

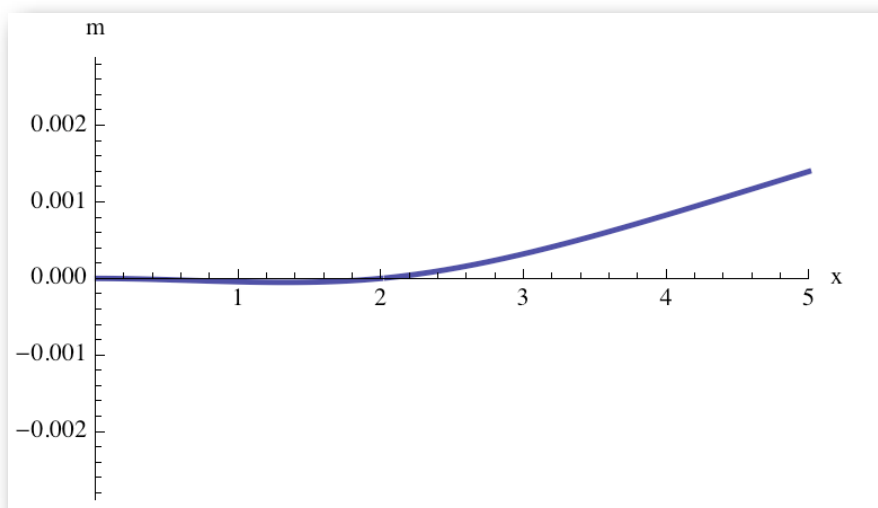
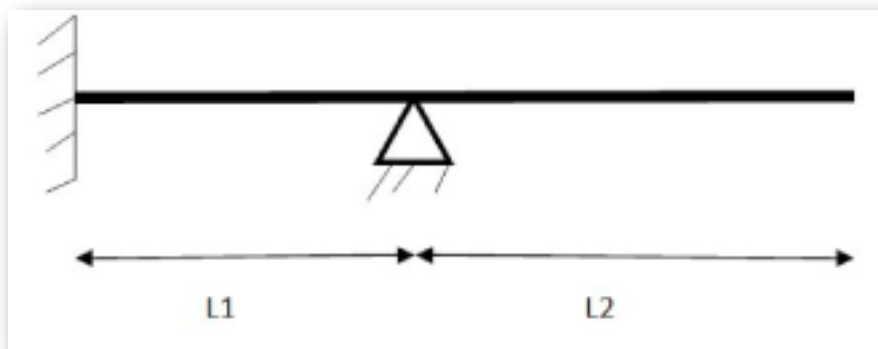
MECCANICA COMPUTAZIONALE

Esercitazione d'esame

Prof. Giampiero Sciortino

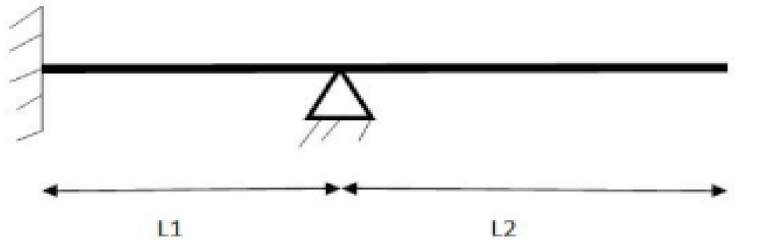
Andrea Berti
Mattia Campolese

A.A. 2008/2009



(*ESERCITAZIONE D'ESAME*)

(*Studio dei modi di vibrazione della seguente trave:*)



(*Trave continua con incastro in $x=0$, appoggio in $x=L1$, estremo libero in $x=L1+L2$ *)

(*Problema agli autovalori*)

(*Autovalore $\lambda = \mu^4 = \omega^2 / a^2$, $a^2 = \frac{EJ}{\rho S}$ *)

(*Pulizia delle variabili*)

ClearAll;

(*1: DATI DI INPUT*)

(* Proprietà del materiale della trave *)

(*Si fissa un materiale di esempio tipico dell'ingegneria strutturale: il calcestruzzo*)

(*Restenza cubica a compressione:*)

Rck = 35;

(* modulo elastico in MPa *)

