

1. RICHIAMI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
2. PROBLEMI DI CAUCHY
3. PROBLEMI AI LIMITI
4. MATHEMATICA - RAPIDA GUIDA ALL'USO
6. SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI
7. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI
9. EQ. ELLITTICHE - IPERBOLICHE - PARABOLICHE - ULTRA IPERBOLICHE / CORDE VIBRANTI
10. MAXWELL / DIFFUSIONE DEL CALORE
11. CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI DEL 1° ORDINE
16. CALCOLO DELLE VARIAZIONI / FUNZIONALE
19. PROBLEMI DELLA BRACHISTOCRONA / PROGETTO DI UNA CALOTTA
22. DERIVATA DEL FUNZIONALE
24. FORMULAZIONE DEBOLE E VARIAZIONALE DI EQ. ELLITTICHE / CONDIZIONI AL CONFINO ALLA DIRICHLET E ALLA NEUMANN
27. DEFORMAZIONE STATICA MEMBRANA
28. FILTRAZIONE
29. COSTRUZIONE APPROSSIMATE
30. ESEMPIO DELLA MEMBRANA
35. QUOZIENTE DI RAYLEIGH
37. MINIMO VINCOLATO - MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Prof. Sciotino - hort. unilume3.it / docenti / sciotino

Software: TUSTHEMATICA (ora v.6) - di base ora v.4

Esame: 2 esercizi da svolgere e da portare all'esame e th.

NO COSE A MEMORIA

H

RICHIEDI SOLLE EQUATIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Ex: $2x-1=0$; cerco la x che verifica l'uguale. Eq. algebrica con numero come incognita. Possano essere vari oggetti come candidati alla soluzione. Idea di dove cercare la sol! Se con $x \in \mathbb{N}$, $2x-1=0$ non ammette soluzioni [Sol = \emptyset]; se con $x \in \mathbb{Q}$, sol = $\{\frac{1}{2}\}$

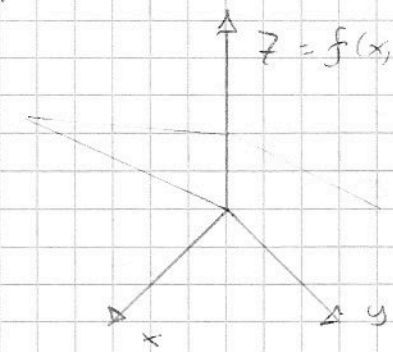
Ex: $x^2-2=0$ se $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ Sol = \emptyset ; se $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Sol = $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

Nelle EDO e' incognita e' una f di 1 sola variabile $y = y(x)$ dove compaiono le dy .

Ex: $2y(x) - x \sin x = 0$ non e' diff, non c'e' derivata, e' eq. funzionale.

Classificazione in base all'ordine

-1° ordine: $f(x, y, y')$ ^{→ forma MEFK} = 0; la deriv. di ordine massimo compare esplicitamente (y'). Preo' capire $f(x, y) = x$. $f(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$



→ piano // a y (contiene asse y)

$y' = \varphi(x, y)$ → forma normale

Si trova che sol. che era \exists e unica.

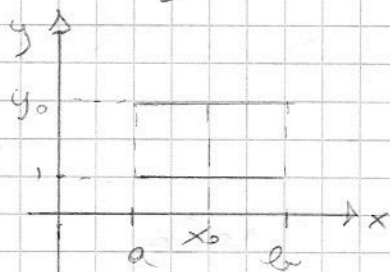
- 2° ordine: $f(x, y, y', y'') = 0$ con y'' espressa

Ex: $y'' - y = 0$, e anche $y'' = 0$

- n° ordine: $f(x, y, y', \dots, y^{n-1}, y^n) = 0$ con y^n che deve comparire esplicitamente

Soluzione di una eq. diff. è una funzione $y = y(x)$ [con ordine 1] continua con der. prima continua ovvero $y = y(x) \in C^1[a, b]$ / $f(x, y(x), y'(x)) \equiv 0$ (identicamente nulla) [IDENTICA, no eq.]
 $\rightarrow \forall x \in [a, b]$

Ex: $y' = 0$



Se con $y = 1$ la bene. ($0 = 0$) Ma anche $y = -758$! $\exists \infty$ sol.

Ognuna di queste y è una soluzione particolare dell'eq.

L'insieme di tutte le sol. particolari è detta soluzione generale. Si può esprimere con costanti arbitrarie.

$y = C_1$ che rappresenta tutte le sol. particolari.

Se me voglio 1 in particolare voglio che in x_0 ci sia certa y (problema delle condizioni iniziali).

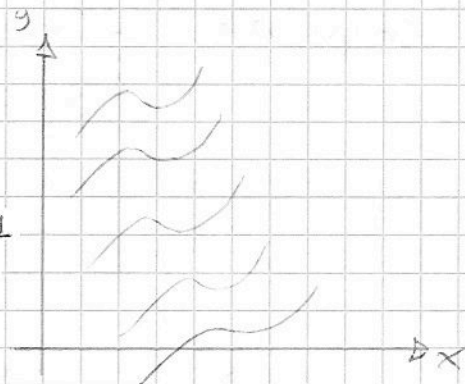
PROBLEMA DI COCHY

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y = y(x, C_1)$$

insieme famiglia di curve, ∞^1

Ex: $y' = x \rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C_1$



C_1 si determina imponendo $y(x_0, C_1) = y_0 \rightarrow$ eq. in C_1 .

Si dimostra che \exists la sol ed è unica.

Per quelle del 2° ordine ci sono 2 cost. arbitrarie.

Ex: $y'' = 0 \rightarrow y' = C_1 \rightarrow y = C_1 x + C_2$. Sol generale

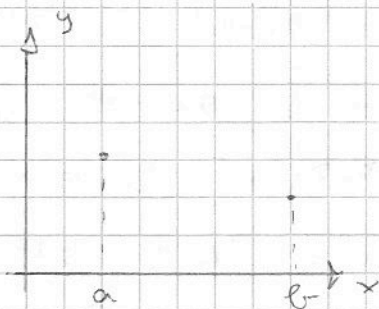
ammette ∞^2 soluzioni. Il p. di Cauchy diventa:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$
 Impongo il passaggio per il punto e anche la pendenza nello stesso punto.

PROBLEMI AI LIMITI: impongo passaggio x 2 punti ma non è garantita \exists e unicità!

Ex:

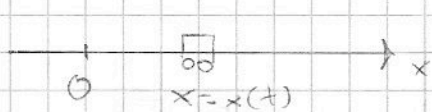
$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = y_1 \\ y(b) = y_2 \end{cases}$$



Tipico problema è l'instabilità ante computer, se ∞ modi di sbandare.

In p. di Cauchy impongo le condizioni fino all'ordine - 1.

Ex: problemi di meccanica



Dinamica afferma che $m\ddot{x} = F(t)$

Voglio sapere dove va o

quale velocità; gli dico dove sta dove è partita e con

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F(t) \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

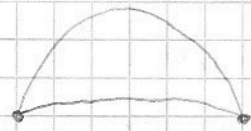
Se cono moto nello spazio ho sistemi di eq. diff.

con t variabile e x, y, z incognite:

$$m \vec{x}''(t) = \vec{F} \quad \text{con } \vec{x} = (x(t), y(t), z(t)) \quad \text{Dato}$$

dove $2 \times 3 = 6$ condizioni.

$$\begin{cases} m \vec{x}''(t) = \vec{F} \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \\ \vec{x}'(0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$
 Se averei cons. il
 1) ai limiti altri
 2) possibilità.



6/12/07

MATHEMATICA - RAPIDA GUIDA ALL'USO

Shift - enter per dare comando.

Definite funzioni. Attila le proleter. $f[x] = x^2$ (a $f(x)$

assegna x^2 , non e' eq) grafico: $\text{PLOT}[x^2, \{x, -2, 4\}]$

ad ex. puoi mettere $f[x-]$

(la v.b. vuole che la var. indipendente abbia un underscore, altrimenti non prende i valori; ex $g[x] = x^2$, se faccio $g[3]$ mi da $g[3]$ e non 9, quindi fai $g[x-]$)

Ex: espandere funzione: $\text{EXPAND}[funzione]$, ex $\text{EXPAND}[6 \ln[x]]$

Le trigonometriche hanno la 1 lett. maiuscola (tutte le funt. in realta'). Argomento funt e' tra []

Underscore va solo nelle def. della funt. Ex derivata $D_x f[x]$. Per pulite le variabili usa $\text{Clear}[nome var.]$.

D ennesima e' $D_{x,x,\dots,x} f[x]$.

f a + variabili $g[x-, y-]$ ad ex.

Il calcolo e' espressione simbolica. Per il valore numerico metti $?$ davanti al numero. Ex $g[2., 1.]$
 x le derivate parte al th. di Schwartz l'ordine non conta ma quante volte.

grafico $f(x,y)$ e $\text{PLOT3D}[g[x,y], \{x, -2, 4\}, \{y, 0, 4\}]$

Integrali:

Ex. $h[x-] = x \sin[x]$. Int. indefinita $\int h[x] dx$ (attento ai parametri dentro la f, indica la variabile di

④ integrazione).

Se aggiungi all'espressione // N restituire la forma numerica.

Se $h[x_] = x \sin[4x]$, la y è una costante.

Le f. m. possono anche definite con:

$CC[x_] := x^2$, quando vuoi usare "l'output".

↳ la definizione diventa operativa al momento della chiamata, ex $CC[Pippo]$ e da $Pippo^2$, Utile quando non va calcolato il simbolo (ex \sum senza sapere n).

Oppure $Int[x_] = \int_0^x X dx$, non funziona (X ex).

Ex $\int_0^1 \sin\left[\frac{x^3}{1+x^6}\right] dx$ restituire se stesso. Allora mi una

Calcolo NUMERICO. Solvi istruzioni:

$N[Integrate[\sin\left[\frac{x^3}{1+x^6}\right], \{x, 0, 1\}]]$

Puo' lavorare con precisione arbitraria, ex:

$N[\text{funzione o valore, numero di decimali}]$

Soluzioni EDO:

$DSolve$ (= significa equazione)

Per semplificare le espressioni usa $SIMPLIFY[]$

Problema di Cauchy: trovi eq. tra $\{ \}$ e $\{ \}$ quindi $\{ eqn, y[0] = a \}$ col ex.

Se vuoi restituire un valore col una variabile
fu eqn / $x \rightarrow 0$ oppure /. $\{ x \rightarrow 0, a \rightarrow 28 \}$ col
ex.

Se non riesce a dare sol. esatta usa $NDsolve$
importanti il problema di Cauchy, ci vogliamo x
fora le cond. iniziali. Dico l'intervallo (ex $\{x, 0, 3\}$)

Per estrarre le risultati su sol = $NDsolve$

for $y_{op}[x] = y[x]$. $\text{sol}[\{1\}]$
(Immagine 1 tra i simmetrati)

Per graficare $\text{Plot}[y_{op}[x], \{x, 0, 3\}]$

Una funzione interpolata \times approx la soluzione

Per velocità in forma matriciale array una $\text{MATRIXFORM}[B]$

Per estrarre elemento for $B[[m]]$

SISTEMI DI EQ. LINEARI

11/12/07

$$m=1: ax + b = 0$$

$$m=2: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A [m \times m], x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A x = B$$

1 sola sol $\Rightarrow \exists$ 1 sola m -upla che soddisfano X

Se A è non invertibile \exists 1 sola sol (se $\det A < 0$)

$$\text{Si fa } A^{-1} A x = A^{-1} B \Rightarrow \underline{x = A^{-1} B}$$

SISTEMI OMOGENEI: $B = 0$

Quindi $Ax = 0$. Ovviamente ammette la sol
banale $X = 0$, ma ci interessano m -uple non tutte
nulle oltre autosoluzioni.

$$\text{Se } |A| \neq 0 \Rightarrow X = 0$$

$$\text{Se } |A| = 0 \Rightarrow \exists x_1, x_2, \dots, x_m \neq 0 \text{ (autosol.)}$$

Data A , bisogna trovare un numero λ e un

vettore X / $Ax = \lambda X$. significa che cerchiamo

vettore / sia trasformato // a se stesso. $x \xrightarrow{A} Ax$

$\lambda > 0$ $\lambda < 0$ (le direzioni principali, λ sono
i σ principali)

⑥

$Ax = \lambda x$ e prob. ogni autovettore classico, x e' autovettore, λ e' autovale.

Per risolverli: $Ax = \lambda x \rightarrow (A - \lambda I)x = 0$ e impongo $\det(A - \lambda I) = 0$. Otteniamo eq. polinomiale il cui insieme \equiv quello della matrice, che ammette n soluzioni: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Per trovare gli autovettori prendo λ_1 (sempre n. r. omogeneo con $\det(A - \lambda_1) = 0$) e trovo $x_1, \dots, \lambda_n x_n$.

Mentre λ sono univocamente determinati, gli x no!

Ex: $Ax_1 = \lambda_1 x_1 \rightsquigarrow$ mult. $\times 58$: $A(58x_1) = \lambda_1 58x_1$.

Le x sono determ. A meno di una costante moltiplicativa.

In alcuni problemi si ha:

Problema generale ~~AAAs~~: $Ax = \lambda Bx$ (B non necessariamente I)

$\det(A - \lambda B) = 0$ x risolvere.

//

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI

m e' f di t variabili.

Si deve sapere di QUANTE var. e'!

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$y = u(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow u(x)$

Ordine max deriv. e' ordine eq.

$\frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (1' ordine)

Ex: $m=2$: $u = u(x, y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0$$

Nel caso delle EDO e' facile trovare la sol generale mentre qui e' proibito, non ha interesse applicativo.

Ex: $y'(x) = 0 \rightarrow y = C_1$ (sol generale e famiglia di rette)

Ex: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = f(y)$ ma f è arbitraria! potrebbe

essere armonica! $f = \sin e^{\arctan y} \cdot \cot y^2$ ecc...

Eq. risolvibili con cond. al contorno e cond. iniziali

(Classificazione)

• Eq. 2° ordine:

$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}$ è lineare, $u \frac{\partial u}{\partial x}$ è non lineare

Quasi lineare: coeff. \leftarrow possono d. della f ma non delle derivate. $a(u) \frac{\partial u}{\partial x}$ è quasi lineare.

$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ non è lineare

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a \cdot u = f(x, u)$$

2° ordine 1° ordine 0° ord.

$$\left[3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} \right]$$

Per ipotesi di quasi linearità, $a_{ij} = a_{ij}(x, u)$

$a_{ij} = A$ ($n \times n$) In generale non è simmetrica, ex

$$2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2} + 4 \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_1}$$

ma x le Th. di Schwartz le der

ivate sono uguali! $\Rightarrow = 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2} + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_1}$

e quindi mi riporto al caso di A simmetrica.

(tenore sp. e' sym) Le A sym hanno $\lambda \in \mathbb{R}$

m_+ : $\lambda > 0$ Coeff. calcolati in certo punto e x certa u .

m_- : $\lambda < 0 \Rightarrow m = m_+ + m_- + m_0$

⑧ m_0 : $\lambda = 0$ (numero di autovalori di A)

Se aus sono funzioni compatte e "sol. dipendenti"

∃ 4 tipi di eq. diff. a seconda del proc. fisico:

1. ELLITTICHE:

$$m = m_+ \text{ oppure } m = m_- \quad (\text{almeno } m_0 = 0)$$

2. IPERBOLICHE:

$$m_+ = m_- = 1 \text{ oppure } m_- = m_+ = 1 \quad (m_0 = 0)$$

3. PARABOLICHE:

$$m_0 > 0$$

4. Ultra-iperboliche:

$$1 < m_+ < m_- \text{ oppure } 1 < m_- < m_+ \quad (\text{emergono se } \text{vett. } x \geq \mathbb{R}^+)$$

↓

1. trattano in genere i problemi Maximale

2. legati a fenomeni di propagazione ondulata, se si trascurano i termini dissipativi hanno elev. fine nel tempo con REVERSIBILIS' tempore, $t_1 \rightarrow t_2$ ma come elevate in $t_2 > t_1$ ma anche in $t_1 < t_2$ essendo in t_2 (come eq. corda vibrante di D'Alembert)

3. irreversibilità tempore (come eq. calore, problema (507)), + stati iniziali sono compatibili con stati finali.



Ex: Corde vibranti

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

c è Velocità propagazione. $m=2$

(Lam. è solo m=2 ordine. Va riportata in forma:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \text{ fissiamo } t=x_1 \text{ e } x=x_2$$

Costruiamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix}$ (i λ sono proprio i termini della diagonale)

Quindi $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -c^2 \Rightarrow$ caso IPERBOLICO

\vec{E}_x : $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{E}$ (eq. di Maxwell) $m=4$

\vec{E} sist. di equazioni. $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ ma a

inferiamo a 1: $E_x = E_x(x, y, z, t) = E_x(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) = 0 \rightarrow \text{Ma ci sono termini misti.}$$

$$A = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{eq. IPERBOLICA}$$

(infatti è propag. campo elettrom.)

$\frac{\partial T}{\partial t} = D \nabla^2 T$ T è campo di temperatura, D è diffusività termica

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \underbrace{D}_{2 \text{ ord.}} \nabla^2 T = 0 \quad m=4, T(x, y, z, t)$$
$$-D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

x_1, x_2, x_3, x_4

$$A = \begin{pmatrix} -D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ C'è un $\lambda = 0 \Rightarrow$ eq. e'
PARABOLICI

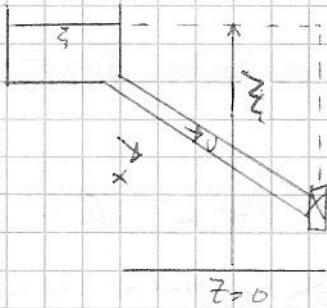
In fisica tecnica spesso i prob. sono stazionari, quindi
acompare $\frac{\partial T}{\partial t}$ e sto in $m=3$:

$$A = \begin{pmatrix} -D & 0 & 0 \\ 0 & -D & 0 \\ 0 & 0 & -D \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ricordo nel caso ellittico!}$$

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI DEL 1° ORDINE

13/12/07

Ex: colpo d'ariete.



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{Imc: } \begin{cases} u = u(x, t) \\ z = z(x, t) \end{cases}$$

Vettore delle imc: $\begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix}$. Il sistema è:

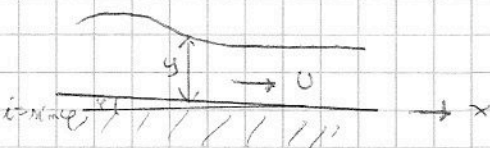
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\text{ovvero con coeff. moltiplici}]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & g \\ \frac{1}{g} a^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↓ B ↓ C ↓ A ↓ U ↓ C "Quasi"

$$\boxed{B \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = C} \rightarrow \text{coeff. incognite} \neq \text{incognite}$$

Ex: eq. di De Saint Venant:



$$1) \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) = i - j \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

$$2) \left(\frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{g} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_B \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{u}{g} & 1 \\ y & u \end{pmatrix}}_A \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i - j \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \text{Sistema QUASI lineare}$$

Classifica di eq. del tipo $B \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{C}$

Di solito B sono non singolari ($\exists B^{-1}$).

Si costruisce il problema $Ax = \lambda Bx$ (gli aut. generale.)

Sint. e'.

1) IPERBOLICO: i $\lambda \in \mathbb{R}$ e i corrispondenti x sono lin. indipendenti. [Se i $\lambda \in \mathbb{R}$ e sono DISTINTI $\Rightarrow x$ sono lin. indep.]

2) PARABOLICO: i $\lambda \in \mathbb{R}$ e i corresp. x non sono lin. indep.

3) ELLITTICO: i λ sono complessi

Classificazione non esauritiva.

Calcolo autovalori [$\det(A - \lambda B) = 0$] nel corpo d'ordine:

$$|A - \lambda B| = \begin{vmatrix} -\lambda & g \\ \frac{a^2}{g} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm a$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ e distinti \Rightarrow IPERBOLICO

(e' fenomeno di propagazione ondulata) $\lambda = \pm a$ e' oncia con celerita' a : $\frac{a}{x}$

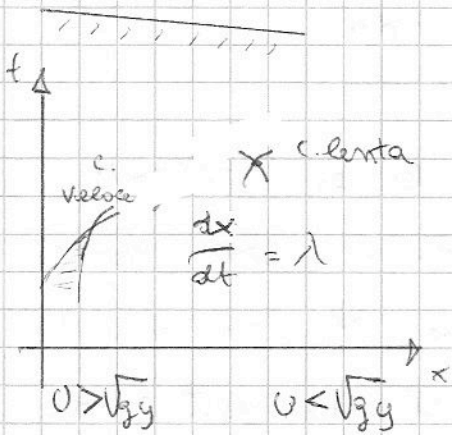
λ x eq. di D.S.V.:

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{U}{g} & 1 \\ y & U \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{g} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \rightarrow \left| \begin{matrix} \frac{U}{g} - \frac{\lambda}{g} & 1 \\ y & U - \lambda \end{matrix} \right| = \frac{1}{g}(U - \lambda)^2 - y =$$

$$= 0 \rightarrow (U - \lambda)^2 = gy \rightarrow U - \lambda = U \pm \sqrt{gy} \rightarrow \underline{\lambda_{1,2} = U \pm \sqrt{gy}}$$

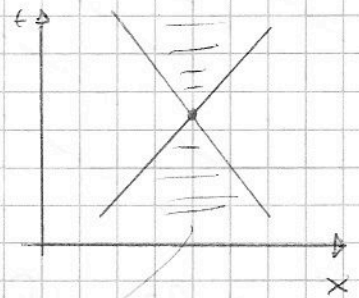
$\lambda \in \mathbb{R}$ e distinti (tranne quando non c'è acqua, banale) \rightarrow IPERS.

