p^{(t)} = -\left(\underline{k}_{pp}^{(t)}\,\underline{s}_p + \underline{k}_{p(p+1)}^{(t)}\,\underline{s}_{(p+1)} + \underline{k}_{p(p-1)}^{(t)}\,\underline{s}_{(p-1)}\right)$$

Diversi telai agiscono sull'impalcato:

$$\sum_{(t)} \underline{\Pi}_p^{(t)} = \qquad \underline{A}_p \quad \ddot{\underline{s}}_p = \begin{bmatrix} m\ddot{x}_p \\ m\ddot{y}_p \\ C\ddot{\varphi}_{pp} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_p = \begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & \boxed{C} \end{bmatrix}$$ mom. inerzia

Con $m = \mu\,a\,b$ e $C = \int \mu(\xi^2 + \eta^2)\,dA =$

$$= \left[\frac{\xi^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} \mu b + \left[\frac{\eta^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2} \mu a = \frac{a^3 b}{12}\mu + \frac{b^3 a}{12}\mu$$

Allora

$$\sum_{(t)} \underline{\Pi}_p^{(t)} = -\overbrace{\left(\sum_{(t)} \underline{k}_{pp}^{(t)}\right)}^{\underline{K}_{pp}} \underline{s}_p - \overbrace{\left(\sum_{(t)} k_{p(p+1)}^{(t)}\right)}^{\underline{k}_{p(p+1)}} \underline{s}_{(p+1)} +$$

$$- \underbrace{\left(\sum_{(t)} k_{p(p-1)}^{(t)}\right)}_{\underline{k}_{p(p-1)}} \underline{s}_{(p-1)} \qquad \text{e quindi}$$

$$\underline{A}\,\ddot{\underline{s}}_p + \underline{k}_{pp}\,\underline{s}_p + \underline{k}_{p(p+1)}\,\underline{s}_{(p+1)} + \underline{k}_{p(p-1)}\,\underline{s}_{(p-1)} = \underline{0}$$

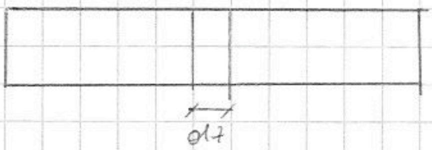
Con $p = 1 \dots n$ (numero di piani)

$$\boxed{\underline{A}\,\ddot{\underline{\xi}} + \underline{B}\,\underline{\xi} = 0} \qquad \text{con } \underline{\xi} = [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_n]^T$$

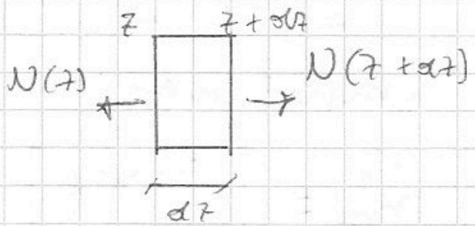
Con gli spost. det. le sollecitazioni nei pilastri e si effettuano le verifiche.

Sistemi continui

OSCILLAZIONI LONGITUDINALI DI UNA TRAVE



Cons. elemento dz e scrivo eq. del moto:



$$\rho A\,dz\,\ddot{w} = -N(z) + N(z+dz)$$

$$= -\cancel{N(z)} + \cancel{N(z)} + \frac{\partial N}{\partial z}(z)\,dz$$

Essendo $N = EA\,w'$, si ha

$\rho A\,\ddot{w} = EA\,w''$ e ovvero $c^2 w'' = \ddot{w}$.

Cerchiamo sol. a var. separate:

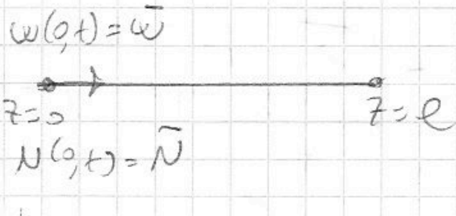
$w(z,t) = \varphi(z)\,\psi(t)$:

$$c^2 \varphi'' \psi = \varphi \ddot{\psi} \to c^2 \overbrace{\frac{\varphi''}{\varphi}}^{\text{cost}} = \overbrace{\frac{\ddot{\psi}}{\psi}}^{\text{cost.}} = -\omega^2$$

sol. saranno c. lineari di sin e cos

Devo avere sol periodiche x oscillare.

Condizioni al bordo



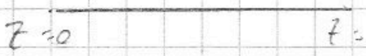
Quindi $\varphi(0)\,\psi(t) = \overline{w} \to$ nelle osc. libere è nulla e $\varphi(0) = 0$ x forza.