Ee = 22 000 * ((0.83 * Rck) + 8) / 10^{0.3};

(* densità materiale in kg/m³ *)

$\rho = 2500$;

(* Geometria della trave *)

(*Tipica trave di un telaio per edificio di civile abitazione*)

(*dimensioni sezione in mm*)

bb = 300;

hh = 500;

Asez = bb * hh;

Minerzia = (bb * hh³) / 12;

$$a = \sqrt{\frac{Ee * Minerzia}{\rho * Asez}};$$

(*Parametri fissati per lo schema statico, in m*)

L1 = 2;

L2 = 3;

(*2: DETERMINAZIONE DEGLI AUTOMODI DI VIBRAZIONE*)

(*Il problema dei modi liberi di oscillazione di una trave è retto dal seguente problema agli autovalori (più le condizioni al contorno):

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = \lambda z_f$$

*)

(*Forma della soluzione*)

$$Z[x_] = \begin{cases} z1[x] & 0 < x < L1 \\ z2[x] & L1 < x < L1 + L2 \end{cases};$$

(*Con Z1 e Z2 definite da:*)

$$\begin{aligned} z1[x_] &= A[1] \text{Sinh}[\mu x] + A[2] \text{Sin}[\mu x] + A[3] \text{Cosh}[\mu x] + A[4] \text{Cos}[\mu x]; \\ z2[x_] &= A[5] \text{Sinh}[\mu x] + A[6] \text{Sin}[\mu x] + A[7] \text{Cosh}[\mu x] + A[8] \text{Cos}[\mu x]; \end{aligned}$$

(*Impongo le 2 x 4 = 8 condizioni al contorno:

In x=0, cioè nell'incastro,
lo spostamento e la rotazione devono essere nulli: z1[0]=0 ; z1'[0]=0
In x = L1, cioè nell'appoggio, lo spostamento sarà nullo e si dovranno imporre le condizioni di congruenza tra i due tratti di trave:

$$\begin{aligned} z2'[L1] - z1'[L1] &= 0 \\ z1''[L1] - z2''[L1] &= 0 \\ z1[L1] &= 0 \\ z2[L1] &= 0 \end{aligned}$$

in x=L1+L2, cioè nell'estremo libero,
il taglio ed il momento devono essere nulli: z2''[L1+L2]=0; z2'''[L1+L2]=0;

La matrice dei coefficienti della soluzione avrà per ogni riga l'iesima condizione sopra indicata.*)

(*Matrice dei coefficienti del sistema omogeneo di 8 equazioni in 8 incognite*)

(*Applicando le condizioni al contorno, ovvero imponendo che i valori della funzione z[x] e delle sue derivate siano nulle nei punti indicati, automaticamente si impongono delle condizioni agli 8 coefficienti A della funzione ; qui di seguito quindi sono indicati direttamente i coefficienti della funzione Z e delle sue k derivate di interesse*)