$\leftarrow U - \sqrt{gy}$ $U + \sqrt{gy} \rightarrow$ λ è soluzione dipendente



Nel c.s. di. le l. caratteristiche sono note a priori ($\frac{dx}{dt} = \lambda$) [S. LINEARE]

Nelle q. lineare traccia solo $\frac{1}{\infty}$ intorno al punto



Linea caract. definisce le regioni che possono influenzare il fenomeno.

con di influenza

Infatti nella c. veloce condizioni influenzate solo da monte, perturb. non ce la fa a risalire.

$$\frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{con } z = z(x,t) \quad [\text{SCALAR WAVE EQUATION}]$$

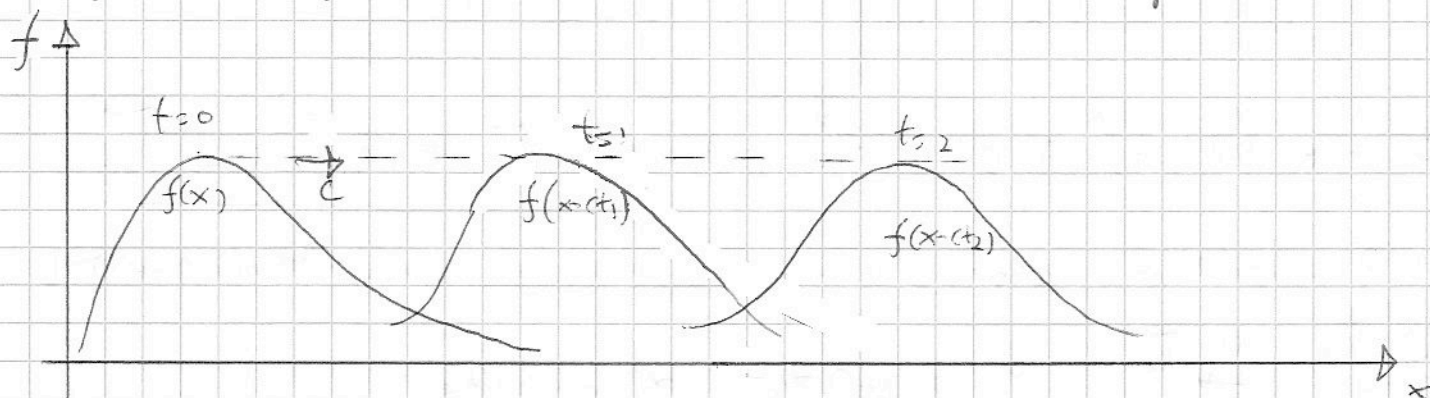
$$c > 0 \quad A = c \quad B = 1 \quad \det(A - \lambda B) = 0 \rightarrow \lambda = c \Rightarrow \text{iperbolico}$$

1 sola linea caratteristica. Vogliamo dim. che $z = f(x - ct)$ è sol. del problema.

$$\frac{dz}{dt} = f'(x - ct)(-c)$$

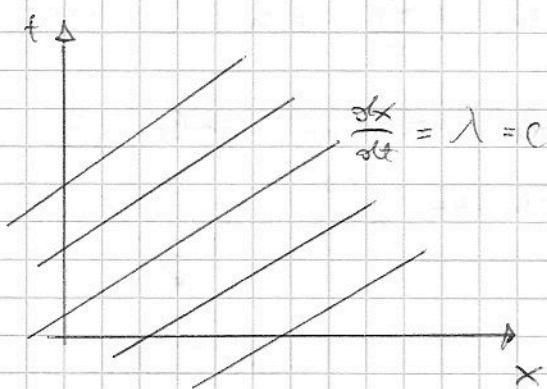
$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x-ct) \quad \text{Quintou;}$$

$$-f'c + cf' = 0 \rightarrow \text{identita'} \Rightarrow \text{la soluzione}$$



S. muove con velocità c . Viaggia come onda.

Linee caratteristiche:



f lungo le linee caract. è costante. $x-ct = \text{cost}$ sulle linee. È come se mi muovessi alla stessa velocità dell'onda senza velocità $\left(\frac{dx}{dt}\right)$.

Controlla che sia ellittico:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(lo può anche trasf. in eq.)} \\ 2 \text{ ordine} \end{array}$$

Dato sist. iperbolico $B \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{c}$ con $\exists B^{-1}$,

molt. $\times B^{-1}$: $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + B^{-1}A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = B^{-1}\vec{c}$, trasformo in

problema classico: $B^{-1}A x = \lambda | x$

Nella base scegli λ , $B^{-1}A$ è diagonale.

$$\textcircled{14} \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A = T^{-1} \Lambda T \quad (\text{decomposizione})$$

base
canonica

matrice base
 λ

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

[per EIGENSYSTEM in Matematica x
verificare la decomposizione con
matrice sym a caso]

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + T^{-1} \Lambda T \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = B^{-1} \vec{C}$$

$$\boxed{T \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \Lambda T \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = T B^{-1} \vec{C}}$$

Se Λ, B costanti, T costanti.

Def. $\tilde{\vec{U}} = T \vec{U}$ Quindi

$$\frac{\partial \tilde{\vec{U}}}{\partial t} = T \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \quad (\text{analogo per } x) \quad \text{Ho:}$$

$$\frac{\partial \tilde{\vec{U}}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \tilde{\vec{U}}}{\partial x} = T B^{-1} \vec{C} \rightarrow \text{struttura identica alla}$$

Wave scalar equation, Infatti:

Cons. $T B^{-1} \vec{C} = 0$, solve la i -esima eq:

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x} = 0 \rightarrow \tilde{U}_i = f_i(x - \lambda_i, t)$$

Mettendoci nella base dei λ otteniamo n semplici wave

Caso generale e' con matrici non costanti:

i -esima eq:

$$\sum_{j=1}^n \left(T_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial t} + \lambda_i T_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x} \right) = (\text{termine noto})$$

$$\sum_{j=1}^n T_{ij} \left(\frac{\partial U_j}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial U_j}{\partial x} \right) = \text{t. noto}$$

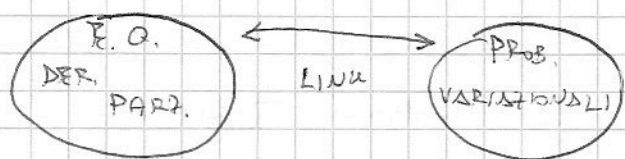
$$U_5 = U_5(x, t) \rightarrow \frac{dU_5}{dt} = \frac{\partial U_5}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial U_5}{\partial x}$$

Quindi ho variazione grandezza lungo linea caratteristica:

$$\sum_{s=1}^N T_{is} \frac{D^{(i)} U_s}{Dt} = f, \text{ moto}$$

18/12/07

CALCOLO DELLE VARIAZIONI



Vogliamo sol. ottima del problema.

Ex: bene da produrre con certi costi.

q : certa quantità bene prodotto venduto al prezzo $p(t)$

Ricavo $\times q$, $\frac{1}{\infty}$ bene venduto e'

$$dR = p(t) dq = p(t) \dot{q}(t) dt$$

Macchinario ha costo c al U prod.

$$dc = k \dot{q}^2 dt$$

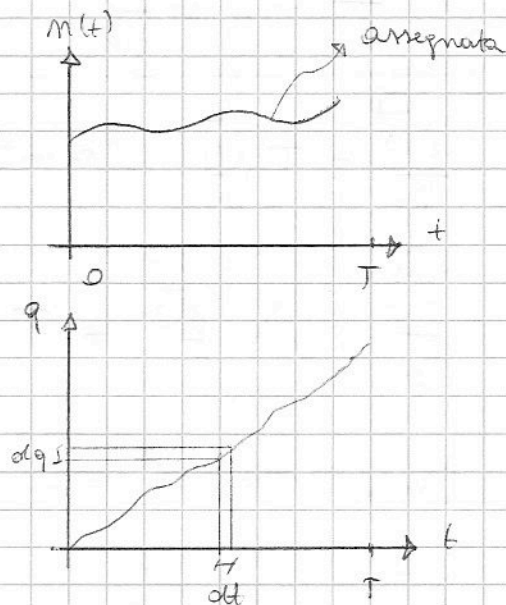
$$\text{Guadagno e' } dG = dR - dc =$$

$$= (p(t) \dot{q} - k \dot{q}^2) dt.$$

$$G = \int_0^T (p(t) \dot{q} - k \dot{q}^2) dt \quad (\text{guadagno totale nel tempo } T)$$

↳ dipendere da q prodotta che e' funzione di scelta produttiva. E' una $G[q]$. Se ad ogni f associamo numero \mathbb{R} lo chiamo funzionale: $G[q]: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ (alla funt. da in parte un $q \rightarrow G[q]$)

⑩ numero, se funzionale da una funzione, DIVERSO

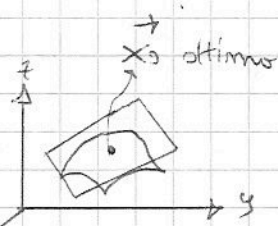


da f composta come $m \times n$ che restituisce funzione, il f male restituisce numero).

Dove cerco le F ? Che condizioni!

$$F = \left\{ q(t) \mid \begin{array}{l} C \in [0, \pi] \\ \text{monotonica cresc.} \\ q[0] = 0 \end{array} \right\}$$

Quando ho $Z = f(x, y)$



nel max

il piano tan e' orizzontale.

Quando zero differenziale: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ nota' $= 0 \forall$ spostamenti dx, dy

$$\rightarrow = \nabla f \cdot d\vec{x} = 0 \text{ cioè}$$

$d\vec{x} = 0$ e quindi $\nabla f = 0 \forall d\vec{x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Risolvo eq. algebriche e trovo max.

Calcolo delle variazioni fa lo stesso nel funzionale;

qui max/min e' funzione, no numero.

Supponiamo di scegliere q_0 ottimale.

Considero una $q_0 + \epsilon V$ scelta variata.

\rightarrow funzione

V anche deve essere nulla in 0

[in $Z = f(x, y)$ ric. var. e' $\vec{x}_0 + d\vec{x}$]

Calcolo: (fino variazione)

$$G[q_0 + \epsilon V] = g(\epsilon) = \int_0^T \left(\eta(t) (q_0 + \epsilon \dot{v}) - k (q_0 + \epsilon \dot{v})^2 \right) dt$$

Intorno a $\epsilon = 0$ trova massimo.

$$\frac{dg}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0$$

$$g'(\epsilon) = \int_0^T \left(\eta(t) \dot{v} - 2k (q_0 + \epsilon \dot{v}) \dot{v} \right) dt$$

$$\text{Im } \mathcal{E} = 0 \text{ e } \int_0^T \mu(t) \dot{V} - 2k q_0 \dot{U} dt = 0$$

$$= \int_0^T (\mu(t) - 2k q_0) \dot{U} dt \quad \text{Integro per parti!}$$

$$V(t) (\mu(t) - 2k q_0) \Big|_0^T - \int_0^T \frac{d}{dt} [\mu(t) - 2k q_0] U dt = 0$$

$$V(T) (\mu(T) - 2k q_0(T)) - \quad \quad \quad = 0$$

Scelta di V è arbitraria (mi posso spostare dove voglio) quindi deve essere:

$$1^\circ \mu(T) - 2k q_0(T) = 0 \quad (\text{EDO})$$

$$2^\circ \frac{d}{dt} [\mu(t) - 2k q_0] = 0$$

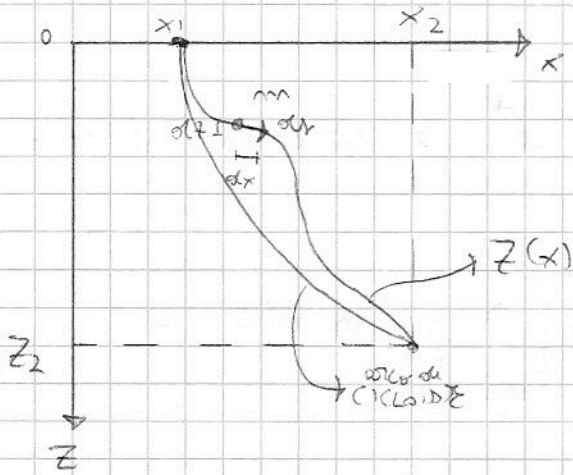
2°: $\mu(t) - 2k q_0(t) = \text{cost}$ dalla 1° e anche $= 0$, quindi $\mu(t) - 2k q_0(t) = 0 \Rightarrow q_0(t) = \frac{\mu(t)}{2k}$. Ricaviamo quindi

la funzione di ottimo $q_0(t) = \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{2k} d\tau$

È necessaria ma non sufficiente. Controllo diretto su un'altra variata arbitraria:

$$\begin{aligned} G(q_0) - G(q_0 + \eta) &= \int_0^T (\mu(t) \dot{q}_0 - k q_0^2 - [\mu(q_0 + \eta) \dot{q}_0 + \\ &- k (q_0 + \eta)^2]) dt = \int_0^T (\cancel{\mu q_0} - k q_0^2 - \cancel{\mu q_0} - \cancel{\mu \eta} + \\ &k q_0^2 + k \eta^2 + 2k q_0 \eta) dt = \int_0^T k \eta^2 dt > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \text{C.V.D.} \end{aligned}$$

Ex: problema della BRACHISTOCRONA (tempo minimo)



particella con attrito trascurabile che scivola nel filo ϕ

Tra tutte le curve regolari quella col t. minimo di percorrenza da x_1 o a x_2, z_2 [CICLOIDE, utile nella

sceglia di ingranaggi]. È prob. di min. di un funzionale.

Si conserva energia: $\frac{1}{2} m v^2 - m g z = \text{cost.}$ Se parte da ferma $v = 0$. Quindi $v = \sqrt{2gz}$

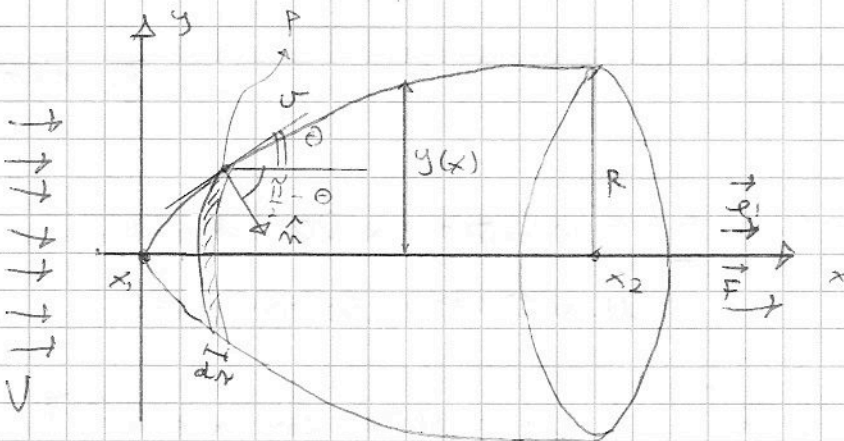
Vedo tempo \times percorrere sul lungo il percorso.

$$dt = \frac{dr}{v} = \frac{dr}{\sqrt{2gz}} = \frac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{\sqrt{2gz}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gz}} dx \quad \text{Quindi}$$

$$T[z] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gz(x)}} dx \quad (\text{funzionale della curva che collega due punti})$$

$$F = \left\{ z(x) \mid \begin{array}{l} C[x_1, x_2] \\ z(x_1) = 0 \\ z(x_2) = z_2 \end{array} \right\} \quad \text{Si ottiene un arco di CICLOIDE}$$

Ex: progetto di una CALOTTA che offre resistenza minima a flusso che le investe.



La dinamica che lo investe è $P = 2\rho v^2 \sin^2 \theta$ (Max se $\theta = 90^\circ$, in x_1)
C'è simmetria radiale
Forma è data da

$y(x)$ e poi \times rotazione genera la figura.

Conv. fluido perfetto. Forza totale che agisce e':

$$\vec{F} = \iint_{\text{Calotta}} P \cdot \hat{n} \, dA \quad \text{proiettata su } \vec{e}_1 \text{ e' proprio il modulo.}$$

$$|\vec{F}| = \vec{F} \cdot \vec{e}_1 = \iint_{\text{Calotta}} P \cdot \hat{n} \cdot \vec{e}_1 \, dA = \iint_{\text{Calotta}} P \cdot \cos \theta \, dA =$$

$$= \iint_{\text{Calotta}} 2 P U^2 \cos^3 \theta \, dA \quad \text{Possiamo sfruttare la symm}$$

Considero anello circolare spesso dy nel quale θ e' costante, dA e' area corona circolare.

$$dA = 2\pi y(x) \, dy = 2\pi y(x) \sqrt{1+y'^2} \, dx \quad \text{Quindi}$$

$$F = \int_{x_1}^{x_2} P U^2 \cos^3 \theta \, 2\pi y(x) \sqrt{1+y'^2} \, dx$$

$$\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1+y'^2}} = \cos \theta$$

$$= \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \text{Quindi}$$

$$F = 4\pi P U^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{y y'^3}{(\sqrt{1+y'^2})^3} \sqrt{1+y'^2} \, dx = F[y]$$

Funzionale

8/1/08

$J: A \longrightarrow \mathbb{R}$; L^2 : spazio delle funzioni a
 \downarrow \downarrow $u \longrightarrow J[u]$; Quadrato sommabile
 Funz. Dominio

Funz. definite in $\Omega \in \mathbb{R}^n$ [$u = u(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$]

$$\textcircled{20} \quad L^2 = \left\{ u(x) \mid \int_{\Omega} u^2 \, d\Omega < +\infty \right\}$$

Integrale del \square delle f non diverge

Ω : dom aperto; $\bar{\Omega}$: dom chiuso, frontiera inclusa

Ex: $\bar{\Omega} = [0, 1]$. Prendo $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Ma $\in L^2([0, 1])$!

$$\int_0^1 u^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_0^1 = +\infty \Rightarrow \text{No}$$

Se invece con $u = \frac{1}{x^{1/4}}$ ho $u^2 = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$
 $= 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2 < +\infty \Rightarrow \text{Si}$

$A \subset L^2$. Si dim. che L^2 è uno spazio vettoriale, ovvero:
se prendo 2 elem. dello s.v. una loro qualunque
comb. lineare \in s.v. (Quindi include elemento nullo).
A può non essere s.v.

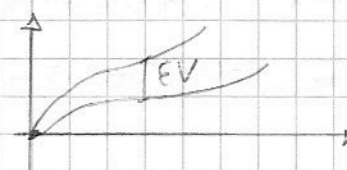
$C^k[\bar{\Omega}] \rightarrow$ spazio funzioni classe C^k (derivata cont. fino a k)
 $k = 0, 1, 2, \dots$

$H^n(\Omega) \rightarrow$ derivata fino a ordine n mano ancora a
quadrato sommabile

Ex: $u = \ln x$, $e \in L^2$. Ma $u' = \frac{1}{x}$, non $\in L^2$ e quindi $\notin H^1(\bar{\Omega})$
 $\bar{\Omega} = [0, 1]$

Sia $J = J[u]$ con $u \in A$. Vogliamo funzionale
in f variata! $J[u + \Delta u]$ e quindi $\Delta J = J[u + \Delta u] - J[u]$
Se Δu è canonico, chi mi dice che $u + \Delta u \in A$? Mi devo
portare all'interno della def. di J .

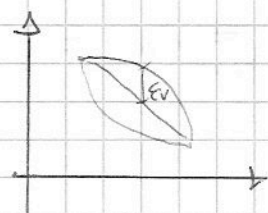
$\Delta u = \varepsilon V$
n. reale \uparrow funzione



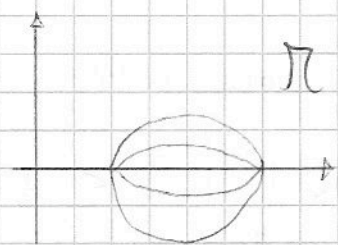
$$V \text{ o.c.e. } \in \mathcal{M} = \left\{ V(x) \mid u + \varepsilon V \in A, \forall u \in A \text{ e } \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \right\}$$

Spazio vettoriale. F. nulla $\in \mathcal{M}$ [$u + 0 \in A$]; se $V_1, V_2 \in \mathcal{M}$,
 $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \in \mathcal{M}$? $\underbrace{u + \lambda_1 V_1}_{\in A} + \underbrace{\lambda_2 V_2}_{\in \text{oc.e.}} \in \mathcal{M}$.

$A \neq \mathcal{M}$, condizione $\Leftrightarrow A$ di partenza è spazio vettoriale.