$w(z,0) = w_0(z)$ e $\dot{w}(z,0) = \dot{w}_0(z)$

$w(0,t)=0 \;,\; w'(l,t)=0 \;,\; N(l,t)=0 \;,\; \varphi'(l)=0$

Con trave incastrata.

26/5/08



$z=0 \qquad z=l$

$w(0,t)=\bar{w} \qquad N(l,t)=EA\, w'(l,t)=\tilde{N} \qquad w(z,0)=w_0(z)$

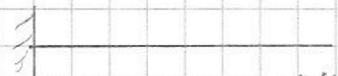
$\dot{w}(z,0)=\dot{w}_0(z)$

$c^2 w''=\ddot{w}$

$w(z,t)=\varphi(z)\,\psi(t) \qquad \begin{cases} \varphi''+\dfrac{\omega^2}{c^2}\varphi=0 \\ \ddot{\psi}+\omega^2\psi=0 \end{cases}$

$\varphi(z)=a\cos\left(\dfrac{\omega}{c}z+\alpha\right)$

$\psi(t)=b\cos(\omega t+\beta)$. Oscillaz. libere con c. omogenee (al bordo $w(0,t)=0$)



$w(0,t)=0 \qquad N(l,t)=0$

$\varphi(0)=0 \qquad EA\varphi'(l)=0$

$a\cos\alpha=0 \Rightarrow \alpha=\pm\dfrac{\pi}{2}$

$\varphi(z)=\mp a\sin\dfrac{\omega}{c}z$

(a è ancora indeterminata)

$a\dfrac{\omega}{c}\cos\dfrac{\omega l}{c}=0$

$\boxed{\dfrac{\omega_n l}{c}=(2n-1)\dfrac{\pi}{2}} \qquad \varphi_n(z)=a_n\sin\dfrac{\omega_n}{c}z$

$\psi_n=b_n\cos(\omega_n t+\beta_n)$

$w_n(z,t)=A_n\sin\dfrac{\omega_n}{c}z\cos(\omega_n t+\beta_n)$

A_n e B_n ancora indeterm. La sol generale del moto è

$$w(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\omega_n}{c}z\cos(\omega_n t+\beta_n)$$

Usiamo le c. iniziali

$$w_0(z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\omega_n}{c}z\cos\beta_n$$

$$\dot{w}_0(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}A_n\omega_n\sin\frac{\omega_n}{c}z\sin\beta_n$$

Si sfrutta ortogonalità x ricavare la serie:

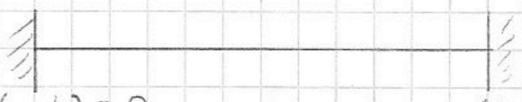
$$\int_0^l \sin\frac{\omega_m z}{c}\sin\frac{\omega_n z}{c} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ l/2 & \text{se } m = n \end{cases}$$

Molt. w_0 per $\dfrac{\sin \omega_m z}{c}$ e integro da 0 a l:

Tutti nulli tranne:

$$\begin{cases} A_m \cos\beta_m = \dfrac{\int_0^l \sin\frac{\omega_m z}{l}\cdot w_0(z)\,dz}{\int_0^l \sin^2\frac{\omega_m z}{l}\,dz} \\[2ex] A_m \sin\beta_m = -\dfrac{\int_0^l \dot{w}_0(z)\sin\frac{\omega_m}{c}z\,dz}{\int_0^l \sin^2\frac{\omega_m}{c}z\,dz} \end{cases} \Rightarrow \text{det. } A_m \text{ e } \beta_m \text{ (tra } -\pi \text{ e } \pi)$$

Così via $\forall$ c. di vincolo:



$w(0,t)=0$ $\qquad$ $w(l,t)=0$

$\varphi(0)=0$ $\qquad$ $\varphi(l)=0$

$$\varphi = a\cos\left(\frac{\omega}{c}z+\alpha\right)$$

$$\varphi(0) = a\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = \cancel{\mp}\, a\sin\frac{\omega}{c}z$$

$$\varphi(l) = a\sin\frac{\omega l}{c} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\omega_n l}{c} = n\pi \quad \text{con } n = 1, 2, \ldots$$

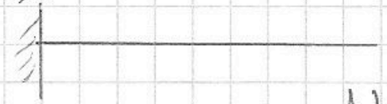
In continuo $\exists$ ∞ ω_n e ∞ autofunz.