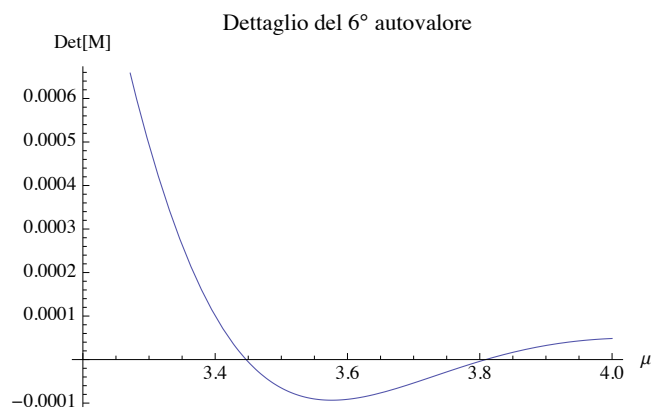
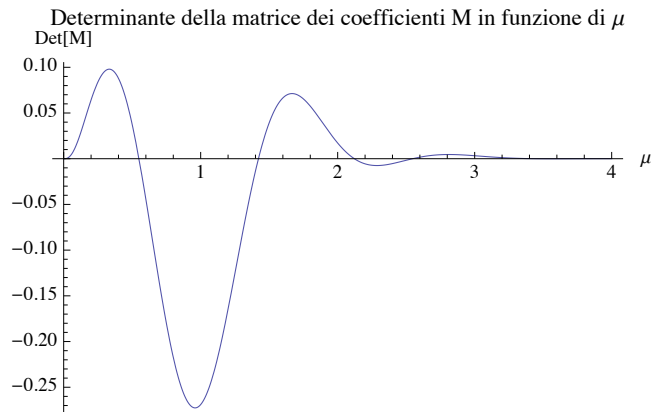
$$M = \begin{pmatrix} \partial_{A[1]} z1[0] & \partial_{A[2]} z1[0] & \partial_{A[3]} z1[0] & \partial_{A[4]} z1[0] & \partial_{A[5]} z \\ \partial_{A[1]} z1'[0] & \partial_{A[2]} z1'[0] & \partial_{A[3]} z1'[0] & \partial_{A[4]} z1'[0] & \partial_{A[5]} z1 \\ \partial_{A[1]} z1'[L1] & \partial_{A[2]} z1'[L1] & \partial_{A[3]} z1'[L1] & \partial_{A[4]} z1'[L1] & -\partial_{A[5]} z2 \\ \partial_{A[1]} z1''[L1] & \partial_{A[2]} z1''[L1] & \partial_{A[3]} z1''[L1] & \partial_{A[4]} z1''[L1] & -\partial_{A[5]} z2 \\ \partial_{A[1]} z2[L1] & \partial_{A[2]} z2[L1] & \partial_{A[3]} z2[L1] & \partial_{A[4]} z2[L1] & \partial_{A[5]} z2 \\ \partial_{A[1]} z1[L1] & \partial_{A[2]} z1[L1] & \partial_{A[3]} z1[L1] & \partial_{A[4]} z1[L1] & \partial_{A[5]} z1 \\ \partial_{A[1]} z2''[L1+L2] & \partial_{A[2]} z2''[L1+L2] & \partial_{A[3]} z2''[L1+L2] & \partial_{A[4]} z2''[L1+L2] & \partial_{A[5]} z2'' \\ \partial_{A[1]} z2'''[L1+L2] & \partial_{A[2]} z2'''[L1+L2] & \partial_{A[3]} z2'''[L1+L2] & \partial_{A[4]} z2'''[L1+L2] & \partial_{A[5]} z2''' \end{pmatrix}$$

(*Determinante della matrice dei coefficienti*)

```
Print["Espressione di f(μ):"];
m = Simplify[Det[M]]
(*Gli autovalori si ottengono ponendo il determinante di M = m = 0,
ossia trovando gli zeri della funzione f[μ]*)
(*Divido tutto per
μ^9(1+Sinh[η])^9 ≠ 0 per rendere il grafico
leggibile (μ^9 è il termine in evidenza nel determinante di M)*)
f[μ_] = Det[M] / (μ^9 (1 + Sinh[μ]) ^ 9);
Plot[f[μ], {μ, 0, 4}, AxesLabel -> {"μ", "Det[M]"},
PlotLabel -> "Determinante della matrice dei coefficienti M in funzione di μ"]
(*Grafico di dettaglio per capire il 6° autovalore*)
Plot[f[μ], {μ, 3.2, 4}, AxesLabel -> {"μ", "Det[M]"},
PlotLabel -> "Dettaglio del 6° autovalore"]
```

Espressione di f(μ):

$$\mu^9 (i \operatorname{Sin}[(1+5i)\mu] + (2+2i) \operatorname{Sin}[(2+2i)\mu] - (2+2i) \operatorname{Sin}[(3+3i)\mu] + \operatorname{Sin}[(5+i)\mu] + (1+i) \operatorname{Sin}[(5+5i)\mu] - i \operatorname{Sinh}[(1+5i)\mu] - (2+2i) \operatorname{Sinh}[(2+2i)\mu] + (2+2i) \operatorname{Sinh}[(3+3i)\mu] - \operatorname{Sinh}[(5+i)\mu] - (1+i) \operatorname{Sinh}[(5+5i)\mu])$$



(*Determinazione dei primi 6 zeri di Det[M] con il metodo delle tangenti di Newton*)