Si devono annullare agli estremi



DERIVATA DEL FUNZIONALE

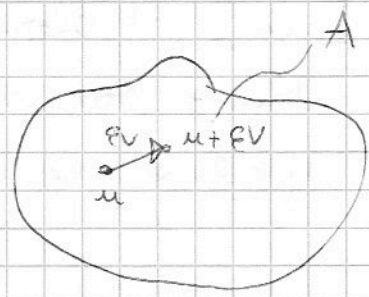
$$\delta J[u; V] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J[u + \varepsilon V] - J[u]}{\varepsilon}$$

(non divide per εV , Vogel's numero e non funzionale)

"variazione prima del funzionale nel punto u e nella variazione V "

$$\text{le lim} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} J[u + \varepsilon V] \right|_{\varepsilon=0}$$

εV è come "direzione"



Nelle funzioni si annulla la derivata direzionale in tutte le dir. nel max e nel min.

Nel funzionale se in $u = u_0$ ho max o min $\delta J[u_0, V] = 0 \quad \forall V \in \mathcal{M}$

Quindi x min o max funzionale impongo $\delta J[u, V] = 0 \quad \forall V$

(si comporta nel eq. differenziale (Vogel's funzione

22) u_0).

V è matr. vett. $\vec{V} \cdot \vec{W} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

Anche per spazios di funzioni si def. prod. scalare
(\vec{V}, \vec{W}):

$$(u, u_2) = \int_{\Omega} u_1 u_2 \, d\Omega$$

$$dz = (\nabla z, \vec{m})$$

Posso trovare: $\delta[u_0, v] = (G(u_0), v)$ con

$G(u_0)$ gradiente di J in u_0 : $\nabla J[u_0]$

$(\nabla J[u_0], v) = 0 \quad \forall v$ vuol dire $\underline{\nabla J[u_0] = 0}$ (eq.

diff che risulta da max o min)

Abbiamo modello mat. derivato dalle E.D. der. part.

Sarà interessante la cond. iniziale del problema fisico.

Ho ^{poi} funzionale per cui $\nabla J = 0$ per max o min, e'
eq. diff. Se costruiamo funz. per cui $\nabla J = 0$ coincide

con eq. diff. di partenza ho equivalenza quindi il
problema fisico diventa la risoluzione di min/max
funzionale (metodo variazionale, problema variazionale
equivalente)

Non tutti si possono trasformare \exists la formulazione
debole che, sotto certe ipotesi, porta alla formulazione
variazionale.

Spazio di funzioni ha $\dim. \infty$, approssimazione
considera numero finito di element.

$$\boxed{-\nabla \cdot (P(x) \nabla u) + q(x)u = f(x)}$$

$u(x)$ incognita con $x \in \Omega$
 $P(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega, P(x) \in C^1(\bar{\Omega})$
 $q(x) \geq 0$

↓

$$-\nabla P \cdot \nabla u - \underbrace{P \nabla^2 u}_{\text{termine 2° ordine}}$$

"formulazione classica"

$$A = \begin{pmatrix} -P & & \\ & -P & 0 \\ & 0 & \ddots \\ & & & -P \end{pmatrix} \quad (\lambda \text{ uguali e concordi} \Rightarrow \text{ellittiche})$$

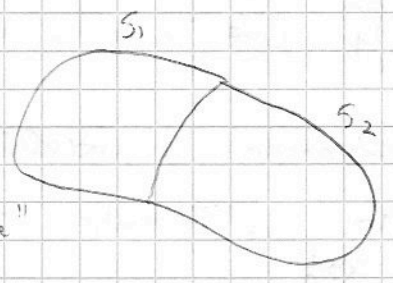
- Se con $\rho = 1, q(x) = 0, f(x) = 0$ si ottiene l'eq. di Laplace: $-\nabla \cdot (\nabla u) = -\nabla^2 u = 0$

- Se $\rho(x) = 1, q(x) = 0$, si ha $-\nabla^2 u = f(x)$ di Poisson

- Se $q(x) = f(x) = 0$ ha $-\nabla \cdot (\rho \nabla u) = 0$, struttura eq. mot. di filtrazione (ρ perm. μ e μ_{eff})

Condizioni al contorno:

• $u|_{S_1} = g_1(x)$ (DIRICHLET) \hookrightarrow assegn. "alla funzione"



• $\frac{\partial u}{\partial n}|_{S_2} = g_2(x)$ (NEUMANN) - ex. vapore frontiera impermeabile

Se S_2 e $S_1 \neq \emptyset$ ha problema misto

Eq + c.c. costituiscono un "PROBLEMA".

Vogliamo la formulazione debole.

$m=1$: $\int_a^b f(x) g'(x) dx = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g dx$

←* a *→ b → x Contr. normali esterne al dominio

$m=2$:

$$\textcircled{24} \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} f g n_i d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g d\Omega$$

Supponiamo di voler risolvere le cond. (V non ancora noto)

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (P \nabla u) V \, d\Omega + \int_{\Omega} q u V \, d\Omega = \int_{\Omega} g V \, d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) V \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} P \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i V \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} P \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_i} \, d\Omega =$$

[Vedi cond. di sommativa]

$$= \int_{\partial\Omega} P \frac{\partial u}{\partial n} V \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} P \nabla u \cdot \nabla V \, d\Omega, \quad \text{Sostituendo.}$$

$$\int_{\Omega} (P \nabla u \cdot \nabla V + q u V) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} P \frac{\partial u}{\partial n} V \, d(\partial\Omega) = \int_{\Omega} g V \, d\Omega$$

$$u \in A = \left\{ u \in H^1(\Omega) / u|_{S_1} = g_1 \right\} \rightarrow \begin{cases} \text{se } g_1 \neq 0 \text{ non} \\ \text{e } n_p \text{ vettoriale} \end{cases}$$

ho prodotto delle der. prime di due funzioni, voglio stare tranquillo

$$V \in \mathcal{M} = \left\{ V \in H^1(\Omega) / V|_{S_1} = 0 \right\} \rightarrow \text{qui } n, \text{ e } n_p \text{ velt.}$$

2° termine: $\int_{S_1} P \frac{\partial u}{\partial n} V \, d\partial\Omega + \int_{S_2} P \frac{\partial u}{\partial n} V \, d\partial\Omega \quad [\partial\Omega = S_1 \cup S_2]$

$$= \int_{S_2} P g_2 V \, d(\partial\Omega). \quad \text{Sostituendo.}$$

$$\int_{\Omega} (P \nabla u \cdot \nabla V + q u V) \, d\Omega = \int_{S_2} P g_2 V \, d(\partial\Omega) + \int_{\Omega} g V \, d\Omega$$

$$\forall u, V \in \mathcal{M} \quad \hookrightarrow \text{"formulazione debole"}$$

È equivalente alla formulazione classica.

Vantaggi:

- Compagnino solo per prime (\Rightarrow vantaggi Computazionale)

- nella Clamita quindi u deve essere $C^2(\Omega)$, qui invece basta che siano a quasi sommabile.

"Debole" che si richiedano come meno forti x risolverla.

Panaggi's a formulazione Variazionale:

$$K[u, v] = F[v]$$

Si devono verificare:

$$\begin{cases} K[u, v] = K[v, u] \\ K[u, u] \geq 0 \end{cases} \quad \forall u, v \in A \quad \rightarrow \text{Verificate}$$

Costruisco quindi:

$$\boxed{J[u] = K[u, u] - 2F[u]}$$

Proprietà:

$$\int J[u; v] = 2[K[u, v] - F[v]] = 0 \quad \forall v \in M$$

↓
funzionale ha un minimo

↳ u era sol. della f. debole, pena che $K=F$

Dim:

$$J[u] = \int_{\Omega} p \nabla u \cdot \nabla u + q u^2 \, d\Omega - 2 \left[\int_{\Gamma_2} p q_2 u \, d\Gamma + \int_{\Omega} q u \, d\Omega \right]$$

$$+ \int_{\Omega} q u \, d\Omega$$

$$\int J[u; v] = \left. \frac{d}{d\varepsilon} J[u + \varepsilon v] \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} p \nabla (u + \varepsilon v) \cdot \nabla (u + \varepsilon v) + q (u + \varepsilon v)^2 \, d\Omega - \left[\int_{\Gamma_2} p q_2 (u + \varepsilon v) \, d\Gamma + \int_{\Omega} q (u + \varepsilon v) \, d\Omega \right] \right|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_{\Omega} p \nabla (u + \varepsilon v) \cdot \nabla (u + \varepsilon v) + q (u + \varepsilon v)^2 \, d\Omega - \left[\int_{\Gamma_2} p q_2 (u + \varepsilon v) \, d\Gamma + \int_{\Omega} q (u + \varepsilon v) \, d\Omega \right] \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$\textcircled{26} + \int_{\Omega} q (u + \varepsilon v) \, d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} P \cdot [\nabla u \cdot \nabla v + v(\nabla u) \cdot \nabla v] + 2g(u + \epsilon v) V d\Omega +$$

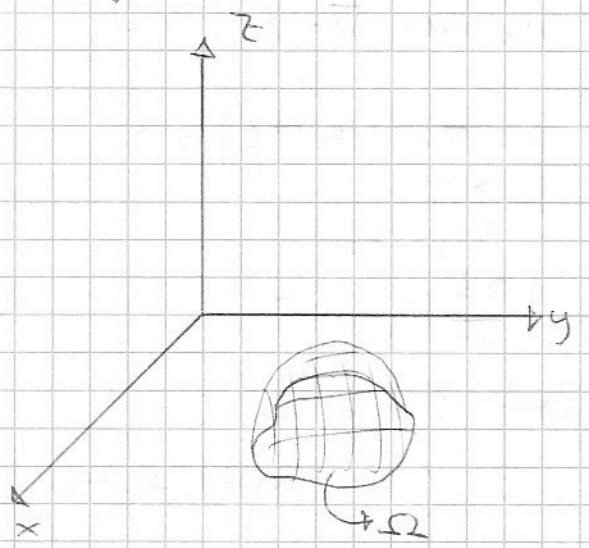
$$- 2 \left[\int_{S_2} P g_2 V d\Omega + \int_{\Omega} g v d\Omega \right] \quad \text{Pongo } \epsilon = 0 :$$

$$2 \left[\int_{\Omega} P (\nabla u \cdot \nabla v + q u v) d\Omega - \int_{S_2} P g_2 V d\Omega + \int_{\Omega} g v d\Omega \right] =$$

↓
k[u, v]

$$= 2 [k[u, v] - F[v]] \quad \text{C.V.D.}$$

Ex: Deformazione Matricia membrana



Membrana e struttura molto sensibile che dipende a N ma non a M e V.

Appoggiata su xy.

Z(x, y, t) una volta parametrizzata

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 z + \frac{F(x, y)}{P}$$

Con $a^2 = \frac{T_0}{P}$ T₀ tensione di base membrana / P → massa × unità di area / F e' carico su membrana

di membrana. È eq. iperbolica.

Problema Matricia diventa:

$$\bullet - \nabla^2 z = \frac{F(x, y)}{Pa^2} = f(x, y) \rightarrow \text{eq. di Poisson} \quad \begin{pmatrix} n=1 \\ q=0 \end{pmatrix}$$

Si prescrive bordo vincolato:

$$\bullet z|_{\partial\Omega} = 0$$

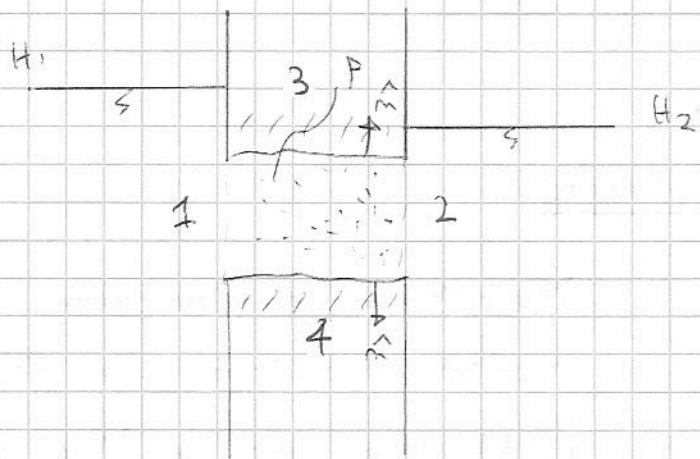
Ho constraints de "problema": $S_2 = 0$; $g_1 = 0$

Si deve minimizzare quindi:

$$J[u] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u - 2 \int_{\Omega} f u \, d\Omega$$

con $u \in A = \left\{ u \mid_{\partial\Omega} = 0 \right\}$ (e' mp. vettoriale \Rightarrow) $\equiv M$

Ex: Filtrazione



da Darcy:

$$\vec{V} = -P \nabla \xi$$

Con fluido incompressibile, quindi $\nabla \cdot \vec{V} = 0$

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (P \nabla \xi) = 0 \\ \xi|_1 = H_1 \\ \xi|_2 = H_2 \\ \frac{\partial \xi}{\partial n} \Big|_{3,4} = 0 \end{cases}$$

$$q = 0; f = 0; p = P$$

C. al cont: 1 e 2 front. permeabili, 3 e 4 no!

$$\xi|_1 = H_1; \xi|_2 = H_2 \rightarrow 1+2 = S_1 \text{ (Dirichlet)} \rightarrow \text{frontiera}$$

dove e' prescritto valore funzione.

$$\text{In } 3 \text{ e } 4, V_n = 0 = \vec{V} \cdot \vec{n} = -P \nabla \xi \cdot \vec{n} = -P \frac{\partial \xi}{\partial n} = 0 \text{ (Neumann)}$$

La minimizzante:

$$J[\xi] = \int_{\Omega} P \nabla \xi \cdot \nabla \xi \, d\Omega \quad \text{con } \xi \in \left\{ \xi \mid_2 = H_2; \xi \mid_1 = H_1 \right\}$$

COSTRUZIONE APPROSSIMANTE
Cerco di risolvere l'equazione tramite
una f. approssimante.

Si sceglie una funzione ϕ_0 arbitraria purché \in
all'insieme A.

$$u_n = \phi_0 : \phi_0 \in A$$

Dove valore 0 al contorno x per n che $\in A$, allora

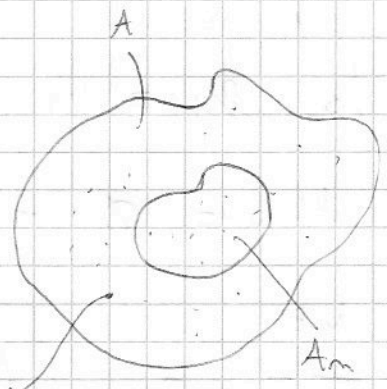
$$\text{valgo } 0 + \sum_{j=1}^m C_j \phi_j$$

ϕ_j deve $\in A$, allora n deve annullare al contorno

(in modo che si abbia $\phi_0 + \sum C_j \phi_j = g_1$ poiché $\phi_0 = g_1$)

$$u_n = \phi_0 + \sum_{j=1}^m C_j \phi_j \text{ sempre al contorno}$$

Coeff. numerico



Poiché uso n funzioni ricorrendo a
beccare un certo numero di funzioni
ma non tutte perché $n \neq \infty$

(ogni $\cdot \in$ ad una funzione J , che non ∞)

Ora se io calcolami $J[u_n] = J[u] \Big|_{u \in A_n}$ sarebbe la
stessa cosa. È un po' come cercare il più
bello di Roma \exists , ma non lo cerco in tutti
gli insulti, ma solo in un gruppetto e forse
non becco il minimo ma altro buona approx.



$J[u_n] =$ ed una semplice funzione C_1 ,
 C_2, \dots, C_m poiché ϕ_0 e ϕ_j sono assegna-
te!

È come avere una funzione normale in n
incognite lineari.

$$\Lambda(c_1, c_2, \dots, c_m) = J[u_m] = J[u] \Big|_{u \in \Lambda_m}$$

lo faccio risolvere al calcolatore poi ho
i $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_m$ che minimizzano il
funzionale nello spazio più ristretto Λ_m
(ma non su tutto A)

↓

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial c_i} = 0 \\ i=1, 2, \dots, m \end{cases} \Rightarrow \text{ricavo } \bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_m$$

La funzione approssimante è:

$$u_m = \phi + \sum_{i=1}^m \bar{c}_i \phi_i$$

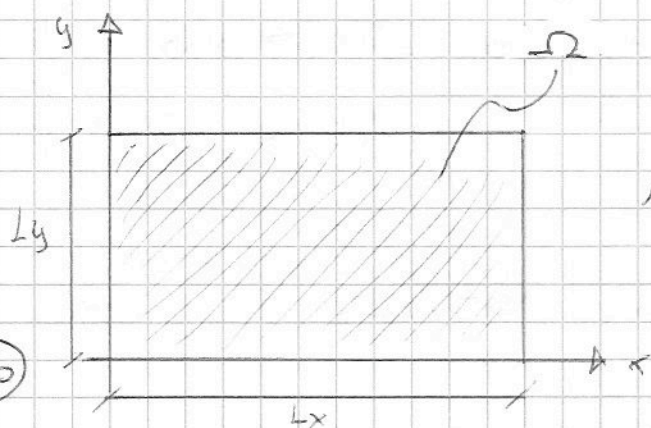
N.B.:

$$J[u] = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla u - 2fu) \, d\Omega; \quad \text{come}$$

$$\text{notazione in usura } \langle \dots \rangle = \int_{\Omega} \dots \, d\Omega$$

$$\nabla u \cdot \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

ESEMPIO DELLA MEMBRANA



si deforma
otto carico

In questo caso
ho la Ξ
che $A \equiv \pi$ perché
si annulla
alla frontiera

Costo di u e l' approssimante:

$$u_m = \underbrace{\phi_0}_{=0} + \sum_{i=1}^m C_i \phi_i = \sum_{i=1}^m C_i \phi_i$$

$\rightarrow = 0$, deve annullarsi alla frontiera

$\phi_i = \phi_{x_i} \cdot \phi_{y_i}$ con i che si annullano ai bordi

E' meglio usare f. trigonometriche che convergono al risultato velocemente.

$$\phi_{i,j}(x,y) = \underbrace{\sin\left(i \cdot \pi \frac{x}{L_x}\right)}_{\phi_{x_i}} \cdot \underbrace{\sin\left(j \cdot \pi \frac{y}{L_y}\right)}_{\phi_{y_j}}$$

$$u_m = \sum_{i,j} C_{i,j} \phi_{i,j}(x,y)$$

Ora voglio calcolare il funzionale con centro l' approssimante:

$$J[u_m] = \int_{\Omega} \left(\left(\sum_{i,j=1}^m C_{i,j} \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{i,j=1}^m C_{i,j} \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. - 2f \sum_{i,j=1}^m C_{i,j} \phi_{i,j} \right) dx dy$$

P.N.B: quando ho roba con \sum e devo derivare:

$$\lambda = \sum_{i=1}^m C_i = C_1 + C_2 + \dots + C_m$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial C_2} = 1, \quad \sum_{i=1}^m \frac{\partial \lambda}{\partial C_i} = \sum_{i=1}^m 1 = m \quad !!$$

Devo derivare sempre rispetto ad un indice che ha un nome $\langle \rangle$

della sommatoria (ex. $\sum_{i=1}^m \frac{\partial \lambda}{\partial C_i}$) altrimenti è noioso.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial C_{i,j}} = \langle x \rangle \left(\sum_{i,j=1}^m C_{i,j} \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} + \langle y \rangle \left(\sum_{i,j=1}^m C_{i,j} \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial y} \right) \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial y} +$$

$$-\lambda \langle f | \phi_{w_r} \rangle = 0$$

$k, r = 1, \dots, m \rightarrow$ mi stanno m^2 equazioni

In forma matriciale:

$$\sum_{i,j}^m C_{ij} \left\langle \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{w_r}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial \phi_{w_r}}{\partial y} \right\rangle = \langle f | \phi_{w_r} \rangle$$

↓
↓
↓

incognite
matrice dei
coefficienti
termini
note

Ulteriore semplificazione in quanto \perp omnia se $i \neq k$ e $j \neq r$:

$$\left\langle \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{w_r}}{\partial x} \right\rangle = 0 \quad \text{mi } n \text{ diagonali AAA}$$

$$\left\langle \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial \phi_{w_r}}{\partial y} \right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{il contributo}$$

Allora prendo i termini della Σ con indici uguali:

$$C_{w_r} \left\langle \left(\frac{\partial \phi_{w_r}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{w_r}}{\partial y} \right)^2 \right\rangle = \langle f | \phi_{w_r} \rangle$$

↓

$$C_{w_r} = \frac{\langle f | \phi_{w_r} \rangle}{\left\langle \left(\frac{\partial \phi_{w_r}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{w_r}}{\partial y} \right)^2 \right\rangle}$$

Inoltre al programma si può semplificare l'integrale doppio con:

$$\iint_{\Omega} \phi(x) g(y) dx dy = \int_0^{L_x} \phi(x) dx \int_0^{L_y} g(y) dy$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 Z + \frac{F(x, y, t)}{P} \\ Z|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Si può fare l'analisi modale ovvero trovare i mod. di vibrazione o i mod. di oscillazione propria:

MODI DI OSCILLAZIONE PROPRIA:

- 1) Oscillazione LIBERA (non c'è forzante) $F=0$
- 2) tutti i punti del sistema vibrano alla stessa frequenza $f = \omega / 2\pi$ (n. cicli / secondo)

Cerchiamo soluzioni $Z(x, y, t) = Z_f(x, y) \sin \omega t$ (parte spaziale, la forma, e temporale) \rightarrow tutti i punti hanno stessa pulsazione.