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n &= a_n \sin\frac{\omega_n z}{c} \\ \psi_n &= b_n\cos(\omega_n t+\beta_n) \end{aligned}\right\} w_n = A_n\sin\frac{\omega_n z}{c}\cos(\omega_n t+\beta_n)$$

50 $\quad w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$

Oscillazioni forzate

Ex:



$\rightarrow F = \bar{F} \sin \omega t$

$N(\ell,t) = \bar{F} \sin \omega t$

$w(0,t) = 0$

$EA\, w'(\ell,t) = \bar{F} \sin \omega t$

Sempre da risolvere $c^2 w'' = \ddot{w}$ ma cond. non sono + omogenee, c'è int. particolare da determinare:

$$w_*(z,t) = \varphi(z) \sin \omega t$$

$$c^2 \varphi'' = -\varphi \omega^2 \rightarrow \varphi'' + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi = 0$$

ω è noto. La sol. è $\varphi(z) = a \cos\left(\frac{\omega}{c} z + \alpha\right)$

da det.

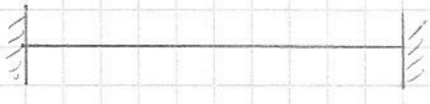
1) $\varphi(0) = 0$; $a \cos \alpha = 0$; $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$; $\varphi(z) = \boxed{a} \sin \frac{\omega}{c} z$

2) $EA \frac{\omega}{c} a \cos \frac{\omega \ell}{c} = \bar{F}$ $\left[EA \varphi' \cancel{\sin \omega t} = \bar{F} \cancel{\sin \omega t} \right]$

$$a = \frac{\bar{F} c}{EA\, \omega \cos \frac{\omega \ell}{c}} \quad , \quad w_* = \frac{\bar{F} c}{EA\, \omega \cos \frac{\omega \ell}{c}} \sin \frac{\omega}{c} z \sin \omega t$$

(int. particolare)

Ex:



$w(\ell,t) = \bar{w} \sin \omega t$

(assegnamo spost. e calc. la forza)

$c^2 w'' = \ddot{w}$, $w_*(z,t) = \varphi(z) \sin \omega t$

$\varphi'' + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi = 0$, $\varphi = a \cos\left(\frac{\omega}{c} z + \alpha\right)$

Sul bordo sx $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$

$\varphi = a \sin \frac{\omega}{c} z$. Ora x det a impongo cond dx:

$a \sin \frac{\omega}{c} l = \bar{w}$; $a = \dfrac{\bar{w}}{\sin \frac{\omega l}{c}}$

$$w_*(z,t) = \frac{\bar{w}}{\sin \frac{\omega l}{c}} \sin \frac{\omega z}{c} \cdot \sin \omega t$$

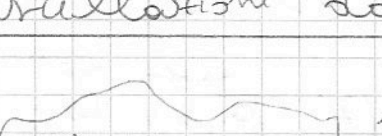
La f che agisce sarà:

$$F(l,t) = EA\, w_*'(l,t) = EA \cdot \frac{\bar{w}}{\sin \frac{\omega l}{c}} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \cos \frac{\omega l}{c} \sin \omega t$$

Se imponiamo $\dfrac{\bar{F} c}{EA \operatorname{cotg} \frac{\omega l}{c}} = \bar{w}$ riotterremo $\bar{F}$ nel probl. di prima.

<u>Oscillazioni dovute a carico distribuito:</u>

$\bar{p}(z,t)$ $\qquad \bar{p} + EA\, w'' = \rho A\, \ddot{w}$



Dividiamo per ρA

$$p \leftarrow \frac{\bar{p}}{\rho A} + \frac{E}{\rho} w'' = \ddot{w}$$ e si ha

$c^2 w'' + p = \ddot{w}$ Cerchiamo sol. del tipo

$$w(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)\, g_n(t) \; ; \; \varphi_n'' = -\frac{\omega_n^2}{c^2} \varphi_n$$

$$c^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'' g_n \right) + p = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \ddot{g}_n$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \varphi_n g_n + p = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \ddot{g}_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(\ddot{g}_n + \omega_n^2 g_n \right) = p$$. Molt per φ_n e $\int_0^l$

Otteniamo:

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{\int_0^l p\,\varphi_n\,dz}{\int_0^l \varphi_n^2\,dz} \rightarrow \text{eq. moto arm. smorzato}$$

Caso in cui $\bar{p}(z,t) = \hat{p}(z)\sin\omega t$

$$p = \frac{\bar{p}}{\rho A} = \left(\frac{\hat{p}(z)}{\rho A}\right)\sin\omega t$$