(* η_0 = valore di prima approssimazione*)

$\mu_0 = \text{SetAccuracy}[1.5, 80];$

(*Variabile di appoggio*)

$\mu_{00} = \mu_0;$

(*Valore fittizio di η_1 per far partire il While *)

$\mu_1 = \mu_0 + 0.1;$

(*Iterazione e stampa delle approssimazioni successive*)

$\text{While}[\text{Abs}[\mu_1 - \mu_{00}] > 10^{-6}, \mu_1 = \mu_0 - \frac{f[\mu_0]}{f'[\mu_0]}; \text{Print}[\mu_1]; \mu_{00} = \mu_0; \mu_0 = \mu_1]$

(*Valori di μ per i primi sei modi di vibrazione*)

1.40244584950051006869536598728456303443885397408335893842404997513746517834

1.421054967210774590127042948289413041139801587931025646713104964751452

1.4216701022291935411359953780113588004534935478307429109935584891

1.421670810546907488474799101520597332376349869101019739532453

```

μ[1] =
  0.54923000081485537064311522041666263666764582184944999018576879788150140585405976890\
  737^70.74435832191098;
μ[2] =
  1.42167081054784804934408887133752540628739925625888246686272693812919330342567237703\
  9764263460452^61.226556723921945;
μ[3] =
  2.12161113222719869984767879002159337410033619152373555630073483075966854764057^52.29\
  9114139600086;
μ[4] =
  2.54703923941320292756635668412380355426880439879801419713177182255687251656046^47.72\
  0335739183945;
μ[5] = 3.4467793977327921281513003540889637781921977178296067914164^36.97736052922784;
μ[6] =
  3.80900192647843235564524563975537336449041392609373571857323248822762673013778^44.75\
  177150985409;

```

(*Determinazione delle incognite A[i]*)

(*Individuato il valore di $\mu[i]$ si costruisce il sistema di 8 equazioni in 8 incognite facendo il prodotto della matrice dei coefficienti M per il vettore delle incognite X. Poichè si esclude la soluzione banale, ovvero coefficienti tutti nulli, si prende un minore 7x7 della matrice dato che questa ha rango 7.*)

```

M1 = Table[Table[M[[jj, kk]] /. {A[7] -> 1}, {jj, 1, 7}], {kk, 1, 7}];
Print[
  "Determinanti dei minori calcolati in corrispondenza delle soluzioni stimate:";
MatrixForm[Table[Chop[Det[M1 /. {μ -> μ[k]}]], {k, 1, 6}]]
Print["Rango dei k-esimi minori presi:"];
Table[MatrixRank[M1 /. {μ -> μ[k]}], {k, 1, 6}]

eq[jj_] := (M.{A[1], A[2], A[3], A[4], A[5], A[6], A[7], A[8]})[[jj]];
inc := {A[1], A[2], A[3], A[4], A[5], A[6], A[8]};

(*Trovo i valori delle sette incognite risolvendo il sistema
per ogni μ (forma compatta)*)
sol = Table[Solve[
  Table[(eq[jj] /. {μ -> μ[k], A[7] -> 1}) == 0, {jj, 1, 7}], inc],
  {k, 1, 6}];

```

Determinanti dei minori calcolati in corrispondenza delle soluzioni stimate:

$$\begin{pmatrix} 0.2480678687112596846043014938553799630222466536642787467800537172645 \\ -846.493042628164949620287583204726166734813477966590370 \\ -489035.4537394874595734442939775280655351380 \\ 6.446370003276729287536288265998964196 \times 10^7 \\ -3.27516260913318538085937 \times 10^{10} \\ 1.24859360784586641907984833142 \times 10^{11} \end{pmatrix}$$

Rango dei k-esimi minori presi:

```
{7, 7, 7, 7, 7, 7}
```

(*Espressione finale delle autovibrazioni*)

(*Primo modo di autovibrazione*)

$\mu_n = \mu[1];$

$z[1, x_] = \left(\begin{matrix} z1[x] & 0 < x < L1 \\ z2[x] & L1 < x < L1 + L2 \end{matrix} \right) /. \text{sol}[[1]] /. \{A[7] \rightarrow 1, \mu \rightarrow \mu_n\}$