Funzione di forma $Z_f(x, y)$ e il modo di oscillazione ω e la puls. di risonanza associata a Z_f

$$\begin{cases} -\omega^2 \sin \omega t Z_f(x, y) = a^2 \nabla^2 Z_f \sin \omega t \\ Z_f|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} -\nabla^2 Z_f = \lambda Z_f \quad \text{con } \lambda = \frac{\omega^2}{a^2} \text{ per def.} \\ Z_f|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\text{eq. ellittica}) \end{cases}$$

Problema agli autovalori (è $Ax = \lambda x$) di tipo ell.
Incognite λ e x ovvero λ e Z_f

hanno trovati autovalori (dati $a^2 \Rightarrow \omega^2$) e autofunzioni

Problema in generale ammettono ∞ soluzioni:

$$(\lambda_1, Z_f^{(1)}), (\lambda_2, Z_f^{(2)}), \dots, (\lambda_n, Z_f^{(n)}) \dots$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$$

$Z_f^{(1)}$ è 1° modo di vib. e con via

λ_1 " 1° " quell. " risom. in genere con λ_1 crescenti.

Quando struttura è sollecitata da qualunque forza è pensabile come somma dei moti di vibrazione, in base a freq. forza risponderà con il modo avente ω simile a freq. forza.

I più importanti sono i primi, quelli dopo risentono molto della dissipazione.

Problemi risolvibili con tecniche variazionali:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (P \nabla u) + q(x) u = \lambda \pi(x) u \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ P, \pi > 0 \\ q \geq 0 \text{ in } \Omega \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ex. } \text{trave a} \\ \text{sez. variabile } \sigma \\ \text{con materiale } \text{de} \\ \text{lavora} \end{array}$$

(ottenuta se $P=1, q=0, \pi=1$ quella omogenea)

$\exists \infty$ sol. $(\lambda_1, u_1), (\lambda_2, u_2), \dots, (\lambda_3, u_3)$ con $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$

(\exists il λ + piccolo che corr. al 1° modo di vib.)

Se $(f_1, f_2) = \int_{\Omega} f_1 f_2 \, d\Omega$, i m. di vib. sono tra loro \perp

$$\text{se } (\sqrt{\pi} u_i, \sqrt{\pi} u_j) \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ > 0 & i = j \end{cases} \quad \square$$

Molt. i membri dell'eq. per le e int. u in Ω :

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (P \nabla u) u + q(x) u u \, d\Omega = \lambda \int_{\Omega} \pi(x) u u \, d\Omega$$

Integrare per parti e si ottiene

$$\int_{\Omega} P \nabla u \cdot \nabla u + q u^2 \, d\Omega = \lambda \int_{\Omega} \pi u^2 \, d\Omega$$

quindi
$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} P \nabla u \cdot \nabla u + q u^2 d\Omega}{\int_{\Omega} \pi u^2 d\Omega}$$

passaggio
al funzionale

$$J[\phi] = \frac{\int_{\Omega} P \nabla \phi \cdot \nabla \phi + q \phi^2 d\Omega}{\int_{\Omega} \pi \phi^2 d\Omega}$$

→ QUOTIENTE DI
RAYLEIGH

Proprietà fondamentali:

1) $J[u] = \lambda$ (se da il modo di vibr. restituisce l'autov. corr.)

2) $J[\sigma u] = J[u]$ (funz. omogeneo di grado 0)

[grado α : $J[\sigma u] = \sigma^\alpha J[u]$] Logico per il ritorno della costante moltiplicativa dell'autovettore che non modifica il risultato.

3) Se $A_0 = \{ \phi \mid \phi|_{\partial\Omega} = 0 \}$ è simmetrica che

$$\min_{\phi \in A_0 - \{0\}} J[\phi] = \lambda_1$$

Soluzione del problema per λ

Per risolvere il problema approssimante

$$u_n = \phi_0 + \sum_{i=1}^n c_i \phi_i$$

$$J[u_n] = \frac{\lambda^T \cdot A \cdot X}{\lambda^T \cdot B \cdot X} \quad \text{con } X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} P \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j + q \phi_i \phi_j d\Omega$$

$$B_{i,j} = \int_{\Omega} \pi \phi_i \phi_j d\Omega$$

Si ottiene un
problema

$$\underline{Ax = \lambda Bx} \quad (35)$$

Ottengo $m(\lambda_1, x_1), (\lambda_2, x_2) \dots$ che sono APPROX di quello esatto.

Se \uparrow i nodi, le ampiezze sono \downarrow (come se parlassimo di APPROX la sezione da far vibrare, di precisione crescente)

22/1/08

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (P \nabla u) + qu = \lambda \pi(x) u \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u \neq 0, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \quad J[\phi] = \frac{\int_{\Omega} P \nabla \phi \cdot \nabla \phi + q \phi^2 \, d\Omega}{\int_{\Omega} \pi \phi^2 \, d\Omega}$$

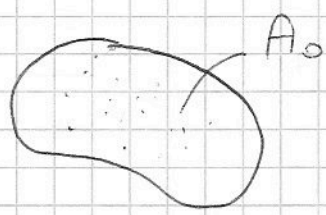
- 1) $J[u] = \lambda$
- 2) $J[\sigma u] = J[u], \sigma \in \mathbb{R}$
- 3) $\min_{\phi|_{\partial\Omega}} J[\phi] = \lambda_1$

⌊ altre proprietà / si ottengono i successivi λ e u con precisione però sempre minore ⌋

Costruito e approssimante, si cerca il min. su spazio in $A_0 = \{ \phi |_{\partial\Omega} = 0 \}$.

$u_m = \sum_{i=1}^m c_i \phi_i$ con $\phi_i \in A_0, \phi_i|_{\partial\Omega} = 0$ tra loro lin. indep.

$A_{0m} \subset A_0$. $\uparrow m$ e grande, \uparrow i punti si collocano fino all'infinito sempre A_0 .



Supponiamo u_1 e σu_1 . Ho il denomin. $\sigma^2 \int_{\Omega} \pi u_1^2 \, d\Omega$. Posso scegliere σ x avere denom. unitario.

Ⓢ ovvero $\sigma = 1 / \sqrt{\int_{\Omega} \pi u_1^2 \, d\Omega}$

Minimizzare J con vincolo che denom. sia 1 (non cambia x via della prop. 2)

Inseriamo lem in J :

$$\Delta(c_1, c_2, \dots, c_m) = J[u_m] = \frac{\sum_{i,j=1}^m c_i c_j \int_{\Omega} p \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j + q \phi_i \phi_j d\Omega}{\sum_{i,j=1}^m c_i c_j \int_{\Omega} r \phi_i \phi_j d\Omega} =$$

$$\left[\left(\sum_{i,j=1}^m c_i c_j \phi_i \phi_j \right)^2 = \sum_i \sum_j \underbrace{c_i c_j}_{\text{incognite}} \underbrace{\phi_i \phi_j}_{\text{note}} \right]$$

$$= \frac{\sum_{i,j=1}^m c_i c_j A_{ij}}{\sum_{i,j=1}^m c_i c_j B_{ij}} = \left(\begin{matrix} A_{ij}, B_{ij} \text{ x def. sono symm} \Rightarrow \lambda \\ \text{saranno tutti } \in \mathbb{R} \end{matrix} \right)$$

Sia:

$$A = ((A_{ij})) ; B = ((B_{ij})) ; X = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

$$= \frac{X^T \cdot A \cdot X}{X^T \cdot B \cdot X} = \frac{N(c_1, \dots)}{D(c_1, \dots)}$$

Applichiamo quindi il vincolo.

$$\min_{\substack{X \in \mathbb{R}^n \\ X \neq 0}} \frac{N}{D} = \min_{\substack{\phi \in \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{N} \\ \phi \neq 0}} J[\phi] = \min_{X \neq 0} \Delta(X) = \text{(soluzione anche:)}$$

↳ lo stesso approssimando

$$= \min_{\substack{X^T \cdot B \cdot X = 1 \\ \text{vincolo}}} \frac{N}{D} = \min_{D=1} N$$

Problema di min. vincolato:

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$$\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$$

Si usano i MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

$$k = 1, 2, \dots, m \quad m < n$$

5. Costruisce:

$$G = Z(x_1, x_2, \dots, x_m) + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_n \varphi_n$$

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0 & i = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial G}{\partial \lambda_j} = 0 & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \\ \vdots \\ \varphi_n = 0 \end{cases}$$

Ex: $f = xy$; voglio $\max f$ in modo che $\varphi(x, y) = x + y = 1$

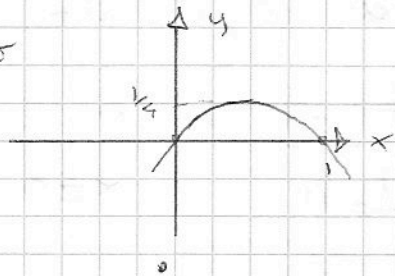
Sovvi il vincolo = 0: $x + y - 1 = 0$ e faccio

$$G = xy + \lambda(x + y - 1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x} = y + \lambda = 0 \rightarrow y = -\lambda \\ \frac{\partial G}{\partial y} = x + \lambda = 0 \rightarrow x = -\lambda \\ \frac{\partial G}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0 \rightarrow -2\lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Qui posso risolvere sostituendo il vincolo nella f , ottengo:

$f = x(1-x)$ e grafico



Quindi costruiamo $G = N + \tilde{\lambda}(1-D)$

($\tilde{\lambda}$ è approssimante del λ esatto del prob. iniziale)

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0 & i = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial G}{\partial \tilde{\lambda}} = 0 & \text{Quindi:} \end{cases}$$

$$\textcircled{38} \quad \frac{\partial N}{\partial x_i} - \tilde{\lambda} \frac{\partial D}{\partial x_i} = 0$$

$D = I$. Riscriviamo il problema:

$$\begin{cases} \lambda A \cdot x = \tilde{\lambda} B \cdot x \\ x^T B x = 1 \end{cases}$$

Quindi $\min J[\phi]$ diventa:

$$\begin{cases} \min G = N + \tilde{\lambda}(1-D) \\ Ax = \tilde{\lambda} Bx \\ x^T Bx = 1 \end{cases}$$

Risolvendo otteniamo $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_m$ ai quali associa x_1, x_2, \dots, x_m (def. a meno di cost. multiple che deve essere / da scelta).

il vincolo, ma non ha effetto pratico-operativo [prop. 2]).

Im che modo $\tilde{\lambda}$ è collegato con λ ?

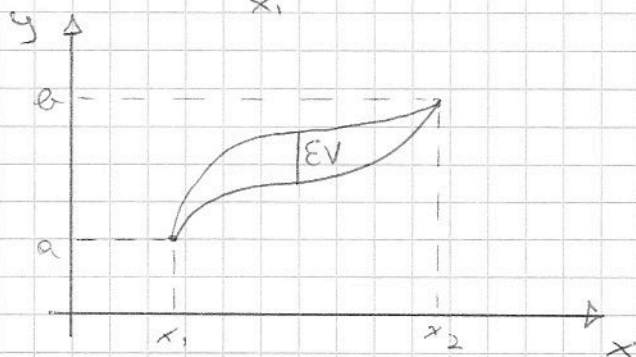
Per trovare $\tilde{\lambda}$, $Ax_1 = \tilde{\lambda}_1 Bx_1$. Moltiplico entrambi per x_1^T , quindi $\tilde{\lambda}_1 = \frac{x_1^T A x_1}{x_1^T B x_1}$, proprio l'autovale del quot. di Rayl.

$\tilde{\lambda}_1$ approx per eccello (scelgo dentro a insieme + piccolo)

24/1/08

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, \dot{y}) dx \quad ; \quad y = y(x) \text{ con } x_1 \leq x \leq x_2$$

$y(x_1) = a \text{ e } y(x_2) = b$



Calcoliamo $J[y + \epsilon V] =$
 $(V(x_1) = V(x_2) = 0)$
 $= \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \epsilon V, \dot{y} + \epsilon \dot{V}) dx =$

Calcoliamo $\left. \frac{\delta J}{\delta \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} f_y \cdot V + f_{\dot{y}} \dot{V} dx = \int_{x_1}^{x_2} f_y V - \frac{d}{dx} f_{\dot{y}} \cdot V dx +$
 $+ f_{\dot{y}} V \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{\dot{y}} \right) V dx = 0 \quad \forall V \in \mathcal{M}$

$$\frac{d}{dx} f_y - f_{yy} = 0$$

→ eq. di EULER associata al funz.

Esprimita in forma ho eq. del 2° ordine alle quali

$$\text{avv. } \begin{cases} y(x_1) = a \\ y(x_2) = b \end{cases}$$

Se manca una dip. esplicita da y ho

$$f = f(x, y) \quad \text{quindi} \quad \frac{d}{dx} f_y = 0 \Rightarrow \boxed{f_y = \text{cost}} \quad (\text{eq. 1})$$

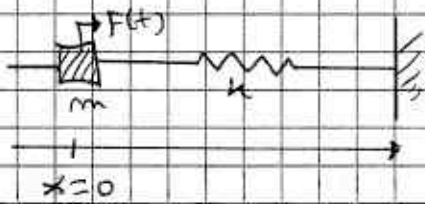
solle il 1° membro e poi applico le 2 condizioni.

FINE 1° PERIODO (24/1/2008)

41. OSCILLATORE ARMONICO / MODI DI VIBRAZIONE
47. TRASFORMATA DI FOURIER
50. MODI DI OSCILLAZIONE TRAVE
51. [ESERCITAZIONE PER L'ESAME]
53. SVUOTAMENTO SERBATOIO
58. ESEMPIO PIASTRA / OPERATORE BIARMONICO
60. METODO DI GALERKIN
61. PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE / FORMULAZIONE LAGRANGIANA / PRINCIPIO DI FERUST
65. METODI ALLE DIFFERENZE FINITE
68. CONDIZIONE DI STABILITA'
69. DIFFERENZA CENTRATA
70. CONSISTENZA / ERRORE DI TRONCAMENTO / CONVERGENZA
71. STABILITA'
74. CONDIZIONE DI COURAN
75. EFFETTO INSTABILITA' NUMERICA / SCHEMI ESPlicito - IMPLICITO
76. SCHEMI DI LAX
79. DISPERSIVITA' DI UN' ONDA

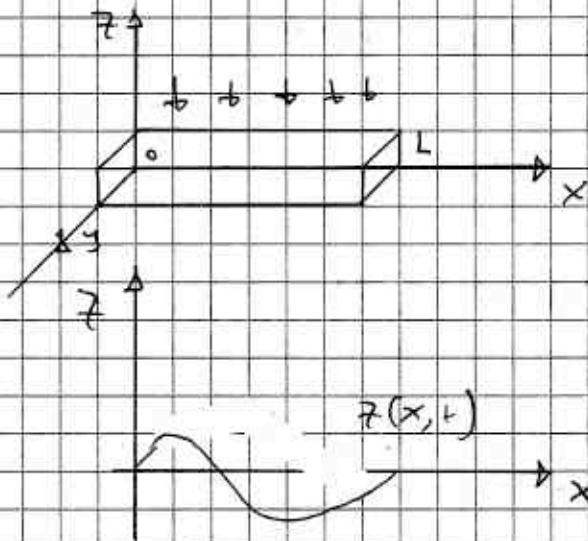
$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

$$E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m (\omega^2 x^2 + \dot{x}^2); \quad x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$



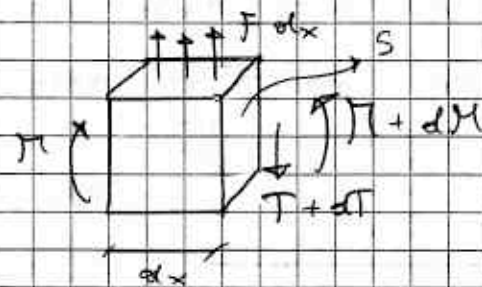
$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Com. trave 3D:



Com. k anche ∞

Stato conio elementare:



Massa e' $\rho S dx$ x accelerati

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \text{suma } f, \text{ vert. agenti}$$

$$\rho S dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -dT + F dx$$

$$\rho S \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{dT}{dx} + F; \quad T = \frac{dM}{dx} \text{ e } M = EJ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ quindi}$$

$$T = EJ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \text{ quindi otteniamo}$$

$$F = \rho S \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$$

flex. semplice]

Quindi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = f(x,t)$$

$$\text{con } f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho S}, \quad a^2 = \frac{EJ}{\rho S}$$

Caso + semplice e' caso statico, \dot{x} tempo:

$$a^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = f(x)$$

Es:

$$z(0) = 0$$

$$z'(0) = 0$$

$$z''(L) = 0$$

$$z'''(L) = 0$$

è l'intersema caso DINAMICO

Eq. del 4° ordine (essendo M e T) non classificate che applicate a precisi problemi fissi.

"Modo di oscillazione": sol. dell'eq. non forzata in cui i punti vibrano alla stessa freq.

Prendendo eq. omogenea associata:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \quad \text{con } z = z_f(x) \sin(\omega t) \quad (\text{separa parte spaziale e parte temp.})$$

Sostituendo: $-\omega^2 \sin(\omega t) z_f + a^2 \frac{d^4 z_f}{dx^4} \sin(\omega t) = 0$

$$\frac{d^4 z_f}{dx^4} = \frac{\omega^2}{a^2} z_f = \lambda z_f \quad \lambda \text{ autovalore}$$

Vincoli ipotizzati:

- INCASTRO: $z = z' = 0$
- APPOGGIO: $z = z'' = 0$
- ESTREMO LIBERO: $z'' = z''' = 0$

In $x=0$ si ha

$$\frac{\partial z^{s_1}}{\partial x^{s_1}} = \frac{\partial z^{s_2}}{\partial x^{s_2}} = 0 \quad \text{con } s_1, s_2 \text{ interi che a tempo su vincolo}$$

In $x=L$

$$\frac{\partial z^{p_1}}{\partial x^{p_1}} = \frac{\partial z^{p_2}}{\partial x^{p_2}} = 0 \quad (\text{colom per } p_1, p_2)$$

Soluzioni ordinabili:

$$(\lambda_1, Z_f^{(1)}(x)), (\lambda_2, Z_f^{(2)}(x)) \dots \text{ con } \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

Ho ex Z_1, Z_2 di ①. Allora $aZ_1 + bZ_2$ è ancora sol. di ① [se hanno moti di v. cost. ho sol. amm.]

Insieme di sol. ① \mathcal{B} , è SP. V.F.T. e le Z sono VETTORI che normalizzati danno altre sol. libere.

S.V. di ① ha ∞ sol. Ogni $Z \in \mathcal{B}$ si può scrivere

$$Z = a_1 Z_f^{(1)} + a_2 Z_f^{(2)} + \dots + \dots$$

Prodotto scalare $(Z_1, Z_2) = \int_0^L Z_1 Z_2 dx$

Insieme di Z è base \perp :

$$(Z_f^{(m)}, Z_f^{(n)}) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$$

Si ha anche:

$$\left(\frac{d^c Z_f^{(m)}}{dx^c}, Z_f^{(n)} \right) = \left(Z_f^{(m)}, \frac{d^c Z_f^{(n)}}{dx^c} \right)$$

Infatti $\int_0^L \frac{d^c Z_f^{(m)}}{dx^c} Z_f^{(n)} dx$ (per parti) = $\frac{d^3 Z_f^{(m)}}{dx^3} Z_f^{(n)} \Big|_0^L +$
 $-\int_0^L \frac{d^3 Z_f^{(m)}}{dx^3} \frac{dZ_f^{(n)}}{dx} dx$
qualunque sia il vincolo in 0 o in L

[Con k int. \times parti ho la relazione]

$$\lambda_m (Z_f^{(m)}, Z_f^{(n)}) = \lambda_n (Z_f^{(m)}, Z_f^{(n)}) \text{ qualunque}$$

$$(\lambda_m - \lambda_n) (Z_f^{(m)}, Z_f^{(n)}) = 0 \text{ Essendo per}$$

$$\text{forza } \lambda_m \neq \lambda_n \Rightarrow (Z_f^{(m)}, Z_f^{(n)}) = 0 \text{ qualunque}$$

modo di v. cost. sono tra loro \perp e cost. ④

uno S.V.

Vogliamo 4 sol. lin. indep per $\textcircled{1}$. Possiamo
 e^x , $\cosh x$, $\sinh x$, e^{-x} , oppure $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; come $\sinh \sqrt{\lambda}$ con $\sqrt{\lambda} = \mu$, quindi

$$Z_f(x) = A \sinh \mu x + B \cosh \mu x + C \sin \mu x + D \cos \mu x$$

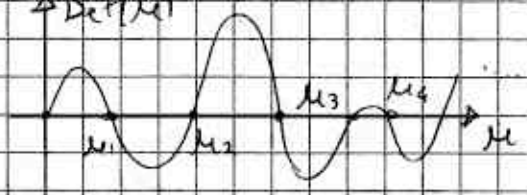
Es:



$$\begin{aligned} Z_f(0) &= 0 \Rightarrow B + D = 0 \\ Z_f'(0) &= 0 \Rightarrow A + C = 0 \\ Z_f''(L) &= 0 \\ Z_f'''(L) &= 0 \end{aligned}$$

4 eq in 4 inc, sist. di eq. lineari omogenee. Ammette
sol. non nulla se $\det = 0$. Nota coeff. e funzione
di μ . Otteniamo $\det(M) = 0 \quad \uparrow \text{Det}(M)$

Ho ∞ radici, calcolero i primi
che mi interessano ed elevo alla 2° .