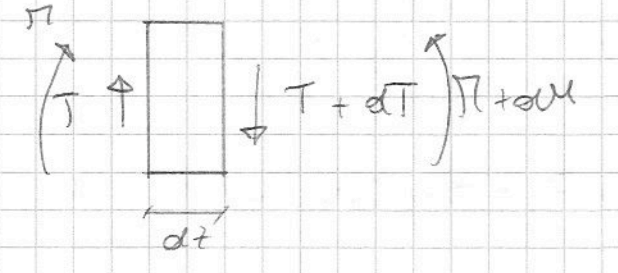
Si avrà:

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{\int_0^l \frac{\hat{p}(z)}{\rho A}\,\varphi_n\,dz}{\int_0^l \varphi_n^2\,dz}\sin\omega t = P_n \sin\omega t$$

$$q_n = R_n\cos(\omega_n t + \alpha_n) + \frac{P_n}{|\omega^2 - \omega_n^2|}\sin\omega t$$

$\forall n\ \exists$ possibilità di risonanza.

Oscillazioni flessionali



$$-T + T + dT = \rho A \ddot{v}\,dz$$
$$\downarrow$$
$$\frac{dT}{dz} = \rho A \ddot{v}$$

$$-M + M + dM - T\,dz = 0$$
$$\downarrow$$
$$\frac{dM}{dz} = T$$

Combinandolo:

$$\frac{d^2M}{dz^2} = \rho A \ddot{v}$$

Supponendo EI cost. $\quad -EI\,v^{IV} = \rho A \ddot{v}$

$$\frac{EI}{\rho A} v^{IV} + \ddot{v} = 0$$

Si aggiungono C. al bordo

$v(0,t)$ $\qquad -EI\, v'''(0,t)$

$-v'(0,t)$ $\qquad -EI\, v''(0,t)$ (in alternativa, o assegno F o assegno spost.)

$v(z,0)$

$\dot{v}(z,0)$. Vogliamo sol. a variabili separate: $v(z,t) = \varphi(z)\,\psi(t)$

$$\frac{EI}{\rho A}\frac{\varphi^{IV}}{\varphi} = -\frac{\ddot{\psi}}{\psi} = \text{costante} = \omega^2$$

Poniamo $\lambda^4 = \dfrac{\omega^2 \rho A}{EI}$; $\varphi^{IV} - \lambda^4\varphi = 0$,

$\ddot{\psi} + \omega^2\psi = 0$. $\psi = b\cos(\omega t + \beta)$

$\varphi = A\sin\lambda z + B\cos\lambda z + C\sinh\lambda z + D\cosh\lambda z$

x det. le cost. usiamo C. al bordo. Se C. omogenee ho sist. omogeneo x det.

$\forall\ \lambda \dots \lambda_n$ determino ω

Imponendo det. mat. coeff $=0$ ottengo λ_n.

$\forall\ \omega_n$ ho $\psi_n = b_n\cos(\omega_n t + \beta_n)$

$\varphi_n = A_n\sin\lambda_n z + B_n\cos\lambda_n z + \dots$

$v_n(z,t) = \varphi_n\,\psi_n$

Dim. $\exists$ prop. di ortogonalità (φ è + complessa):

$$\int_0^l \varphi_n\,\varphi_r\, dz \quad \text{con} \quad \varphi_r^{IV} = \lambda_r^4\,\varphi_r$$

(54) $$\lambda_r^4 \int_0^l \varphi_n\varphi_r = \int_0^l \varphi_n\varphi_r^{IV} = \int_0^l (\varphi_n\varphi_r''')' +$$

$$-\int_0^l \varphi_n' \varphi_r''' = \left[\varphi_n \varphi_r''' - \varphi' \varphi_r''\right]_0^l + \int_0^l \varphi_n'' \varphi_r'' =$$

$$= \left[\varphi_n\varphi_r''' - \varphi_n'\varphi_r'' + \varphi_n''\varphi_r'\right]_0^l - \int_0^l \varphi_n'''\varphi_r' =$$

$$\left[\varphi_n\varphi_r''' - \varphi_n'\varphi_r'' + \varphi_n''\varphi_r' - \varphi_n'''\varphi_r\right]_0^l + \int_0^l \varphi_n^{IV}\varphi_r =$$

(passate le derivate int. per parti 4 volte)

$\lambda_r^4 \int_0^l \varphi_n\varphi_r$; sostituisco φ_n^{IV} e quindi

$$= \left[\ \dots\ \right]_0^l + \lambda_n^4 \int_0^l \varphi_n\varphi_r \quad \text{quindi}$$

$$\left(-\lambda_n^4 + \lambda_r^4\right)\int_0^l \varphi_n\varphi_r = \left[\ \cancel{\dots}\ \right]_0^l$$

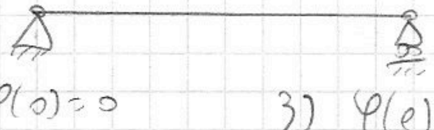
$\Downarrow$

φ_n, φ_r agli estremi sono sro UGUALI, o $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''' = 0$.