$\text{Aut}[1] = \mu[1]^4$

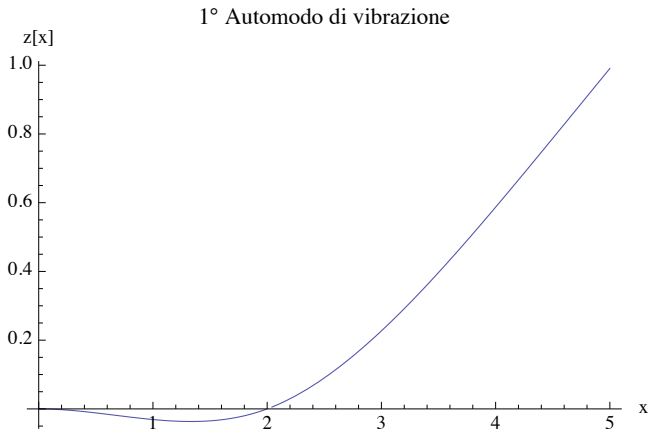
$\text{Plot}[z[1, x], \{x, 0, L1 + L2\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{ "x", "z[x]" \}, \text{PlotLabel} \rightarrow "1^\circ \text{ Automodo di vibrazione}"]$

```

0.205502614482429261681422649234369786920759342032772909269176749052548      0 < x <
Cos[0.54923000081485537064311522041666263666764582184944999018576879788150141
x] -
0.205502614482429261681422649234369786920759342032772909269176749052548 Cosh[
0.54923000081485537064311522041666263666764582184944999018576879788150141
x] - 0.562542685226258323462741721466112773308873329494170630475749554294587
Sin[0.54923000081485537064311522041666263666764582184944999018576879788150141
x] +
0.562542685226258323462741721466112773308873329494170630475749554294587 Sinh[
0.54923000081485537064311522041666263666764582184944999018576879788150141 x]
} -0.599782749665484345540325336167261389541262845127234614020470442314025      2 < x <
Cos[0.54923000081485537064311522041666263666764582184944999018576879788150141
x] + Cosh[
0.54923000081485537064311522041666263666764582184944999018576879788150141 x] -
0.151115499111049302126354257738419989795721711618179594086937185529538
Sin[0.54923000081485537064311522041666263666764582184944999018576879788150141
x] -
0.94443886765004982543714211393123553685373032705083020214489175339450 Sinh[
0.54923000081485537064311522041666263666764582184944999018576879788150141 x]
}
0
True
}

```

0.09099489064949076568338872254422038605525838616324816594262844444599238



(*Secondo automodo di vibrazione*)

$\mu n = \mu[2];$

$z[2, x_] = \left(\begin{bmatrix} z1[x] & 0 < x < L1 \\ z2[x] & L1 < x < L1 + L2 \end{bmatrix} /. \text{sol}[[2]] \right) /. \{A[7] \rightarrow 1, \mu \rightarrow \mu[2]\}$