Ho $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$ Ho 4 eq lin. dip se li sostituisco

$$\text{in } \begin{cases} A(\) + B(\) + C(\) + D(\) = 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

Cancello eq. a
caso e do valore
arbitrario ad un
coefficiente (es $D=1$)
Sist. di 3 eq in 3
inc.

idem per $\mu_2, \mu_3 \dots$

20/12/2008

Se ho Z posso fare c. lineare:

$$Z(x) = A_1 Z_f^{(1)}(x) + A_2 Z_f^{(2)}(x) + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} A_j Z_f^{(j)}(x)$$

$\textcircled{44}$ $\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$, stessa analogia formale)

Se A dovremmo α per forza del tempo. Le $Z_j^{(k)}(x)$ sono note (e calcolati, a nota)

Se $Z(x,t)$ è sol. dell'eq omogenea, $A_j(t) = a_j \sin(\omega_j t + \phi_j)$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j''(t) Z_j^{(0)}(x) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j(t) \frac{d^2 Z_j^{(0)}(x)}{dx^2} = f(x,t)$$

Esistono modi di vibr. ω_j nodali $= \lambda Z_j$ (Quinon)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^2 A_j(t)}{dt^2} Z_j^{(0)}(x) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j(t) \frac{d^2 Z_j^{(0)}(x)}{dx^2} = f(x,t) \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (A_j''(t) + \omega_j^2 A_j(t)) Z_j^{(0)}(x) = f(x,t)$$

Per avere componenti V_x facis di solito $\hat{i} \cdot \vec{V}$

Questa eq. va allo stesso modo proiettata nel k -esimo

modo di vibrazione:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (A_j''(t) + \omega_j^2 A_j(t)) (Z_j^{(0)}(x), Z_j^{(k)}(x)) = (f(x,t), Z_j^{(k)}(x))$$

ma per la prop. di \perp , rimane solo

$$[A_k''(t) + \omega_k^2 A_k(t)] (Z_f^{(k)}, Z_f^{(k)}) = (f(x,t), Z_f^{(k)})$$

$$A_k''(t) + \omega_k^2 A_k(t) = f_k(t) = \frac{(f(x,t), Z_f^{(k)})}{(Z_f^{(k)}, Z_f^{(k)})}$$

con $k=1, 2, 3, \dots$

Stessa forma dell'oscillatore armonico, ma sono disaccoppiate e ce ne sono ∞ modi di vibrare.

Forza applicata e proiezione codice distribuita su modo di vibrazione. Se $e \neq 0 \Rightarrow$ modo di vibr non eccita struttura. Se $f_k(t) \sim \sin \omega t$, i.e. 1 termine va in risonanza.

Membr. or. armonico in edifica in 1 modo, quanto con ∞

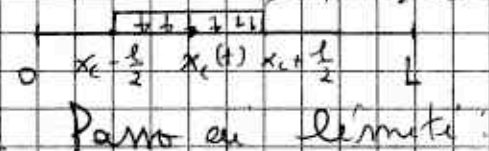
Es: $f(x,t) = \frac{F}{PS}$ Se diventa carico concentrato
 $\int_0^l F \cdot Z_f^{(n)} dx$

$$(f(x,t), Z_f^{(n)}) = (F(x,t), Z_f^{(n)})$$

$$(Z_f^{(n)}, Z_f^{(n)}) = PS(Z_f^{(n)}, Z_f^{(n)})$$

L'equivalente dim. bruto $\rightarrow F_c(t)/l$

$$(F_c^{(d)}(t), Z_f^{(n)}(x)) = \int_{x_c - \frac{l}{2}}^{x_c + \frac{l}{2}} \frac{F_c^{(d)}(t)}{l} Z_f^{(n)}(x) dx$$



$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} \int_{x_c - \frac{l}{2}}^{x_c + \frac{l}{2}} \frac{F_c^{(d)}(t)}{l} Z_f^{(n)}(x) dx \quad (\text{applico th. della media}) =$$

$$= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} \cdot F_c^{(d)}(t) \cdot Z_f^{(n)}(x_c) \cdot l = F_c(t) Z_f^{(n)}(x_c(t)) \quad \text{Quindi}$$

$$f_n(t) = \frac{(F(x,t), Z_f^{(n)}(x))}{PS(Z_f^{(n)}, Z_f^{(n)})} + \sum_{k=1}^N \frac{F_c^{(k)}(t) \cdot Z_f^{(k)}(x_c^{(k)}(t))}{PS(Z_f^{(k)}, Z_f^{(k)})}$$

Armonico del 2° ordine va dato $A_n'(0)$ e $A_n(0)$

Se $A_n'(0) = 0$ per inizio fenomeno bracco e ferma.

$A_n(0) = 0$ " " " " " " " " " " incoformata

25/2/08

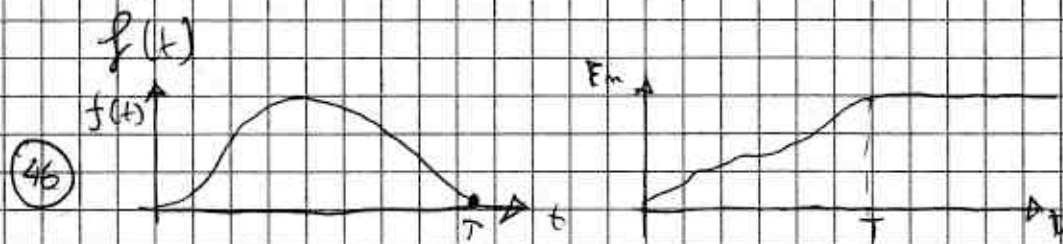
Es: $x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$

$x(0) = 0$

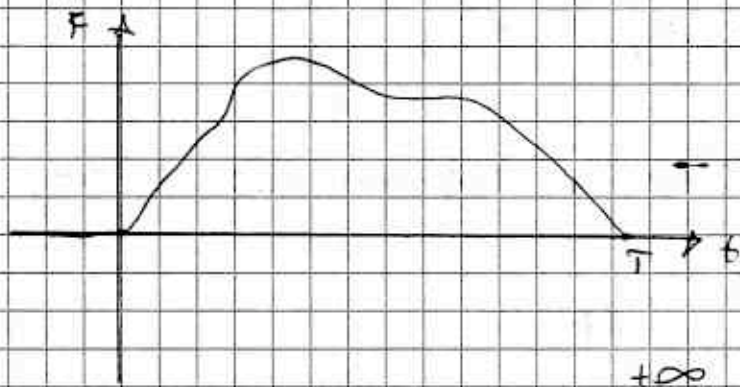
$x'(0) = 0$

Energia oscillatore e' $E_m = \frac{1}{2} (x'(t)^2 + \omega^2 x(t)^2)$

(x alterna)



Supponiamo avere $F(t)$ convergente



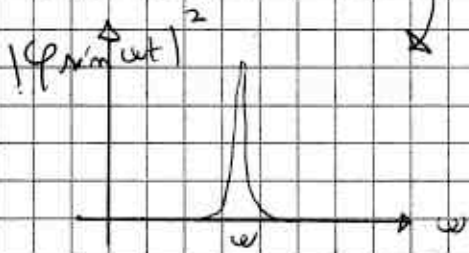
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt < +\infty$$

Si definisce $\varphi_F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$ con $i = \sqrt{-1}$
 e $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$

detta TRASFORMATA DI FOURIER di $F(t)$

ω è pulsazione. L'argomento è $(F, e^{i\omega t})$ [n. scalare
 n. fa con complesso coniugato]. Si estrae componente
 numerica alla freq. ω alla quale lavoriamo.

Se ad ex ho \rightarrow ho "picco" di energia alla freq.
 ω .



Si applica questa per segnali di
 tipo "impulso".

Si introduce $\zeta(t) = x'(t) + i\bar{\omega} x(t)$. Derivo e sostituisco.

$$\zeta'(t) = x''(t) + i\bar{\omega} (x'(t)) \Rightarrow \zeta'(t) - i\bar{\omega} x(t)$$

$$\zeta'(t) = x''(t) + \underbrace{i\bar{\omega}^2 x(t)}_{f(t)} + i\bar{\omega} \zeta(t)$$

$$\zeta'(t) - i\bar{\omega} \zeta(t) = f(t) \quad \text{Molt. i due membri per } e^{-i\bar{\omega}t}$$

$$e^{-i\bar{\omega}t} \cdot \zeta'(t) - i\bar{\omega} \zeta(t) e^{-i\bar{\omega}t} = f(t) e^{-i\bar{\omega}t} \quad \text{ovvero}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\zeta(t) e^{-i\bar{\omega}t} \right) = f(t) e^{-i\bar{\omega}t} \quad \text{Integriamo nel tempo}$$

$$\int_0^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\zeta(t) e^{-i\omega t} \right) dt = \int_0^{t_1} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

($\zeta(0) = x'(0) + i\omega x(0)$, oscillatore a riposo all'istante $t=0$)

$$\zeta(t_1) e^{-i\omega t_1} = \int_0^{t_1} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\zeta = x' + i\omega x \quad \rightarrow \quad |\zeta|^2 = x'^2 + \omega^2 x^2 \quad \text{pari}$$

proprio a $2E_m$ quindi

$$\left| \zeta(t_1) e^{-i\omega t_1} \right| = \left| \int_0^{t_1} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|$$

$$\left| \zeta(t_1) \right|^2 = \left| \int_0^{t_1} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 = 2E_m$$

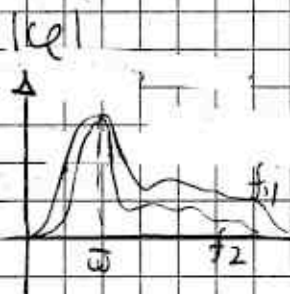
Se prendiamo $t_1 > T$ e come $t \rightarrow \infty$ e se prendo $t_0 < 0$ e come $-\infty$ si ha

$$\left| \zeta(t) \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad \text{si ha che:}$$

$$E_m = \frac{1}{2} \left| \varphi_f(\omega) \right|^2 \quad \text{calcolata quindi con la } \omega \text{ propria delle oscillate.}$$

Se ω_f eccitatrice $\equiv \omega$, E_m trasferita all'osc. e' ENORME e ha un risonanza.

Se ho



\rightarrow se $\omega_f = \omega_{f_2}$ anche se in t diversi trasferiscono stessa energia.

Non ci serve il coefficiente di f ma vogliamo sapere ω .

Caso traslato!

$$Z(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j(t) Z_j^{(j)}(x) \quad \text{e} \quad A_k'' + \omega_k^2 A_k = \frac{f_k(t)}{(Z_j^{(k)}, Z_j^{(k)})}$$

$$E_{\text{tracce}} = \left(\frac{1}{2} \rho S \alpha x \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E J \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right) \text{tracce con } \omega$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho S \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)^2 + E J \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad \left(\text{quadrato } \sum \text{ e } \sum \text{ con indice diverso} \right)$$

$$E_{\text{tracce}} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho S \sum_{j,k=1}^{\infty} A_j' A_k' Z_j^{(k)} Z_k^{(j)} + E J \sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{A_k A_j}{\alpha x^2} \frac{d^2 Z_j^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 Z_k^{(j)}}{dx^2} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \rho S \sum_{j,k=1}^{\infty} A_j' A_k' (Z_j^{(k)}, Z_k^{(j)}) + \frac{1}{2} E J \sum_{j,k=1}^{\infty} A_k A_j \left(\frac{d^2 Z_j^{(k)}}{dx^2}, \frac{d^2 Z_k^{(j)}}{dx^2} \right)$$

Spuntato \downarrow
 $(Z_j^{(k)}, \frac{d^2 Z_k^{(j)}}{dx^2}) \leftarrow$ spuntato \downarrow da 1
 parte (2 integ. per parti)

Sono modi di vibrazione se $\frac{d^4 Z_j}{dx^4} = \lambda Z_j$, e particolare. (con $\lambda = \frac{\omega^2}{\alpha^2} = \frac{\omega^2}{E J}$)
 $\hookrightarrow \lambda_0 (Z_j^{(k)}, Z_k^{(j)})$

Sostituendo e ho $\frac{1}{2} E J \sum_{j,k} \frac{A_k A_j \omega_j^2}{E J} \rho S (Z_j^{(k)}, Z_k^{(j)})$

Quindi:
 $E_{\text{tracce}} = \frac{1}{2} \rho S \sum_{j,k=1}^{\infty} [A_k' A_j' + \omega_j^2 A_k A_j] (Z_j^{(k)}, Z_k^{(j)})$ Spuntato \downarrow

$$E_{\text{tracce}} = \frac{1}{2} \rho S \sum_{j,k=1}^{\infty} [A_j'^2 + \omega_j^2 A_j^2] (Z_j^{(j)}, Z_j^{(j)})$$

Sarebbe l'energia dell'oscillatore, e \sum della E dei singoli modi di vibrazione. / Analogamente!

$$A_j^2 + \omega_j^2 A_j^2 = \frac{|\varphi_{f_j}(\omega_j)|^2}{(z_f^{(j)}, z_f^{(j)})^2}$$

Quindi

$$E_{trave} = \rho S \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\varphi_{f_j}(\omega_j)|^2}{(z_f^{(j)}, z_f^{(j)})}$$

$f_h(t) = (F, C z_f^{(h)}) \quad \sigma \quad (C z_f^{(h)}, C z_f^{(h)})$ risultata
 e' invariante $\sum \Delta_j(t) z_f^{(j)}$, e' come valore m. di
 minima.

27/2/08

Modi di oscillazione trave:

$$\begin{cases} \frac{d^4 z_f}{dx^4} = \lambda z_f & \text{Se trave non e' omogenea?} \\ \text{c. al contorno (4)} & (\lambda = \omega^2 / a^2 \text{ con } a^2 = \frac{EJ}{\rho S}) \\ & a \text{ e } f(x), \text{ asse trave.} \end{cases}$$

5. può definire una PROPRIETA' MEDIA della trave

$$a^2 = \frac{1}{L} \int_0^L a^2 dx \quad \text{Quindi:}$$

$$\frac{d^4 z_f}{dx^4} = \frac{\omega^2}{a^2(x)} z_f = \lambda z_f = \frac{\omega^2}{a^2} z_f \quad \text{Problema quindi}$$

e' $\lambda = \omega^2 / a^2(x)$. Volt. ambo, memere.

$$\int_0^L z_f \frac{d^4 z_f}{dx^4} dx = \lambda \int_0^L \pi(x) z_f^2 dx \quad \text{quindi ho}$$

$$\int_0^L \frac{d^2 z_f}{dx^2} \frac{d^2 z_f}{dx^2} dx = \lambda \int_0^L \pi(x) z_f dx$$

$$\lambda = \frac{\int_0^L \frac{d^2 z_f}{dx^2} \frac{d^2 z_f}{dx^2} dx}{\int_0^L \pi(x) z_f dx} ; \text{ Pongo } J[\phi] = \frac{\int_0^L \frac{d^2 \phi}{dx^2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} dx}{\int_0^L \pi(x) \phi^2 dx}$$

(quoz. di Rayleigh)

Non presente della c. multiplicità

Si costruisce approssimante $Z_N = \sum_{i=1}^N C_i \phi_i(x)$

$$J[Z_m] = \frac{X^T \cdot A \cdot X}{X^T \cdot B \cdot X} \quad \text{con } X = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = \int_0^L \phi_i'' \phi_j'' dx \quad \text{e} \quad B_{ij} = \int_0^L \pi(x) \phi_i \phi_j dx$$

Effetto $\pi(x)$ dal \Leftarrow computazionale non over problem (metodo numerico)

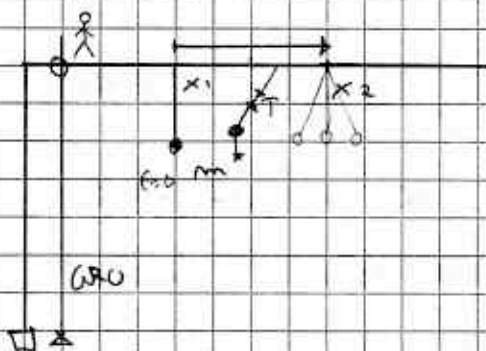
Si ha $AX = \tilde{\lambda} BX$ e si risolve $B^{-1}AX = \tilde{\lambda} X$

Procedimento con precisione \leftarrow con \uparrow numero di valori.

Funzioni lineari. invar. $\Rightarrow B^{-1} \exists$.

ESERCIZIO

28/2/08



Gr. con carrelli che è spostato in vert. e poi in verticale $\rightarrow \uparrow$ o \downarrow .

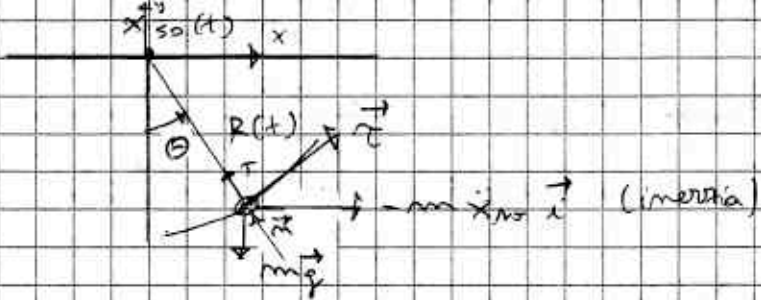
Blocco quindi movimento libero \uparrow e \downarrow ass. a incastro.

Trovare i modi di vibrazione con

incastro - estremi libero. Tensione T che agisce su manna sospesa in parte vert. e orizz.



T_0 non da tant. problemi (rigidità assiale), calcolo T_v tramite pendolo e varia azione concentrata sulla trave. C'è f. inerzia orizzontale e vibrazione trave porta anche acc. verticale, sarebbe problema accoppiato ma f_v è piccolo e c'è $|\ddot{Z}_{max}| \ll g$



$$m \vec{a} = m \vec{g} - m \ddot{x}_{so}(t) \vec{e}_z + T$$

Proiettandolo su \vec{z} si ha:

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{R}}{R} \dot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin \theta - \frac{\ddot{x}_{so}(t) \cos \theta}{R}$$

↓
allung e accorc. fune

↓
inerzia

Integrare con condizione

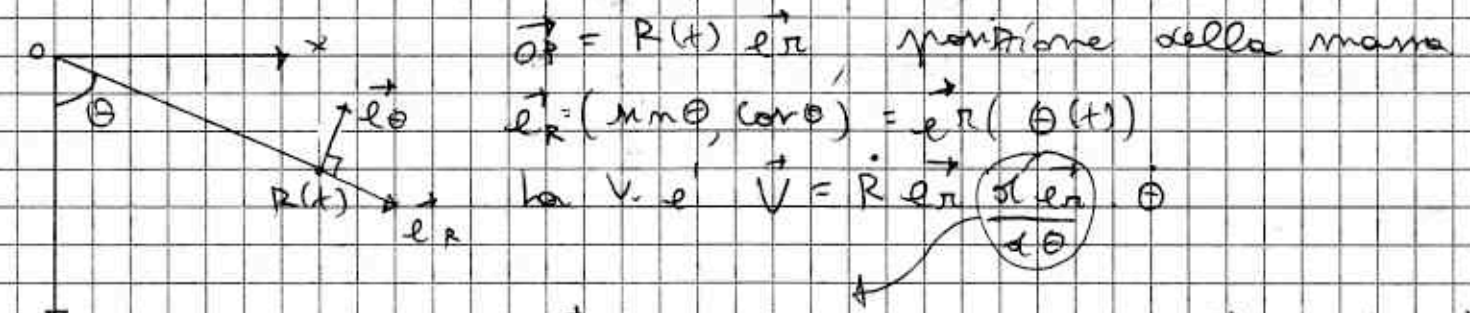
$$\theta(b) = 0$$

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

e si ha la $\theta(t)$ del cavalletto. Quindi ricavi la T con la eq proiettata su \vec{n} e si ha:

$$T = m(R \ddot{\theta} - \dot{R}^2) + mg \cos \theta - m \ddot{x}_{so}(t) \sin \theta$$

Dimostra le 2 proiezioni, considerando che per \vec{a} si ha:



$$\vec{e}_\theta = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = (\cos \theta, -\sin \theta), \perp \text{ a } \vec{e}_r \text{ e detto } \vec{e}_\theta$$

Quindi $\vec{v} = \dot{R} \vec{e}_r + R \vec{e}_\theta \dot{\theta}$ Per l'acc di nuovo rifare derivata e si trova $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$ Quindi allora $m \vec{a} = \ddot{a} (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ con $\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r'$ e $\vec{e}_r = -\vec{e}_\theta'$

- $T \cos \theta$ e' la f. concentrata applicata al punto di sospensione, e tra le portanti.