$\Downarrow$

$$\boxed{\left(\lambda_r^4 - \lambda_n^4\right)\int_0^l \varphi_n\varphi_r = 0} \quad \text{CVD}$$

Ex:



1) $\varphi(0)=0$
2) $\varphi''(0)=0$
3) $\varphi(l)=0$
4) $\varphi''(l)=0$

1) $\varphi(z) = A\sin\lambda z + B\cos\lambda z + C\sinh\lambda z + D\cosh\lambda z$

H5 $B + D = 0$

2) $\varphi''(z) = -\lambda^2 A\sin\lambda z - \lambda^2 B\cos\lambda z + \lambda^2 C\sinh\lambda z + \lambda^2 D\cosh\lambda z$

e quindi $-B+D=0 \Rightarrow B=D=0$.

3) $A\sin\lambda l + C\sinh\lambda l = 0$

4) $-A \sin \lambda l + C \sinh \lambda l = 0$

Deve essere $2 \sin \lambda l \underbrace{\sinh \lambda l}_{} = 0$

↳ nullo solo se $\lambda l = 0$,

ovvero $\lambda = 0$ ma φ sarebbe costante, non va bene $\Rightarrow$

$\sin \lambda l = 0$ ovvero $\lambda l = n\pi$.

Quindi:

$$\varphi_n(z) = A \sin \lambda_n z \quad \text{con } \lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad e$$

ottieniamo $\psi_n = b_n \cos(\omega_n t + \beta_n)$ e

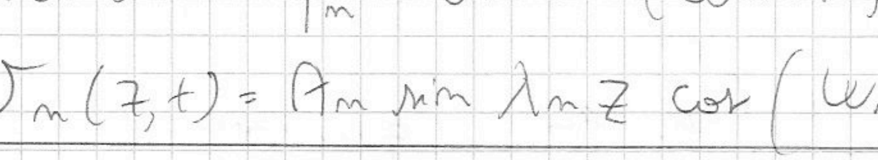
$$\underline{v_n(z,t) = A_n \sin \lambda_n z \cos(\omega_n t + \beta_n)}$$

Sol. generale e':

$$\boxed{v(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n z \cos(\omega_n t + \beta_n)}$$

27/5/08

Metodo degli spostamenti per la trave continua

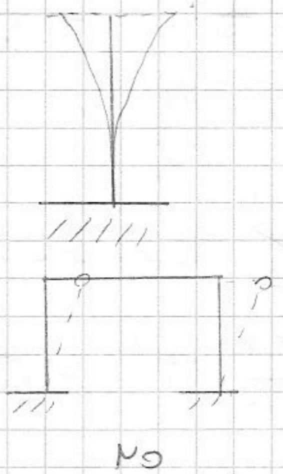


$$\left(k_{BB}^{(1)} + k_{BB}^{(2)}\right)\varphi_B + k_{BC}^{(2)}\varphi_C = 0$$
$$k_{CB}^{(2)}\varphi_B + \left(k_{CC}^{(2)} + k_{CC}^{(3)}\right)\varphi_C + k_{CD}^{(3)}\varphi_D = 0$$
$$k_{DC}^{(3)}\varphi_C + \left(k_{DD}^{(3)} + k_{DD}^{(4)}\right)\varphi_D = 0$$

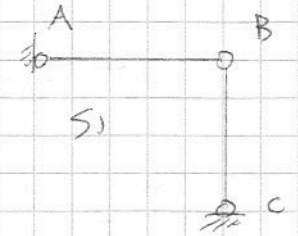
Impongo nullo il determinante per avere soluzioni non nulle.

56 Ottenute le ∞ freq. caratt. devo det le f. di forma, integrando $\varphi_n^{IV} = (\lambda(\omega_n))^4 \varphi_n$

Telai a nodi fissi



Trascuro def. assiale travi
Lo verifico sost. ai nodi incastro le cerniere e vedere eventuali spost. rigidi.
Cons. metodo delle forze.