$\text{Aut}[2] = \mu[2]^4$

$\text{Plot}[z[2, x], \{x, 0, L1 + L2\},$

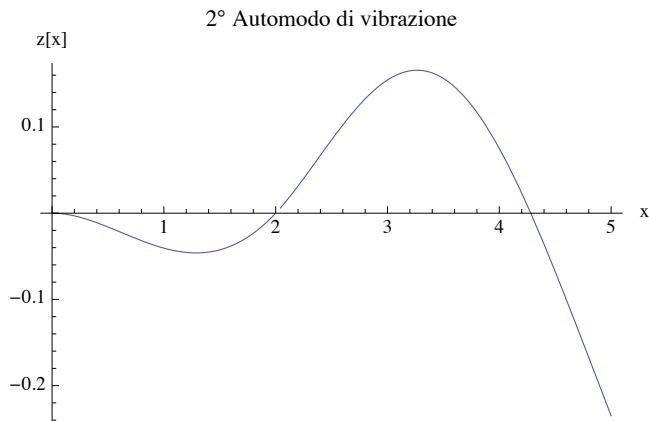
$\text{AxesLabel} \rightarrow \{ "x", "z[x]" \}, \text{PlotLabel} \rightarrow "2^\circ \text{ Automodo di vibrazione}"]$

```

{
  0.043645720206913323695764440826745343534267292524915807087283      0 < x <
  Cos[1.4216708105478480493440888713375254062873992562588824668627269 x] -
  0.043645720206913323695764440826745343534267292524915807087283
  Cosh[1.4216708105478480493440888713375254062873992562588824668627269 x] -
  0.050553831210721524129771146824371883757260869522160521337113
  Sin[1.4216708105478480493440888713375254062873992562588824668627269 x] +
  0.050553831210721524129771146824371883757260869522160521337113
  Sinh[1.4216708105478480493440888713375254062873992562588824668627269 x]
}
{
  0.007808467684175318927817895019150537348166137212170371002287      2 < x <
  Cos[1.4216708105478480493440888713375254062873992562588824668627269 x] +
  Cosh[1.4216708105478480493440888713375254062873992562588824668627269 x] -
  0.16712770624688042728048525672047523804604876374612823478019
  Sin[1.4216708105478480493440888713375254062873992562588824668627269 x] -
  1.0001936010086159944448800331715803300388600600731527029618
  Sinh[1.4216708105478480493440888713375254062873992562588824668627269 x]
}
0
}

```

4.085038807657285808829334123902487931909372520303097534853381



(*Terzo automodo di vibrazione*)

$\mu n = \mu[3];$

$z[3, x_] = \left(\begin{bmatrix} z1[x] & 0 < x < L1 \\ z2[x] & L1 < x < L1 + L2 \end{bmatrix} /. \text{sol}[[3]] \right) /. \{A[7] \rightarrow 1, \mu \rightarrow \mu n\}$

$\text{Aut}[3] = \mu[3]^4$

$\text{Plot}[z[3, x], \{x, 0, L1 + L2\},$

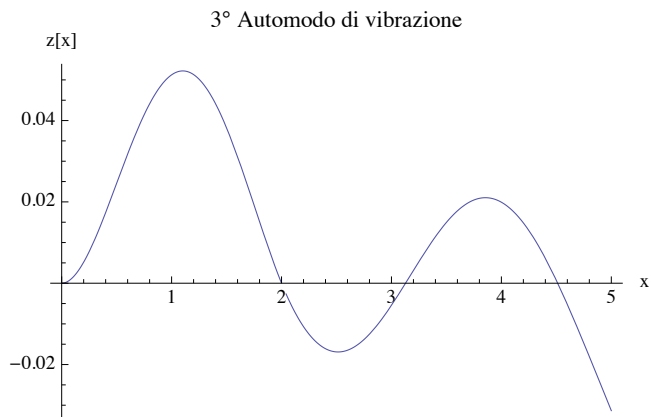
$\text{AxesLabel} \rightarrow \{ "x", "z[x]" \}, \text{PlotLabel} \rightarrow "3^\circ \text{ Automodo di vibrazione}"]$

```

-0.03339967871559271490592239832563922769415537487715      0 < x <
Cos[2.121611132227198699847678790021593374100336191523736 x] +
0.03339967871559271490592239832563922769415537487715
Cosh[2.121611132227198699847678790021593374100336191523736 x] +
0.03300165874444701498629473066074478773613943769997
Sin[2.121611132227198699847678790021593374100336191523736 x] -
0.03300165874444701498629473066074478773613943769997
Sinh[2.121611132227198699847678790021593374100336191523736 x]
}
-0.00863134744459734116023642031712057432709281635042      2 < x <
Cos[2.121611132227198699847678790021593374100336191523736 x] +
Cosh[2.121611132227198699847678790021593374100336191523736 x] +
0.02044614468809183474800190921931020185630518836432
Sin[2.121611132227198699847678790021593374100336191523736 x] -
1.000000775742124778135977574620728605007812827916
Sinh[2.121611132227198699847678790021593374100336191523736 x]
}
0
True
}

```

20.26110568976691695523508658954943933203274333721988



(*Quarto automodo di vibrazione*)

$\mu n = \mu[4];$

$z[4, x_] = \left(\begin{cases} z1[x] & 0 < x < L1 \\ z2[x] & L1 < x < L1 + L2 \end{cases} \right) /. \text{sol}[[4]] /. \{A[7] \rightarrow 1, \mu \rightarrow \mu n\}$