Quindi:

- 1) Calcola i modi di vibrazione intorno / estremo libero
- 2) Costruire le 6 eq. per i coeff. dei 6 modi
- 3) Ricostruire la deformata istantanea della trave

Nella realtà c'e' acc. iniziale e acc. finale

(52) che - se troncatura - accade che, spostando il

correlati pendolo non oricella (3° termine T nulla)

Si trovano R (quando \uparrow o \downarrow il carico), effetto di allegg / app carico

Fai ulteriori prove e commenta

[file TESTHEMATICS]:

Vel e Velocità alla carico

Sistema MKS per tutti i dati.

α_0 : quando $T = \alpha$, $V = 99\%$ v. regime $F = 0,1$ sec, ovvero in $0,1$ per. il cervello è al 99% della sua V (piccola accelerazione)

$x_{no} = x_{spo}$ (olercutta a bratti)

$\ddot{x}_{no} = a_2 x_{no}$ ($m x_{no}(t) \neq 0$ solo in avanti e partenza)

Tall = $5T_0$: in $4T_0$ si allunga (dopo che si è mosso in T_0)

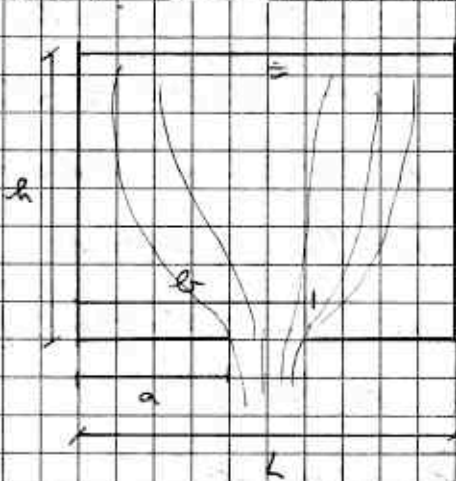
$$\left(A_n'' + a_{cena} = \frac{f_n(t)}{p_s(Z_f^{(u)}, Z_f^{(u)})} \right), \quad f_n(t) = F_c(t) Z_f(x_{no}(t))$$

\downarrow \(\rightarrow\)
 appiunt dopo modellato prima con T

Le c. imitici sono = alla const. Matricia (oleformata della trave con pendolo appeso)

Eserc: SUBSTANTIVO SERBATOIO

3/3/08



Uguiamo campo di moto a sequito effluvio.

Si può corr. la f di corrente che rimane costante lungo le linee di fl.

$$\text{div}(\vec{u}) = 0 \quad \text{e} \quad \text{mod} \text{ re } \psi = \psi(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Si hanno vorticità: $\Omega = \left\{ 0, 0, \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$ e imp. alla fun. di corrente:

$$\Omega = \left\{ 0, 0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\}, \text{ da eguagliare}$$

a 3° comp. vorticità.

Se m è irrotazionale (e incompressibile) si ha

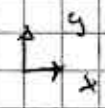
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{La funzione } \psi \text{ nel contorno}$$

(problema di Dirichlet)

Sulle pareti impermeabili e immobili la ψ è costante.

All' esterno $\psi \equiv$ integrale nella linea seguendo il contorno

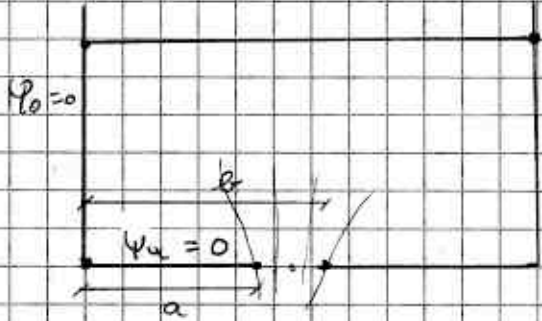
$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$



Sulla superf. libera deve essere
distrib. velocità \times costante Q imp.

a quella che esce quindi

$$\psi = \psi_0 - \frac{Q}{L} x$$



In mezzo all' apertura $\psi = \psi_0 - \frac{Q}{(b-a)} (x-a)$

Q è costante sulle pareti.

(nota: isolato
 $p = \text{cost.}$
e incompressibile
irrotazionale)

Si può risolvere con formulazione variazionale.

$$J[u] = K[u, u] - 2 \cdot F(u) \rightarrow \text{identicamente nulla}$$

$$K[\psi, \psi] = \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \psi d\Omega = J[\psi] \quad \left(\text{altr. avrebbe impo nella} \right.$$

$\frac{\partial \psi}{\partial n}$, ovvero relativo alla parte di contorno che avrebbe

una $\frac{\partial \psi}{\partial n}$, in realtà ho solo c , nella funzione, alla Dirichlet - vedi concetto "formulazione debole")

La minimizzata $J[\psi]$ al variare di ψ

si esprime ψ con approssimante (Σ troncata):

$$\psi = \psi_0 + \sum_{i=1}^N c_i \psi_i \rightarrow \text{di forma nota}$$

ψ_i Costanti

Troveremo sistema alq. x trovare c_i .

54) ψ_0 è soluzione a parte che soddisfa c.a.

al contorno, mentre le ψ_{ij} si annullano su frontiera.

$$\varphi_0(x, y) = -\frac{Q}{(b-a)}(x-a)g_1(y) - \frac{Q}{L}xg_2(y) =$$

$$= -\frac{Q}{(b-a)}(x-a)\left(\frac{b-y}{b}\right) - \frac{Q}{L}x\frac{y}{b} \quad (\text{costa inoltre con continuità})$$

Mentre x e le ψ_{ij} si deve garantire la continuità e deriv. (C^1). La si può definire con:

$$\psi_{ij}(x, y) = \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad (\text{serie di Fourier normale})$$

Quindi:

$$J = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \sum_{i,j} C_{ij} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \sum_{i,j} C_{ij} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x} \right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \sum_{i,j} C_{ij} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial y} \right] \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \sum_{i,j} C_{ij} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial y} \right] d\Omega$$

$$J = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j} C_{ij} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x} + \sum_{i,j} C_{ij} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial y} \right] \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \left[\sum_{i,j} C_{ij} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x} + \sum_{i,j} C_{ij} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial y} \right] \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} +$$

$$+ \sum_{i,j} C_{ij} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x} + \sum_{i,j} C_{ij} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial y} +$$

$$+ \left[\sum_{i,j} C_{ij} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial y} + \sum_{i,j} C_{ij} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x} \right] d\Omega \quad (\text{le termine lineare e quadratiche; derivando abbiamo})$$

un termine misto e uno lineare \Rightarrow mist. eq. lin. alp. non omogenee.

Si semplifica per le prop. delle ψ_{ij} .

Se somma di Σ indipendenti, non interagiscono, uno meno indice. Faccis der. prima J' .

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi_{i5}}{\partial x} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial \psi_{i5}}{\partial y} \right) d\Omega +$$

(Spostiamo $\perp \psi_{i5}$ se $\pi_{i5} \neq 0$, integrale è nullo)

$$+ \int_{\Omega} C_{i5} \left(\left(\frac{\partial \psi_{i5}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{i5}}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega = 0$$

matr. coeff. in forma diagonale. Quindi:

$$C_{i5} = - \frac{\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi_{i5}}{\partial x} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{i5}}{\partial y} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right) d\Omega}{\int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial \psi_{i5}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{i5}}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega} =$$

$$= \frac{hQ}{(b-a)D^2} \cdot \left(\min \left(\frac{i\pi b}{L} \right) - \min \left(\frac{i\pi a}{L} \right) \right) \quad (\text{soluzione})$$

$$\frac{D^2}{4} \left(\frac{i^2 h}{L} + \frac{j^2 L}{h} \right)$$

Diagrammando le linee di livello si ha



→ linee n m. a seconda
prof. apertura.

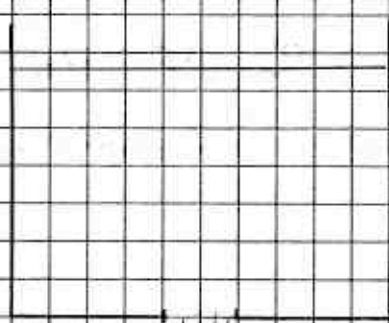
Con ~ 20 punti si rappresenta bene le linee di flusso

Con funzioni a potenziale (altra impostaz.)

Con stesse ipotesi si assume:

$$\vec{u} = \nabla \varphi \text{ che scelse allora } \text{div}(\vec{u}) = 0 \text{ ovvero } \nabla^2 \varphi = 0$$

Le c. al contorno si esprimono su $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ nota = q
 (56) su tutto il contorno del problema.



$$V_1 = -\frac{Q}{L}$$

Flots irrotazionale,

$$\nabla \wedge \vec{V} = 0$$

$$V_2 = -\frac{Q}{b-a}$$

→ si ipotizza in forma di effluvio una V costante

È problema di Neumann.

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \varphi \, d\Omega = 0 \quad \text{Integra x parti:}$$

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (v \nabla \varphi) - \nabla v \cdot \nabla \varphi] \, d\Omega = 0 \quad \text{Applico th. diverg.}$$

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \varphi \, d\Omega = 0$$

Form. Variazionale:

$$J(u) = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, d\Omega + 2 \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} \, d(\partial\Omega)$$

È alla form. debole

Tutta la front. è interrotta da c alla Neumann

$$J(\varphi) = - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \, d\Omega + 2 \int_{\partial\Omega} \varphi g \, d(\partial\Omega)$$

Scegliamo φ che approx. funzione con Σ troncate.

Qui si scelgono altre f. simp. a prima:

$$\varphi = \sum_{i,j} c_{i,j} \varphi_{i,j} \quad \text{con}$$

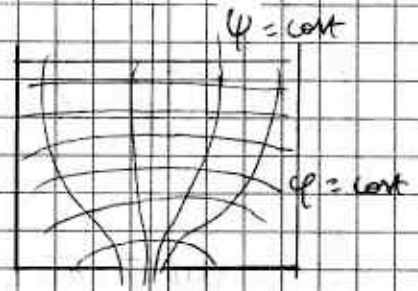
$$\varphi_{i,j} = \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{j\pi y}{R}\right)$$

Devo mantenere il termine noto. Non lo φ_0 sta
 rompere alle φ_1 , se si annulla prob. e indeterminato.
 Inoltre φ_1 devono modificare:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \varphi \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d(\partial\Omega) = 0$$

Anche qui si risulta $\perp \varphi_1$.

Otteniamo linee equipotenziali
 \perp a quelli di flusso \rightarrow Rete del
 moto



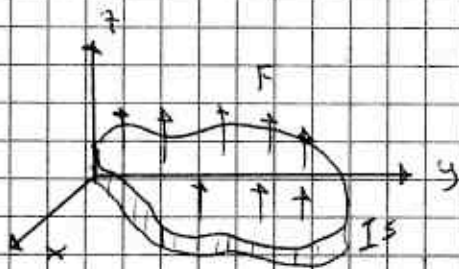
ESEMPIO PIASTRA

10/3/08

"Trave" bidimensionale

Δ diff. sulla membrana, tenuta anche a Π e T .

Equazione e' del ξ trave, simile a trave.



$$\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + a^2 \nabla^4 z = F(x, y, t)$$

C. al cont.

C. iniziali

z e m_p Verticale rispetto al carico.

ρ e' densita' areolare [massa / area]

$a^2 = \frac{E I^3}{12(1-\nu^2)}$ con ν = coeff di Poisson, modello dell
 in altre dir.

$$F(x, y, t) = \frac{F_{tot}}{Area}$$

(\times la trave si avvia $\rho S \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + E I \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = F$)

58 $\nabla^4 z$ e' detto OPERATORE BIARMONICO (laplaciano²)

duro armonico²): $\nabla^4 = (\nabla^2)^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 =$
 $= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$

Si può risolvere il problema STATICO e DINAMICO.
Statico: Costruiamo fino a conf. di riposo Z & $t!$
 $Z(x, y)$, quindi il problema è:

$$\boxed{\nabla^4 z = \frac{F}{a^2} = f(x, y)}$$

Conr. piastra tutta incastrata. Duro (e al cont.):

$$-z|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\text{rot. nulla})$$

$$-\frac{\partial z}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\text{rot. nulla})$$



Δ diff. della membrana a vespino 2 cond, e non basta semplice integrazione.

Si applica una formulazione DEBOLLE. (iolem x gli elementi finiti dove sup. curva è trasformata in pannelli che sono quadrate nelle quale si applica la form.)

Soluzioni cercate in $A = \left\{ z / \begin{array}{l} z|_{\partial\Omega} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right\}$

Ult. x V arbitraria:

$$\int_{\Omega} \nabla^4 z \cdot V \, d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot V \, d\Omega \quad \text{con } V \in \mathcal{H}(\Omega)$$

\rightarrow m. vettoriale

\rightarrow c. al contorno più omogenee

$$\int_{\Omega} \nabla^2 z \cdot \nabla^2 V \, d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot V \, d\Omega$$

$\forall V \in \mathcal{H}$

$$\left(\nabla^2 \left(\nabla^2 z \right) \right) \rightarrow \nabla^2 u \cdot V = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u \right) V$$

e mostra le serv. 2 volte

Qui non dobbiamo min. funzionale, appellaamo eq a un ristretto.

METODO DI GALERKIN

Si costruisce approssimante:

$$Z_N = Z_N^0 (\in \Lambda, \text{ qui possiamo prendere } 0) + \sum_{i=1}^N C_i \phi_i (\in M)$$

Per $\phi_i \neq 0$, devono essere lin. indipendenti.

Da matrice:

$$K[u, v] = F[v] \quad \forall v \in M$$

$$K[Z_N, v] = F[v] \quad (m. incognite, dove ottenere m eq.)$$

Fornisco m $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ fun. lin. indep. $\in M$, per cui la rel. $\textcircled{1}$ valga per tutte loro:

$$K[Z_N, \psi_j] = F[\psi_j] \quad j=1, 2, \dots, m$$

Con ψ_j contenente propriis C_i , le incognite.

Si ha:

$$\sum_{i=1}^N \underbrace{C_i}_{\text{incognita}} \int_{\Omega} \nabla^2 \phi_i \cdot \nabla^2 \psi_j \, d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot \psi_j \, d\Omega \quad \text{con } j=1, 2, \dots, m$$

\rightarrow tutti termini noti.

Sistema di m eq. lineari non omogeneo

C'è approx nel fare approssimante e approx nell'imporre allo spazio generato dalla base lineare delle ψ_j (vale anche per $\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \dots + \lambda_m \psi_m$), ovvero $\forall v \in \Pi_m \rightarrow e \in m, \Pi_m$ e spazio meglio Π .

Problemi di valore. Oscillazioni libere, ovvero sollec. di

$$Z = Z_f(x, y) \sin(\omega t)$$

$$-\omega^2 \rho Z_f \sin(\omega t) + a^2 \nabla^2 Z_f \sin(\omega t) = 0$$

$$\nabla^2 Z_f = \frac{\rho \omega^2}{a^2} Z_f \rightarrow \lambda$$

(c. al contorno)

Problemi agli autovalori (c. str. in 2 var.)

$$(1, Z_f^{(1)}), (2, Z_f^{(2)}), \dots$$

Non c'è sol. analitica in forma esatta. Via numerica usando QUOTIENTE DI RAYLEIGH.

$$J[\phi] = \frac{\int_{\Omega} \nabla^2 \phi \nabla^2 \phi \, d\Omega}{\int_{\Omega} \phi^2 \, d\Omega}$$



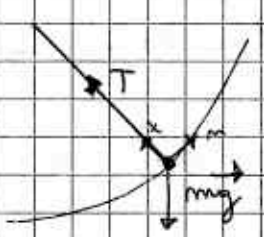
Per semplificare integrale conviene trovare $\phi_i = \phi_x(x) \phi_y(y)$ se forma è rettangolare del dominio (non prendere direttamente i modi di vibrazione x bravi imc - imc nelle 2 dire, ~~1~~ e ~~2~~).

Poss. scegliere $\psi_x \neq \phi_x$ x diagonalizzare, prescelti se loro non sono \perp .

PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE

12/3/08

Del punto della meccanica Newtoniana ($\vec{F} = m \vec{a}$) si usa la formulazione LAGRANGIANA: non fa intervenire le reatt. vincolari se l'attrito e' debole. Ex. pendolo



$m \vec{a} = \vec{T} + m \vec{g}$, e' abbiamo beta con proiezione su m, t

E' analogo al principio di

Fermat. Doppio di luce meglio

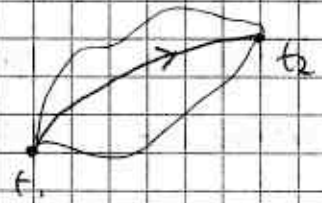
Il percorso minima. Ma se ed ex se ho asfalto
molto caldo luce fa percorso
alterno (la luce aria riscaldata)
e ho miraggi vedendo il cielo



Analogo in meccanica. Si minimizza l'"AZIONE" (mentre
luce min il tempo).

Da A a B $\exists \infty$ percorsi virtuali ma 1 solo \times scelta
Ho sistema fisico (ex trova che velocità, serie che si muova...)
che evolve da t_1 a t_2 . L'azione è def come:

$$A_Z = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad \text{Lagrangiana, dim. su un'energia}$$



$$\underline{L = E - \mathcal{U}} \quad (\text{cinetica} - \text{potenziale})$$

(Sistemi dissipativi non vanno bene)

Principio dice che \times sistemi CONSERVATIVI e evoluzione
segue una L / Integrata nel tempo, L è minima.
Ex: oscillatore armonico.

Se ho $J[y] = \int_{t_1}^{t_2} f(y, \dot{y}, t) dt$, il min si fa con eq. di
Euler-Lagrange, ovvero $\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

1 moti variati sono ISOCRONI (arrivano e partono
megli stessi istanti)

$$\text{Diagram: } \text{---} \left[\begin{array}{c} m \\ \vdots \\ k \end{array} \right] \text{---} x \text{---} \left[\begin{array}{c} m \\ \vdots \\ k \end{array} \right] \text{---} x \text{---} \quad m \ddot{x} = -Kx \quad \text{Costruiamo } L:$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (\text{rel. tra } U \text{ e } f \text{ con } \dot{\text{e}} \text{ che}$$

$$\textcircled{2} U = \frac{1}{2} K x^2$$

$$F_{\text{cons}} = -\nabla U !)$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 = L(\underbrace{\otimes}_{\downarrow}, \underbrace{\odot}_{\downarrow}, "E") \quad ; \text{Nome:}$$

Coordinate generalizzate di CONFIGURAZIONE
 VELOCITA' generalizzate

Quindi minimizziamo

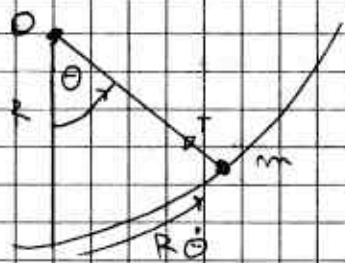
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \leadsto \quad \frac{d}{dt} m \dot{x} = -kx \quad \leadsto \quad m \ddot{x} = -kx \quad (F = ma')$$

Se ci fosse una $F(t)$, $U = \frac{1}{2} k x^2 - F(t)x$.

Quindi in generale AZ di una configuraz. sistema (descritta da funzione u)

AZ [u]

Ex pendolo con estremo fisso



$$\ddot{\Theta} = -\frac{g}{R} \sin \Theta$$

Costo di config. e' Θ .

$$T = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\Theta}^2 ;$$

$$U = m g R (1 - \cos \Theta)$$

$$\text{Quindi } L = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\Theta}^2 - m g R (1 - \cos \Theta) = L(\Theta, \dot{\Theta})$$

$$\text{Minimizzazione: } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = \frac{\partial L}{\partial \Theta} \quad \text{ovvero}$$

$$m R^2 \ddot{\Theta} = -m g R \sin \Theta \quad \text{ovvero} \quad \ddot{\Theta} = -\frac{g}{R} \sin \Theta$$

Ho ignorato la T! Nella form. Newtoniana

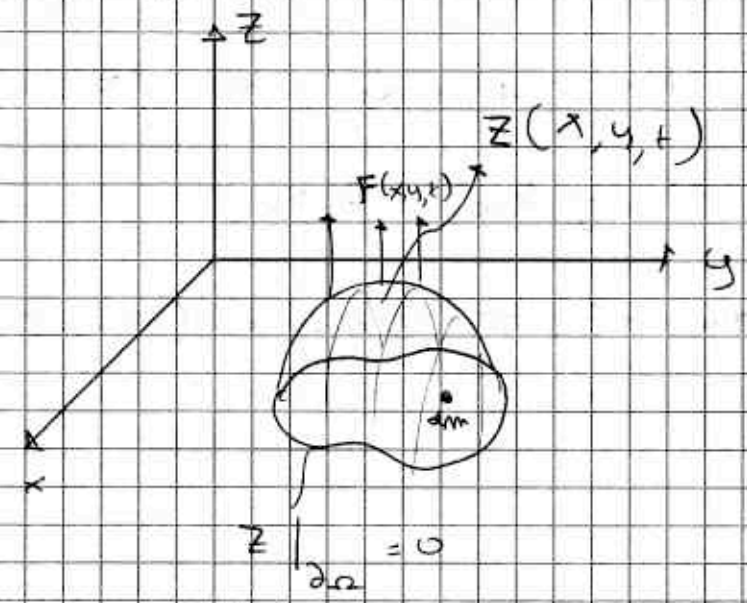
$$m \vec{a} = \vec{T} + m \vec{g} \quad \text{con } \vec{T} \text{ la proiettore su tangente}$$

Se Θ si muove con $\rightarrow x(t)$ [come carrello]

ci varia anche $-m \ddot{x}(t)$

L è "DUs" fenomeno meccanico.