Telai a nodi spostabili

Cons. asta isolata dal telaio e ci calcoliamo la mat. di rigidezza

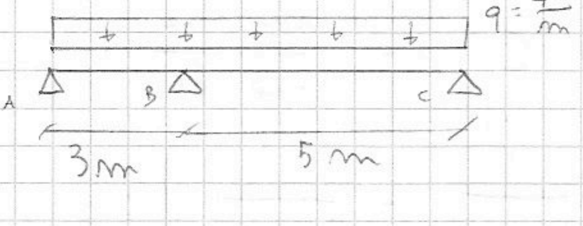
$$\begin{bmatrix} R_{pq}^{5} \\ R_{qp}^{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{h}_{33} & \bar{h}_{36} \\ \bar{h}_{63} & \bar{h}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p^{5} \\ u_q^{5} \end{bmatrix} \sin wt$$

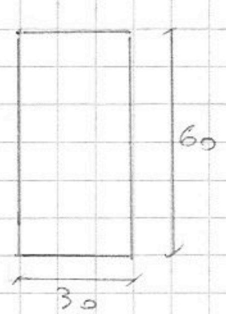
$$\hat{T}_p = \begin{bmatrix} m_{pq} \\ R_{pq}^{\eta} \\ R_{pq}^{\xi} \end{bmatrix} \qquad \hat{s}_p = \begin{bmatrix} \varphi_{p_\eta} \\ u_p \\ u_p^{\xi} \end{bmatrix} \qquad \hat{h}_{pp} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}_{33} \end{bmatrix}$$

$$\hat{h}_{pq} = \begin{bmatrix} h_{13} & h_{14} & 0 \\ h_{23} & h_{24} & 0 \\ 0 & 0 & h_{36} \end{bmatrix} \; ; \quad h_{pp}^{a} = \underline{Q}\, \hat{h}_{pp}^{(a)}\, \underline{Q}^{T}$$

Esercitazione

30/5/08





$q = 4 \cdot 10^{4}\ N/m$

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{30 \times 60^3}{12} = 5{,}4 \cdot 10^{5}\ cm^4 = 5{,}4 \cdot 10^{-3}\ m^4$$

$$E = 300.000\ \frac{kg}{cm^2} = 3 \cdot 10^{10}\ \frac{N}{m^2}$$

$k = EJ$ = rigidezza flessionale $= 1,62 \cdot 10^{8} \; N \cdot m^{2}$

$\rho A = \frac{q}{g} = 4 \cdot 10^{3} \; \frac{kg}{m}$ (massa)

• I metodo di soluzione: METODO D' INTEGRAZIONE

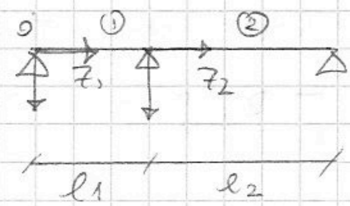
$$\frac{EJ}{\rho A} v^{IV} + \ddot{v} = 0 \; ; \quad v(z,t) = \varphi(z)\psi(t)$$

$$\underline{\varphi^{IV} - \lambda^4 \varphi = 0} \qquad \lambda^4 = \frac{\omega^2 \rho A}{EJ}$$

$$\varphi^{(1)}(z) = A \sin(\lambda z) + B \cos(\lambda z) + C \sinh(\lambda z) + D \cosh(\lambda z)$$

$$\varphi^{(2)}(z) = X \sin(\lambda z) + Y \cos(\lambda z) + W \sinh(\lambda z) + Z \cosh(\lambda z)$$

Cond. al contorno:



$\varphi^{(1)}(0) = 0$ $\quad \varphi^{(2)}(l_2) = 0$ $\quad \varphi^{(1)}(l_1) = 0$

$\varphi''(0) = 0$ $\quad \varphi^{(2)''}(l_2) = 0$ $\quad \varphi^{(2)}(0) = 0$

appoggio A $\quad$ appoggio B

$\underline{Y + Z = 0, \; Z = -Y}$

$B + D = 0$

$-B + D = 0 \; \to \underline{B = D = 0}$

$-\varphi^{(1)\,V}(\lambda_1) = -\varphi^{(2)\,V}(0) \to Y = A \sin \lambda l_1$

$-\cancel{EJ}\,\varphi''_{(1)}(l_1) = -\cancel{EJ}\,\varphi''_{(2)}(0)$

$$\begin{cases} X \sin \lambda l_2 + Y \cos \lambda l_2 + W \sinh \lambda l_2 + Z \cosh \lambda l_2 = 0 \\ -X \sin \lambda l_2 - Y \cos \lambda l_2 + W \sinh \lambda l_2 + Z \cosh \lambda l_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} Y = -X \,\mathrm{tg}\, \lambda l_2 \\ Z = -W \,\mathrm{tgh}\, \lambda l_2 \end{matrix}$$

$$A \,\mathrm{sen}\, \lambda l_1 + C \sinh \lambda l_1 = 0 \Rightarrow C = -A \frac{\sin \lambda l_2}{\sinh \lambda l_1}$$

$$A \sin \lambda l_1 \left(\frac{1}{\mathrm{tgh}\, \lambda l_1} + \frac{1}{\mathrm{tgh}\, \lambda l_2} - \frac{1}{\mathrm{tg}(\lambda l_1)} - \frac{1}{\mathrm{tg}(\lambda l_2)} \right) = 0$$