$\text{Aut}[4] = \mu[4]^4$

$\text{Plot}[z[4, x], \{x, 0, L1 + L2\},$

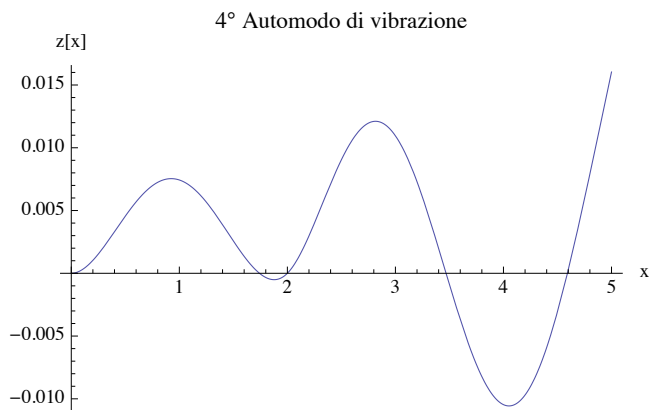
$\text{AxesLabel} \rightarrow \{ "x", "z[x]" \}, \text{PlotLabel} \rightarrow "4^\circ \text{ Automodo di vibrazione}"]$

```

-0.004772171309716537181627571589518652802971734      0 < x <
Cos[2.54703923941320292756635668412380355426880439880 x] +
0.004772171309716537181627571589518652802971734
Cosh[2.54703923941320292756635668412380355426880439880 x] +
0.004697253981752195822127457062477396820452197
Sin[2.54703923941320292756635668412380355426880439880 x] -
0.004697253981752195822127457062477396820452197
Sinh[2.54703923941320292756635668412380355426880439880 x]
}
0.006557147345363730269541995675746599567432189      2 < x <
Cos[2.54703923941320292756635668412380355426880439880 x] +
Cosh[2.54703923941320292756635668412380355426880439880 x] +
0.009244537404793793861092135749912175645045735
Sin[2.54703923941320292756635668412380355426880439880 x] -
0.9999999527861380497589534387133047612364488
Sinh[2.54703923941320292756635668412380355426880439880 x]
}
0
True
}

```

42.086474068561428335529974822014464170241623878



(*Quinto automodo di vibrazione*)

```
 $\mu_n = \mu[5];$ 
```

```
 $z[5, x_] = \left( \begin{cases} z1[x] & 0 < x < L1 \\ z2[x] & L1 < x < L1 + L2 \end{cases} \right) /. \text{sol}[[5]] /. \{A[7] \rightarrow 1, \mu \rightarrow \mu_n\}$ 
```

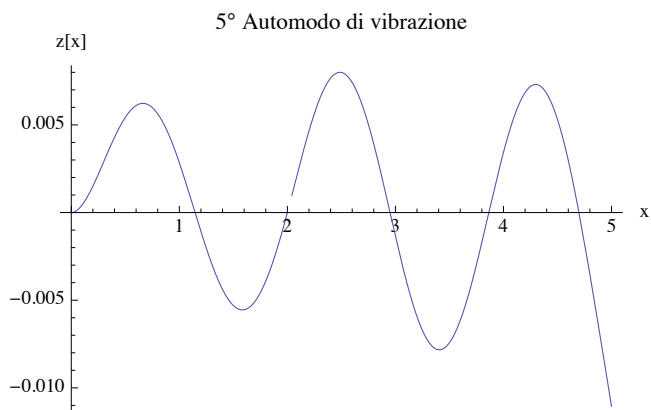
```
Aut[5] =  $\mu[5]^4$ 
```

```
Plot[z[5, x], {x, 0, L1 + L2},
```

```
  AxesLabel -> {"x", "z[x]"}, PlotLabel -> "5° Automodo di vibrazione"]
```

```
{
  -0.00411330750282769827654246226156                                0 < x <
  Cos[3.446779397732792128151300354088963778 x] +
  0.00411330750282769827654246226156
  Cosh[3.446779397732792128151300354088963778 x] +
  0.00411125872650794289015050783412
  Sin[3.446779397732792128151300354088963778 x] -
  0.00411125872650794289015050783412
  Sinh[3.446779397732792128151300354088963778 x]
  -0.00527126326012707236796490891769                                2 < x <
  Cos[3.446779397732792128151300354088963778 x] +
  Cosh[3.446779397732792128151300354088963778 x] +
  0.00576672297670280155749198820907
  Sin[3.446779397732792128151300354088963778 x] -
  1.000000000362026663284372699771 Sinh[3.446779397732792128151300354088963778 x]
  0                                                                    True
}
```

```
141.1412481103218752974440248365620005
```