Se ci sono le coordinate materiali, x il moto variato
 per $u + EV$ / al contorno $EV = 0$ (caso membrana) \Rightarrow
 $EV = 0$ su $\partial\Omega$.

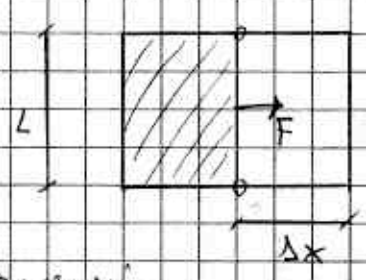


$$\rho = \frac{\pi}{A} \quad \left[\frac{F}{L} \right]$$

$$E = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho v^2 = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 d\Omega$$

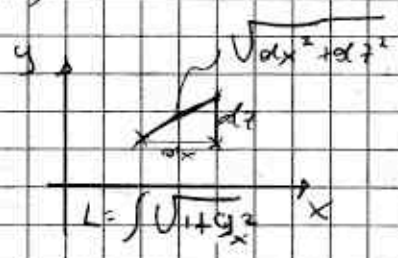
$U =$ "Area deformata - area a riposo" $\cdot T_0$

$$\Delta U = F \cdot \Delta x = T_0 \cdot L \Delta x \rightarrow \text{incremento di area}$$



Membrana ha energia elastica dilatazione, fra le colonne (area bruciata)

$$U[z] = T_0 \left[\int_{\Omega} \left(\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} - 1 \right) d\Omega \right]$$



Regime lineare per piccoli spostamenti,

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \text{ quindi } \sqrt{1 + \frac{z_x^2 + z_y^2}{2}} \approx 1 + \frac{z_x^2 + z_y^2}{4}. \text{ Si ha allora}$$

$$U = T_0 \int_{\Omega} \frac{1}{2} (z_x^2 + z_y^2) d\Omega - z F \rightarrow \text{Nelle citazioni}$$

(64)

$$AZ[z] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - \frac{T_0}{2} (z_x^2 + z_y^2) + z F d\Omega \right]$$

Qui è struttura estesa nello spazio; prima
 alcuni punti materiali

$$\text{Minimo: } \int_{t_1}^{t_2} A Z [Z; V] = \frac{d}{dE} \Big|_{E=0} A Z [Z + EV] = \frac{d}{dE} \Big|_{E=0} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \cdot \right.$$

$$\left. \left(\frac{\partial z}{\partial t} + E \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 - \frac{T_0}{2} \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x} + E \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + E \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + (z + EV) F d\Omega \right] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\Omega} \rho \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - T_0 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + V F d\Omega \right] =$$

= (integrando per parti sfruttando $V|_{\partial\Omega} = 0$ e $v(t_1) - v(t_2) = 0$)

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\Omega} -\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + T_0 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + V F \right] d\Omega = 0 \quad \forall V$$

$$\underline{\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \nabla^2 z + F} \quad \left(\text{re dividendo } \times \rho \text{ ho } a^2 \text{,} \right. \\ \left. \text{identico a prima} \right)$$

METODI ALLE DIFFERENZE FINITE

17/3/2008

I metodi di risoluzione numerica sono 3:

- metodi VARIABILI
- " alle DIFFERENZE FINITE
- " agli ELEMENTI FINITI

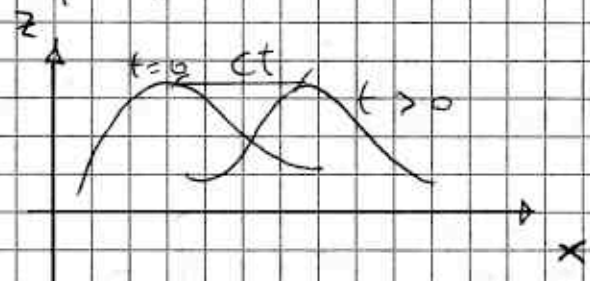
I metodi agli elem. finiti si basano sulla form. debole e sono molto usati in ambito strutturale.

A meno di problemi veramente complessi, quelli alle diff. finite sono più facili da implementare.

Eq: $\frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ con $z = z(x, t)$, incognita

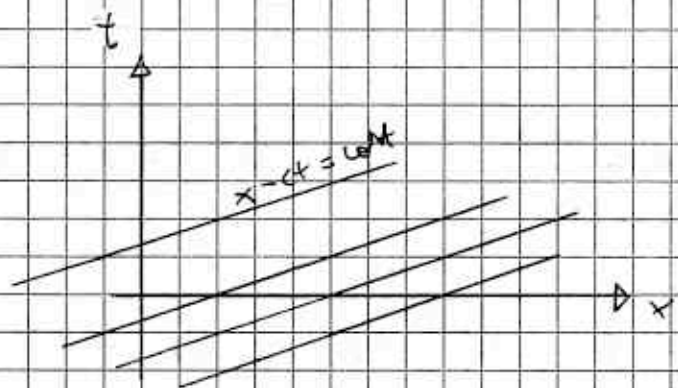
(Wave scalar equation) (c'è una velocità, meno $c > 0$)

È eq. iperbolica con sol generale $z = f(x - ct)$



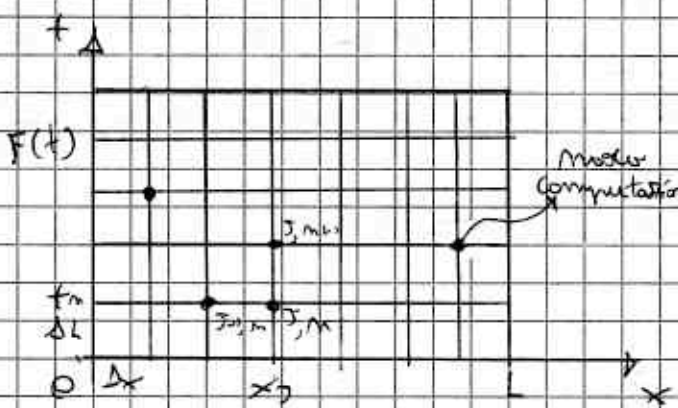
Modello cinematico onde di piena segue questa legge (anche se c non cost.)

Si assegna condizione iniziale $z = f(x - ct)$



Le m. alle di f. in cosa consiste?

Domínio var (invar) è DISCRETIZATO in intervalli, n



genera maglia con nodi indicati con $J, m (x, t)$

$[x_j = j \Delta x, t_m = m \Delta t]$

Eq. di partenza è DISCRETIZATA nel reticolo

Intorno ad 1 nodo comp.

NOVIUS delle DIFFERENZE FINITE

L'eq. diventa algebrica.

Si ha Σ di eq se fatto \forall nodo si trasforma problema

con eq. alg con incognita il valore di f nel reticolo.

Si assegna c. iniziale ($z(x, 0)$) e al contorno ($F(t)$)

$z_j^m \stackrel{(\text{comp})}{=} z(x_j, t_m)$

Cont. generico J, m . Cont. le nimpole correlate:

$$\frac{\partial z}{\partial t} \text{ aumenta } \frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\Delta t} \quad (\text{diff AVANTI})$$

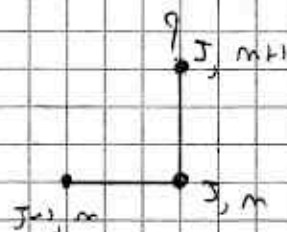
$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ " } \frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (\text{" INDIETRO})$$

$$\frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\Delta t} + c \cdot \frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \rightarrow \text{eq alle differenze}$$

Algoritmo delle procedure nel tempo:

$$z_j^{n+1} = z_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (z_j^n - z_{j-1}^n)$$

Per sapere il stato solo sapere immediat. sotto e a Δx



Se conosco p. iniziale (ex. orto flux.) e al contorno (ex. mola di piena dell'obolo)

Il valore a lato non lo calcolo ma è dato da c. al contorno



È tutto noto ora a $t=1$ e ricomincio.

Perché diff in AVANTI nel tempo? Voglio sapere cosa accade dopo.

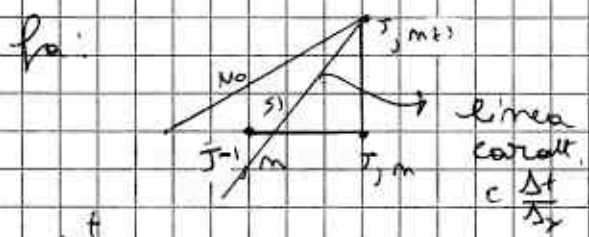
È indietro nello spazio? Obbligatorio. Si e supports infatti che $c > 0$, quindi linee caract. sono: $\frac{dt}{dx}$ ovvero è quella la dist. di influenza del fenomeno. Cio' che accade dipende da ciò che ho dietro x che da lì provengono (ex. mola di piena la da diga a foce e non viceversa! se inverti specchio marchina). Discorso

oppoerto con $C < 0$.

Schema X funzionare delle emq verificare:

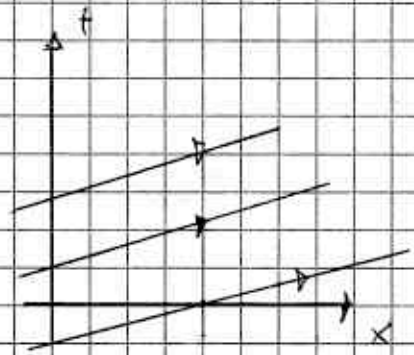
$$\boxed{\frac{\Delta t}{\Delta x} C \leq 1} \rightarrow \text{cetta CONDIZIONE DI STABILITA'}$$

(altrimenti ho valori elevatissimi) Linea Caratt.



delle entrate dentro al reticolo, altrimenti si va in overflow.

Se verificata, prendo + informazioni su quello che mi serve. Se no fuori, altrimenti di calcolo e + piccolo di quello effettivo



Assenta info prese rende schema instabile a seguito del crescere degli errori.

Condizione serve anche a fornire approssimazione che PC fa.

$$\textcircled{1} z_j^{m+1} = z_j^m + z_{t,j}^m \cdot \Delta t + z_{tt,j}^m \frac{\Delta t^2}{2} + o(\Delta t^3)$$

(approx. con Taylor Vogliamo vedere precisione formula)

$$\frac{z_j^{m+1} - z_j^m}{\Delta t} = z_{t,j}^m + \left(z_{tt,j}^m \frac{\Delta t}{2} + o(\Delta t^2) \right)$$

"SCARTO" della derivata esatta

e un $o(\Delta t)$ errore 1° ordine > errore 2° ordine

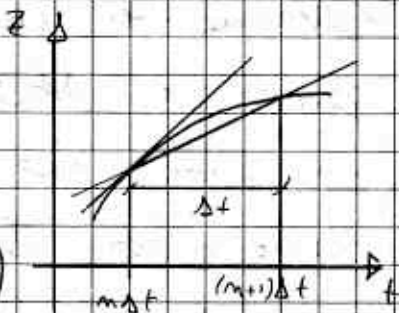
Formule in cui che hanno un 0 del 1° ordine, formule al 1° ordine.

Ⓢ Se voglio formula + precisa?

È come fare con 2 tangente

Formula + precisa:

$$Z_j^{m+1} = Z_j^m + Z_{t+j}^m \cdot \Delta t + Z_{t+j}^m \frac{\Delta t^2}{2} + o(\Delta t^3)$$



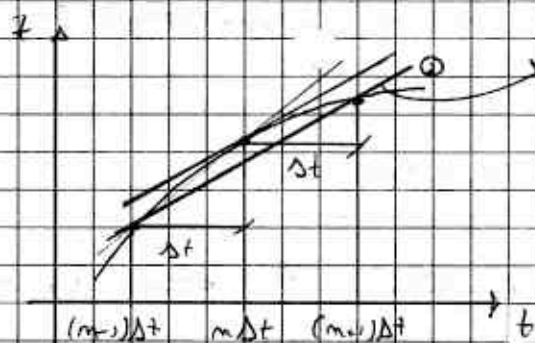
Sottraendo ① - ②

$$Z_j^{m+1} - Z_j^{m-1} = 2\Delta t Z_{t+j}^m + o(\Delta t^3) \quad \text{Dividendo per } 2\Delta t$$

$$\frac{Z_j^{m+1} - Z_j^{m-1}}{2\Delta t} = Z_{t+j}^m + o(\Delta t^2)$$

formula precisa al 2° ordine

DIFFERENZA CENTRATA



è // a tg nel punto
giungendo al 1° ordine che
invece si è inclinata

Se ora nonno ho:

$$Z_j^{m+1} + Z_j^{m-1} = 2Z_j^m + Z_{t+j}^m \Delta t^2 + o(\Delta t^3)$$

$$Z_{t+j}^m = \frac{Z_j^{m+1} - 2Z_j^m + Z_j^{m-1}}{\Delta t^2} + o(\Delta t) \quad \text{formula del 1° ordine}$$

(calcolo i termini della derivata 2°)

È così via si possono calcolare le der.

Se $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$, ho $Z_j^{m+1} = Z_{j-1}^m$ e si avrebbe

la der. esatta (appena le reticole).

Schema di coltolo delle errore, oltre che convergente e stabile, anche consistente. Cio' oltre ad avere sol. approssimata \rightarrow reale \times discretizzata, si delle altre (le) strutt. eq. diff \leftrightarrow strutt. eq. discreta

Stabilita'. Sol. Computata ha automaticamente (ex. PC) ed e' \leftrightarrow sta quella esatta che l'eq. Utilizzata ha. Eq. alle differenze alla sol. esatta aggiunge un termine detto ERRORE DI TRONCAMENTO dovuto al passaggio dall'eq. esatta alla discretizzata. Consistente e' proprieta' \times cui errore di troncamento $\rightarrow 0$, e' un errore in cio' in cui impongo, cio' che richiedo. Errore in cio' che tiro fuori e' invece convergenza. Consistenza e' NECESSARIA.

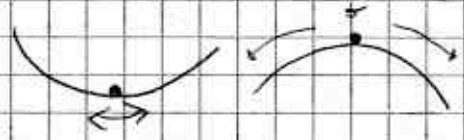
Stabilita'. Conr. questa eq. di riferimento:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{F}$$

con $A = \text{cost.}$, prob. lineare Esercizio, \vec{F} e \vec{u} ha dim. che con certo

\vec{F} di n. var. funziona bene.

Si sta perturbazione alle stati di equilibrio. $\hookrightarrow \vec{w}$



Si suppone \vec{u} esatta alla quale si sovrappone \vec{w} .

$\vec{u} + \vec{w}$ e applicano sempre l'eq.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + A \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} = \vec{F}$$

(ora prima, allora)

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{eq omogenea associata}$$

$\neq 0$ \vec{w} sono proprio gli err. di automaticamente

Stabilità:

26/3/08

Perturbazione non si deve amplificare col passare del tempo

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{g} \\ \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ponendo $\vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{W}$ si ha

Siamo in ambito lineare, quindi possiamo contr. la componente

di Fourier della perturbazione (analisi armonica) (se non lineare non si può contr. la somma come sol.)

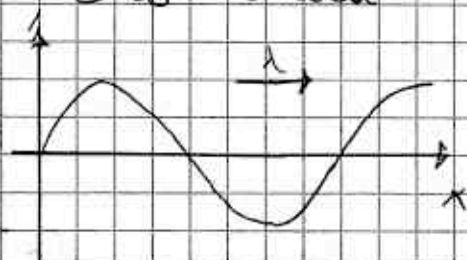
Quindi $\vec{W} = \sum$ armonica Fourier e si controlla che la singola armonica ha massa e x rappresent. effetti lo sarà tutta la \vec{W} .

$$\vec{W} = \vec{V} e^{i h(x - \lambda t)} \quad (\text{conviene usare gli exp. complessi})$$

se lo stesso $e = a$ e stesso

Esempio $e^{i \alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ e $i = \sqrt{-1}$ ha onda con velocità λ e n. d'onda h

È onda piana.



Supponiamo (1) iperbolico (autoval. $\in \mathbb{R}$ e distinti). Sostituendo:

$$-i h \lambda \vec{V} e^{i h(x - \lambda t)} + A i h \vec{V} e^{i h(x - \lambda t)} = 0 \Rightarrow \boxed{A \cdot \vec{V} = \lambda \vec{V}}$$

Eq. è soddisfatta se \vec{V} e λ sono autovett. e autoval. di A . Esempio A iperb., i possibili λ sono tutti $\in \mathbb{R}$. Quindi la perturb. in modulo è:

$$|\vec{W}| = |\vec{V}| \left| e^{i h(x - \lambda t)} \right| \quad (|e^{i h(x - \lambda t)}| = 1) \quad (7)$$

↳ sempr. cost.

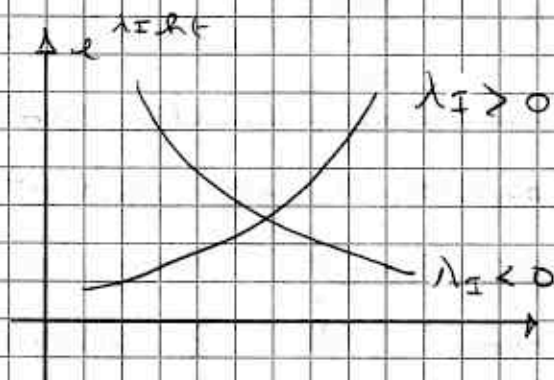
Portata di questo tipo è STABILE $\forall h$ e $\forall t$.

U_0 è punto di equilibrio, W è perturbazione che è definita da \vec{V} (costante) e λ , n è vettore che $|\vec{W}| =$ ampiezza iniziale che allora, quindi è stabile

① non amplifica la perturbazione

Supponiamo invece che $\lambda = \lambda_R + i \lambda_I$. Quindi ho

~~$|e^{i h (x - t \tau)}| e^{\lambda_I h t}$~~
(modulo)

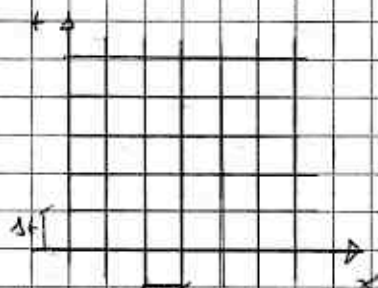


Supponiamo di avere associato a ① uno schema

numerico tipo una discretizzazione con i passi;

ovvero $D_{\text{disc}}(\vec{U}_j^n) = 0$

cerchiamo $\vec{W}_j^n = \vec{V} e^{i h (j \Delta x - [m] \Delta t)}$



"velocità numerica dello schema" $\frac{\Delta t}{\Delta x}$

Mentre λ il sistema esatto di prima $C \in \mathbb{R}$, qui

$C = C_R + i C_I$ | E' movita'

Se $C_I > 0$ lo schema è INSTABILE

Se $C_I < 0$ " " è STABILE

Se $C_I = 0$ " " è MARGINALMENTE STABILE

Tea: "in campo lineare, se schema numerico è STABILE e CONSISTENTE, allora è anche CONVERGENTE"

Ricorda: modello fisico e matrice (quasi di 0) come abbiamo visto, la controllata la discretizza

⑦2) Zonone. In previsioni meteo sistema fisico

è intrinsecamente instabile, dinamica atmosferica non conosciuta

Se ho $A\vec{V} = \lambda\vec{V}$, anche A^2 ha stem autovettori di A :

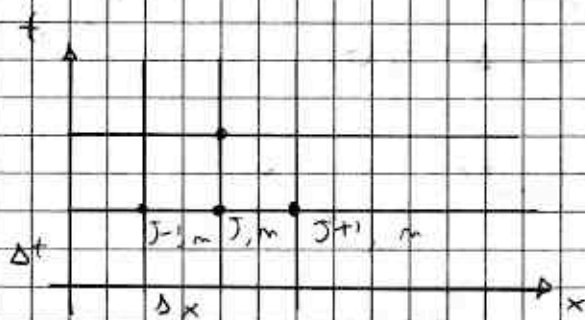
$$A^2\vec{V} = A(A\vec{V}) = A(\lambda\vec{V}) = \lambda^2\vec{V}$$

Ex: (schema NDU funzionante)

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + C \frac{\partial Z}{\partial x} = 0$$

(più omogenea di partenza, evolve come \vec{W}). Diverget. Affiamo:

$$\frac{Z_j^{n+1} - Z_j^n}{\Delta t} + C \frac{Z_{j+1}^n - Z_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (\text{diff. centrata})$$



Sviluppa in serie di Taylor e si verifica compatibilità

$$Z_j^{n+1} = Z_j^n + \pi \left(\frac{Z_{j+1}^n - Z_{j-1}^n}{2} \right) \quad \text{con } \pi = C \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

È centrata nello spazio e avanti nel tempo.

$$Z_j^n = g^n e^{i \frac{h}{2} \frac{j\Delta x}{\lambda}} \rightarrow g^n e^{i j \alpha}$$

$$Z_j^{n+1} = g^{n+1} e^{i j \alpha} = g^n e^{i j \alpha} + \pi \left(\frac{g^n e^{i(j+1)\alpha} - g^n e^{i(j-1)\alpha}}{2} \right)$$

(qui conviene usare exp al posto di sin e cos.)