A non può essere nullo altrimenti anche le altre sarebbero nulle

È nullo il termine tra parentesi:

$$Y = A \sin \lambda l_1 \qquad Z = -A \sin \lambda l_1$$

$$X = -A \frac{\sin \lambda l_1}{tg\, \lambda l_2} \qquad B = D = 0$$

$$W = A \frac{\sin \lambda l_1}{tgh\, \lambda l_2} \qquad C = -A \frac{\sin \lambda l_1}{\sinh \lambda l_1}$$

$$\varphi^{(1)}(z) = A \sin \lambda z - \left(\frac{\sin \lambda l_1}{\sinh \lambda l_1}\right) \sinh \lambda z$$

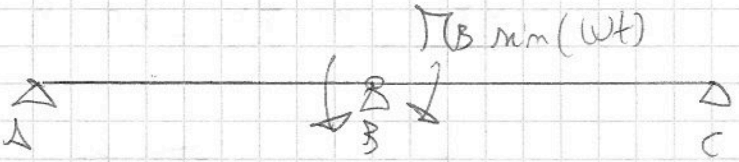
$$\varphi^{(2)}(z) = A \sin \lambda l_1 \left(-\frac{1}{tg\, \lambda l_2} \sin \lambda z + \cos \lambda z + \frac{1}{tgh(\lambda l_2)} \sinh \lambda z - \cosh \lambda z \right)$$

Sono già riferite al loro sistema di riferimento

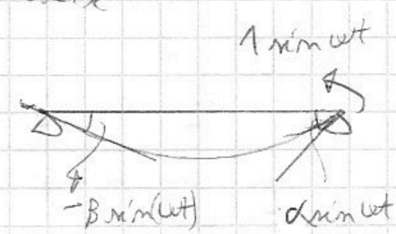
$$\varphi^{(1)}(z_1) = A \sin \lambda z_1 - \left(\frac{\sin \lambda l_1}{\sinh \lambda l_1}\right) \sinh \lambda z_1$$

$$\varphi^{(2)}(z_2) = A \sin \lambda l_1 \left(-\frac{1}{tg\, \lambda l_2} \sin \lambda z_2 + \cos \lambda z + \frac{1}{tgh\, \lambda l_2} \sinh \lambda z_2 - \cosh \lambda z_2 \right)$$

• II metodo di soluzione: METODO DELLE FORZE



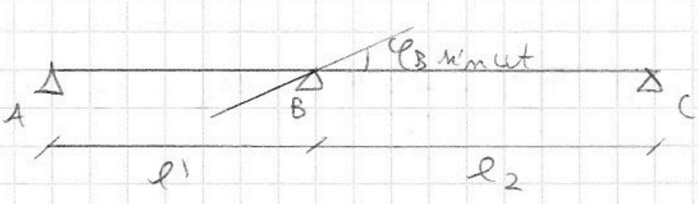
$$\varphi_B^{(S)} = \varphi_B^{(D)}$$



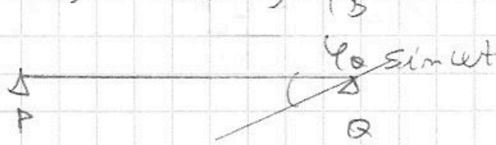
$$M_B \alpha_1 = -M \alpha_2 \qquad M_B(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

$$\alpha = \frac{l}{3EI\lambda l}\left(\frac{1}{tgh(\lambda l)} - \frac{1}{tg\, \lambda l}\right) \rightarrow \frac{1}{tgh\, \lambda l_2} + \frac{1}{tgh\, \lambda l_2} - \frac{1}{tg\, \lambda l_2} - \frac{1}{tg\, \lambda l_2} = 0$$

• III metodo di soluzione: METODO DEGLI SPOSTAMENTI

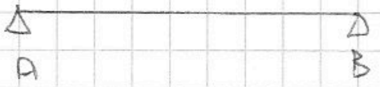


$$\left(k_{BB}^{(1)} + k_{BB}^{(2)}\right) \bar{\varphi}_B = 0$$



~~Min mma~~ $= \hat{k}_{aa}$ φ ~~minatt~~ $\qquad \hat{k}_{aa} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right) = \frac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_1\alpha_2} = 0$

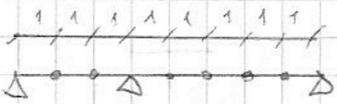
$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \rightarrow$ già trovato con il metodo delle forze.



$\varphi_{(1)}(0) = 0 \qquad \varphi''_{(1)}(l_2) = 0$

$\varphi''_{(1)}(0) = 0 \qquad -\varphi'_{(1)}(l_1) = \varphi_B$

• IV metodo: METODO DELLE MASSE CONCENTRATE



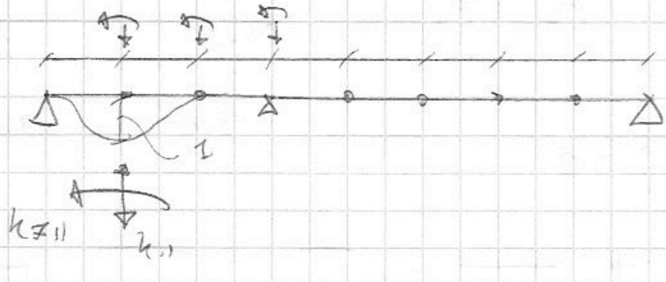
$a = 1\ m$ Passo dal continuo ad un sistema discreto a masse concentrate.

$m = \frac{q \cdot 1}{g} = 4 \cdot 10^3\ kg\ m \qquad \frac{k}{a} = \frac{EI}{a} = 1{,}62 \cdot 10^8\ N\,m$

$\frac{k}{a^2} = 1{,}62 \cdot 10^8\ N \ , \qquad \frac{k}{a^3} = 1{,}62 \cdot 10^8\ \frac{N}{m}$

Ho 6 incognite spostamento $(v_1 \dots v_6)$ e 7 incognite rotazione $(\varphi_1 \dots \varphi_7)$. Ho quindi una matrice 13×13.

$- v_1 = 1$



$k_{11} = \frac{3EI}{a^3} + 12\frac{EI}{a^3} = 15\frac{k}{a^3}$

$k_{21} = -\frac{12k}{a^3}$; $k_{71} = \frac{3EI}{a^2} - \frac{6EI}{a^2} = -\frac{3k}{a^2}$

+ coppia in 1

$k_{81} = -\frac{6k}{a^2}$

$k(3,4,5,6,7) = 0$

$k(9,10,11,12,13;1) = 0$

$- v_2 = 1$

$k_{12} = \frac{-12k}{a^3} \qquad k_{22} = 2 \cdot 12 \cdot \frac{EI}{a^3} = \frac{24k}{a^3}$; $k_{32} = 0$

$$h_{72} = \frac{6k}{a^2} - \frac{6k}{a^2} = 0 \quad ; \quad h_{82} = 0 \; ; \quad h_{92} = -\frac{6k}{a^2}$$

$- v_3 = 1$

$$h_{33} = 2 \cdot 12 \frac{k}{a^3} = 24 \frac{k}{a^3} \quad ; \quad h_{4,3} = -12 \frac{k}{a^3} \; ; \quad h_{9,3} = 6 \frac{k}{a^2}$$

$$h_{10,3} = 0 \; ; \quad h_{4,3} = -\frac{6k}{a^2}$$

$- \varphi_1 = 1$

$$h_{1,7} = \frac{3k}{a^2} - \frac{6k}{a^2} = -3\frac{k}{a^2} \qquad h_{2,7} = \frac{6k}{a^2} \qquad h_{7,7} = \frac{7k}{a^2}$$

$$h_{8,7} = \frac{2k}{a}$$

$- \varphi_3 = 1$

$$h_{1,9} = 0 \; , \quad h_{2,9} = \frac{-6k \cdot 1}{a^2} = -\frac{6k}{a^2} \; ; \quad h_{3,9} = \frac{6k}{a^2} \; , \quad h_{89} = \frac{2k}{a} \; ,$$

$$h_{99} = 8\frac{k}{a} \; , \quad h_{10,9} = 2\frac{k}{a}$$

$$h_q = \begin{bmatrix} B_{uu} & B_{u\varphi} \\ B_{\varphi u} & B_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ \varphi \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} &A\ddot{U} + B_{uu} U + B_{u\varphi}\varphi = 0 \\ &B_{\varphi u} \cdot U + B_{\varphi\varphi} \cdot \varphi = 0 \end{aligned}$$

FINE CORSO (30/5/08)