Divido per $e^{i j \alpha}$, divido e moltiplico per i :

$$g^{n+1} = g^n + \pi i g^n \left(\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \right)$$

$$\text{Esempio: } e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$$

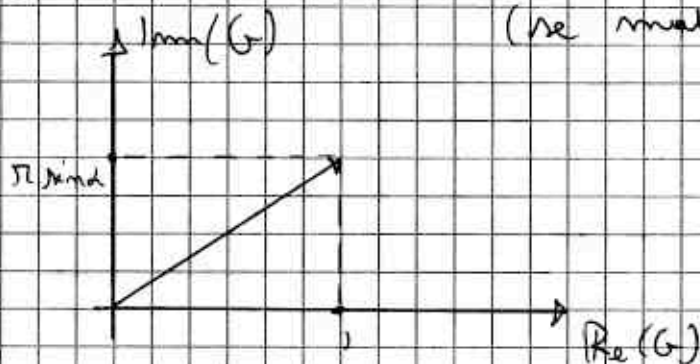
$$e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin \alpha$$

ho

$$y^{n+1} = \underbrace{(1 + i\pi \sin \alpha)}_G y^n$$

↳ matrice di amplificazione G

$$y^{n+1} = G y^n \quad \text{Vediamo lung. di } G: \\ (\text{se matrice tutti i} \rightarrow \text{lo stesso errore } < 1)$$



$$|\vec{G}| = \sqrt{1 + \pi^2 \sin^2 \alpha} > 1$$

sempre (ovviamente no se $\Delta t = 0$ ma non quanto nel t.)

Sistema e' lineare, incomp. INSTABILE.

Ex: Sistema con diff. in avanti nel tempo e indoleto nello spazio:

$$Z_j^{n+1} = Z_j^n + \pi (Z_j^n - Z_{j-1}^n)$$

$$Z_j^n = y^n e^{i\alpha j}$$

$$y^{n+1} e^{i\alpha j} = y^n e^{i\alpha j} + \pi (y^n e^{i\alpha j} - y^n e^{i\alpha(j-1)})$$

$$y^{n+1} = y^n [1 + \pi(1 - e^{-i\alpha})] \quad \text{Qui:}$$

$$G = 1 + \pi(1 - e^{-i\alpha}) = 1 + \pi(1 - \cos \alpha + i \sin \alpha) =$$

$$= 1 + \pi(1 - \cos \alpha) + i\pi \sin \alpha \quad \text{Quindi:}$$

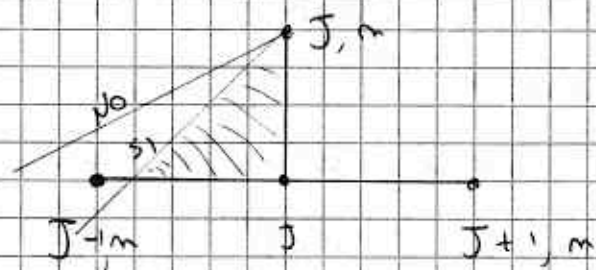
$$|\vec{G}| = \sqrt{(1 + \pi(1 - \cos \alpha))^2 + \pi^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 + 2\pi(1 - \cos \alpha)(\pi - 1)}$$

$\pi > 0$; $1 - \cos \alpha > 0$; se $\pi > 1$ sistema e' instabile Quindi:

$$C \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad \text{per errore stabile} \rightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}$$

Ⓣ scelta CONDIZIONE DI COURAN.

Int. f'ica.



Linea Carout. delle costore
all'interno (\uparrow glominit
di calcolo), altrimenti ho
info su costore che non controlla,
fuori da logica schema.

31/3/08

Effetto instabilita' numerica

$$\text{Conv. } \frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} = D \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

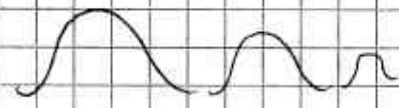
$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'e' un $\lambda = 0$

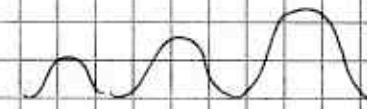
e' eq parabolica

\downarrow ex. onde di risona

Se $D > 0$, onda mentre x propaga
 x smorza (come se fosse viscosita',
attrito).



Se $D < 0$ onda x amplifica nel tempo.



\times controllore stabilita' x calcola matrice su
amplificazione e verificare che tutti i $\lambda < 1$ (oppure
lo impongo e ottengo la c. su stabl)

Discretizziamo con diff in avanti nel tem. e indietro
nello spazio.

Fonte di troncamenti introdotto trasforma e' eq.

$$\text{iperbolica } \frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ proposta nella parabolica}$$

Abbiamo introdotto termine del 2 ordine, se $D > 0$
il sistema "esplosa".

H

Schema esplicito: nella discretizzazione c'e' una
sola incognita a $n+1$, nono si ricomporre le
equazioni.

Schema implicito: n eq. a livello $n+1$. Delo

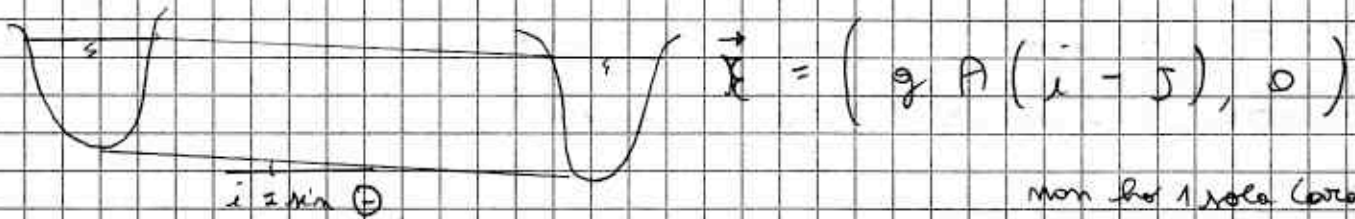
risolvere tutto insieme.

gli schemi espliciti sono sempre CONDIZIONATI, mentre (ci vuole
outlets), gli "impliciti" "UNCONDIT" (non
richiede la cond.), x simulazioni in un futuro "contorno"
nono errore Δt + ampio, ma e' + difficile defini-
re il problema matematico da risolvere.

H

Ex: propagazione onda di piena in alveo

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{E} \quad ; \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} q \\ A \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{2q}{A} & \frac{gA}{g} - \left(\frac{q}{A}\right)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



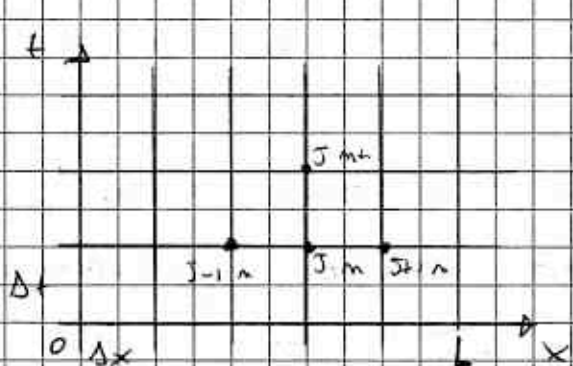
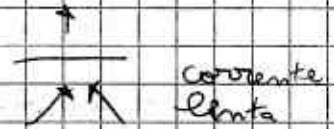
non ho 1 sola caratteristica

va integrati questo sistema di eq.

x le diff. parziali stabiliscono con-

tribuzioni sia da monte che da valle. Si usa

SCHEMI DI LAX



$$\vec{U}_j^{n+1} = \vec{U}_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A \cdot (\vec{U}_{j+1}^n - \vec{U}_{j-1}^n) +$$

$$\left[\vec{U}_j^{n+1} - \vec{U}_j^n / \Delta t \text{ e } \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \text{ diff. in avanti} \right]$$

2 termini e' derivata materiale

centrata \downarrow + ... + $\vec{E}_j^n \Delta t$

Schema con variabile incognita, INSTABILE, si appiungo

quindi 1 termine della Matrice A, correttivo

$$\vec{U}_j^{n+1} = \vec{U}_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A \cdot (\vec{U}_{j+1}^n - \vec{U}_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} A^2 (\vec{U}_{j+1}^n - 2\vec{U}_j^n + \vec{U}_{j-1}^n) + \vec{E}_j^n \Delta t$$

$$\frac{\vec{U}_{j+1} - 2\vec{U}_j + \vec{U}_{j-1}}{\Delta x^2} \approx \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial x^2} \Big|_j \rightarrow \text{interferisce proprio sui termini del 1° ordine, controlla eventuali "D < 0".}$$

Possiamo fare calcoli nei nodi "interni" esclusi gli estremi solo servono le c. al contorno:

Su una Q di piena, a L una $q = kA^m$ ↳ scala o coefficiente

La controllata c. di stabilità. Analizziamo nella parte omogenea (tolgo $E_s \Delta t$) Quindi si pone:

$$\vec{U}_j^m = \vec{y}^m e^{I \alpha j} \quad \Rightarrow \text{Sostituisco:}$$

$$\vec{y}^{m+1} e^{I \alpha (j+1)} = \vec{y}^m e^{I \alpha j} \cdot \frac{\Delta t}{2 \Delta x} A \cdot \vec{y}^m \left(e^{I \alpha (j+1)} - e^{-I \alpha (j+1)} \right) +$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2 \Delta x^2} A^2 \vec{y}^m \left(e^{I \alpha (j+1)} - 2 e^{I \alpha j} + e^{-I \alpha (j+1)} \right)$$

$$\vec{y}^{m+1} = \vec{y}^m \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} A \vec{y}^m \left(\frac{e^{I \alpha} - e^{-I \alpha}}{2} \right) + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} A^2 \vec{y}^m \left(\frac{e^{I \alpha} + e^{-I \alpha}}{2} - 1 \right)$$

$$\vec{y}^{m+1} = \vec{y}^m - \frac{\Delta t}{\Delta x} A \cdot I \sin \alpha \vec{y}^m + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} A^2 \vec{y}^m (\cos \alpha - 1)$$

$$\vec{y}^{m+1} = \left(\overset{\text{matrice identità}}{I} \vec{y}^m - \frac{\Delta t}{\Delta x} A \cdot I \sin \alpha + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} A^2 (\cos \alpha - 1) \right) \vec{y}^m$$

$$G = I - \frac{\Delta t}{\Delta x} A \cdot I \sin \alpha + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} A^2 (\cos \alpha - 1)$$

ovvero $\vec{y}^{m+1} = G \vec{y}^m$

La G è (quasi) sempre un polinomio della

A di partenza, sempre fa il lavoro che basta conoscere λ di $A \times$ numero λ di G (e non le pend. delle caratteristiche). Perché?

Supponiamo $A\vec{V} = \lambda\vec{V}$ $G\vec{V} = I\vec{V} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha A\vec{V} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (\cos \alpha - 1)$.

$$A^2 \vec{V} \text{ Sostituendo: } G\vec{V} = I\vec{V} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha \lambda \vec{V} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (\cos \alpha - 1) \lambda^2 \vec{V} =$$

$$= \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha \lambda + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (\cos \alpha - 1) \lambda^2 \right) \vec{V}$$

\hookrightarrow e' e' autoval. di G detto g

Quindi:

$$g = 1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda \right) \sin \alpha + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda \right)^2 (\cos \alpha - 1)$$

con $\lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} = \pi$, numero di Courant

Dobbiamo trovare che $\|g\| \leq 1$. Lo si fa con plot al variare di π . Lo si fa se $\pi \leq 1$.

Qui ci sono \Leftrightarrow celerita'. La cond. neppure λ la stabilita' si garantisce e $\left| \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda \right| < 1 \rightarrow \Delta t < \frac{\Delta x}{|\lambda|}$

ovvero

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\max(|\lambda|)}$$

Im eq di De S. Venant

$$\lambda_{1,2} = U \pm \sqrt{g \frac{A}{e}}$$

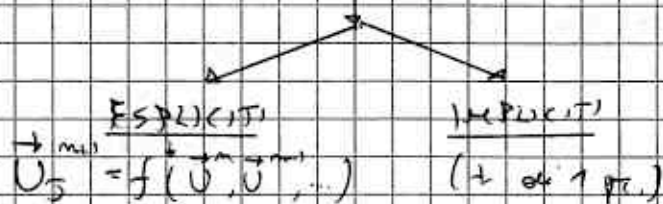
Se U in termini di portata, in questo caso $\max(|\lambda|) = \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{A}{e}}$

Per eq, non lineare \rightarrow come R + galata. Lettore $R=1$ non va bene, conviene tenere "bram" (ex. 9.5)

2/4/08

Riassunto:

SCHER: NUMERICI



(78)

ESPLICITI

IMPLICITI

Condiz. Matrice
 $f(\Delta x, \Delta t) \leq 0$

Cond. stabile

(in genere non e' case)

DISSIPATIVO

NO DISSIPATIVI

diminuisce le oscillazioni introdotte anche le onde piccole, unq controllabile

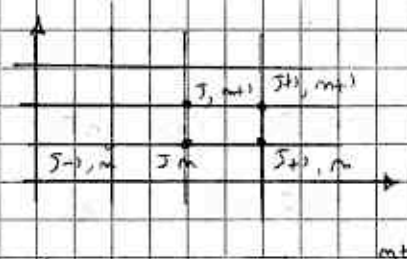
+ Smorzano + del tempo

DISPERSIVI

DISPERSIVI

Ex $\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0$

$\theta \in (0, 1)$

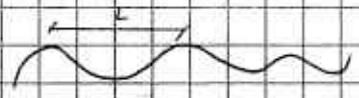


$$\frac{z_{j, n+1}^{m+1} - z_{j, n}^m}{\Delta t} + \theta \left(\frac{z_{j+1, n}^m - z_{j, n}^m}{\Delta x} \right) + (1-\theta) \left(\frac{z_{j+1, n+1}^{m+1} - z_{j, n+1}^{m+1}}{\Delta x} \right)$$

(in generale)

Se $\theta \geq 1$ ho $z_{j, n+1}^{m+1}$ e quindi ho a $n+1$ 2 grandezze e sistema diventa implicito. [$\theta = 1$ e sistema usato prima]

DISPERSIVITA' DI UN ONDA



$\omega = f(k)$ → e' detta relazione di dispersione (con numero d'onda k)

ω is $\frac{2\pi f}{T}$, k is $\frac{2\pi}{\lambda}$

Se ad ex ho $\sin(kx - \omega t)$, onda piana, $c = \frac{\omega}{k}$ e infatti $\sin(x - \frac{\omega}{k}t)$ → "c"

- Se $c \neq k$ onda non e' piana (picche)
- Se $c = c(k)$ " " " (numeriche approssimazione introduce dispersivita' fittizia)

Ex: Canale Shernypets d'acqua



$$C = U \pm \sqrt{gh} \approx U_0 \pm \sqrt{gh_0}$$

(se perturbazione non piccola)

Se perturbazione velocemente o lentamente,

acqua in movimento allora stesso movimento, non disperde.

Fix: onde acustiche, parole in pacchetto o barre, il tempo in cui arrivano alle spiagge e lo stesso.

Invece ex. di dispersione e' onda in mare

$$\omega^2 = gk \tanh(kH), \quad C = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{gk \tanh(kH)}{k^2}} = \sqrt{g + \frac{gH \tanh(kH)}{k}}$$



• Se siamo in acque basse ($kH \ll 1$), $\tanh(kH) \approx kH$ e

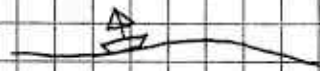
$C = \sqrt{gH}$ onde non dispersive, come nel canale

• Se siamo in acque alte ($kH \gg 1$), $\tanh(kH) \approx 1$ e

$$C = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g}{2\pi}} L$$

Ex. Tsunami, $L = 20 \text{ km} = 2 \cdot 10^4 \text{ m}$. $C = \sqrt{\frac{10 \cdot 2 \cdot 10^4}{10}} = 100\sqrt{2} \text{ m/s} \approx$

$\approx 200 \text{ m/s} = \frac{200 \cdot 10^{-3} \text{ km}}{1/3600 \text{ h}} \approx 800 \text{ km/h}$! Al largo

non me ne accorgo  a ruota
 e' accolta e si innalza.

Confrontiamo eq. esatta e modello numerico.

$\vec{W} = \vec{V} e^{iA(x-\lambda t)}$ [$\lambda \approx c$, $\lambda \approx c_0$], soddisfa $\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} = 0$

Discretizziamo in Δx e Δt che:

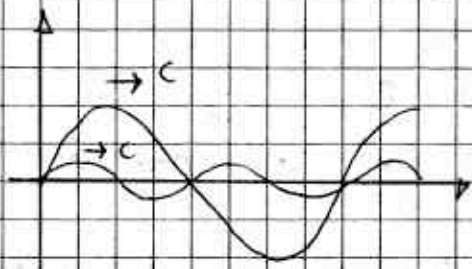
$\vec{W}_j^n = \vec{V} e^{iA(j\Delta x - (n\Delta t))}$ (con $C = (R + 1)C_0$) =

$= \left(\vec{V} e^{iA(j\Delta x - (n\Delta t))} \right) e^{iA(j\Delta x - (n\Delta t))}$
 → num. d'onda!

80 $C = f(\Delta x, \Delta t, h)$

Ricorda che $|\vec{v}|$ nelle appross. è $<$.

Se $C_1 < 0$ schema imparti e DISSIPATIVO (negli imparti $C_1 = 0$)
 C'è anche dissipatività che mentre nel reale le C_1 cont.
 nel numero c'è C che d h



2 onde con stessa C, si sommano
 non cambia forma (BURST)



Se invece C e C' ci sono i "battimenti"
 zone di interferenza distruttiva o

costruttiva, onde si annullano o si accrescono. Attenti
 a capire se è da appross. numerica e non
 dal modello F.W.

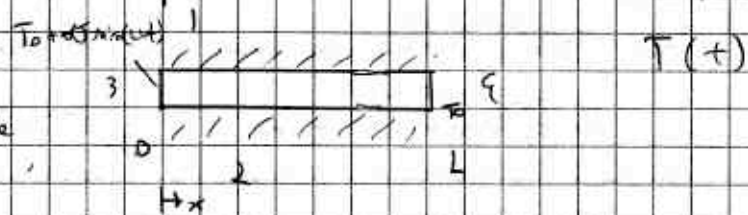
Ex: equazione del calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \nabla^2 T \quad (\text{int. parabolico})$$

C. al cont.
 C. iniziale

Contr. problema monodimensionale.

1 e 2 pareti adiabatiche
 3 e 4 libere



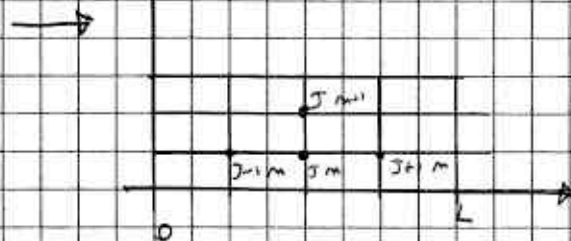
1 e 2 pareti adiabatiche
 3 e 4 libere
 Hs T_0 assegnata e f_{max} mentre fuori ho oscillazioni

$T = T_0 + \delta T \sin(\omega t)$ Eq. diventa

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Schema numerico

$$\begin{cases} T(0, t) = T_0 + \delta T \sin(\omega t) \\ T(L, t) = T_0 \\ T(x, 0) = T_0 \end{cases}$$

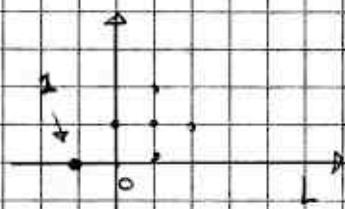


$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = a^2 \frac{T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n}{\Delta x^2} \rightarrow \text{schema esplicito}$$

$$T_j^{n+1} = T_j^n + a^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n) \quad \text{Va fatta}$$

Analisi di stabilità prendendo $T_j^n = y^n e^{i k j \Delta x}$; si
 deve garantire $\frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t \leq 0,5 \frac{\Delta x^2}{a^2}$ e nei nu.

si usa $\Delta t = \text{"jud"} \cdot 0,5 \frac{\Delta x^2}{a^2}$. Eq e' lineare, ris e' esatto.



Perche' non posso stare 1 con
 $T = T_0 + \alpha T \sin \omega t$? Perche' e' come
 stare a un pezzo di aria la

proprietà e le leggi del corpo in esame della
 lavetta.

(quantifica il problema il fatto che nuovi mesi e
 poco conduttori non risentono delle variazioni di T_{ext} .
 Pareti adiabatiche 1 e 2 servono solo a rendere mono-
 dimensionale il problema)

Processi di ^(laminare) trasporto \rightarrow eq. iperboliche, 1° ordine
 " " di ^(turbolento) diffusione \rightarrow eq. parabol., 2° ordine

FINE CORSO (02/4/2008)