(*Sesto automodo di vibrazione*)

$\mu n = \mu[6];$

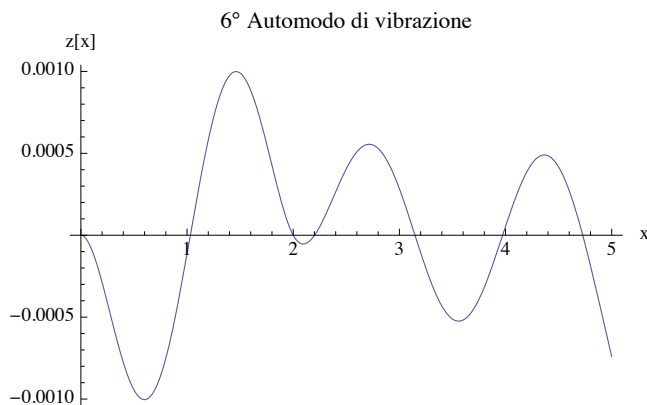
$z[6, x_] = \left(\begin{cases} z1[x] & 0 < x < L1 \\ z2[x] & L1 < x < L1 + L2 \end{cases} \right) /. \text{sol}[[6]] /. \{A[7] \rightarrow 1, \mu \rightarrow \mu n\}$

$\text{Aut}[6] = \mu[6]^4$

`Plot[z[6, x], {x, 0, L1 + L2}, AxesLabel -> {"x", "z[x]"},
PlotLabel -> "6° Automodo di vibrazione"]`

0.00066493283031576600266868511601994095933	$0 < x <$
Cos[3.80900192647843235564524563975537336449041393 x] -	
0.00066493283031576600266868511601994095933	
Cosh[3.80900192647843235564524563975537336449041393 x] -	
0.00066541633550904047359529433324265852030	
Sin[3.80900192647843235564524563975537336449041393 x] +	
0.00066541633550904047359529433324265852030	
Sinh[3.80900192647843235564524563975537336449041393 x]	
-0.000291503070983033684551500982161239186170	$2 < x <$
Cos[3.80900192647843235564524563975537336449041393 x] +	
Cosh[3.80900192647843235564524563975537336449041393 x] -	
0.000435433884674568725653794662117213391941	
Sin[3.80900192647843235564524563975537336449041393 x] -	
1.00000000000396921161724519751276259125	
Sinh[3.80900192647843235564524563975537336449041393 x]	
0	True

210.49644677808513778119623543144065390950162



(*Riepilogo*)

`Print["Dati materiale (E calcestruzzo, in MPa)"]`

`Ee`

`Print["Dati sezione (area e m. inerzia, in mm2 e mm4)"]`

`Asez`

`Minerzia`

`Print["Parametro strutturale fondamentale per la trave (a)"]`

`a`

`Print["Pulsazioni determinate dagli autovettori"]`

`MatrixForm[Table[Puls[i] = $\sqrt{\text{Aut}[i] * a^2}$, {i, 1, 6}]]`

`Print["Periodi propri per ogni modo (in sec)"]`

`MatrixForm[Table[$\text{Tp}[i] = \frac{2\pi}{\text{Puls}[i]}$, {i, 1, 6}]]`

`Table[Plot[z[k, x], {x, 0, L1 + L2}, AxesLabel -> {"x", "z[x]"},
PlotLabel -> k "° Automodo di vibrazione"], {k, 1, 6}]`

Dati materiale (E calcestruzzo, in MPa)

32 588.1

Dati sezione (area e m. inerzia, in mm² e mm⁴)

150 000

3 125 000 000

Parametro strutturale fondamentale per la trave (a)

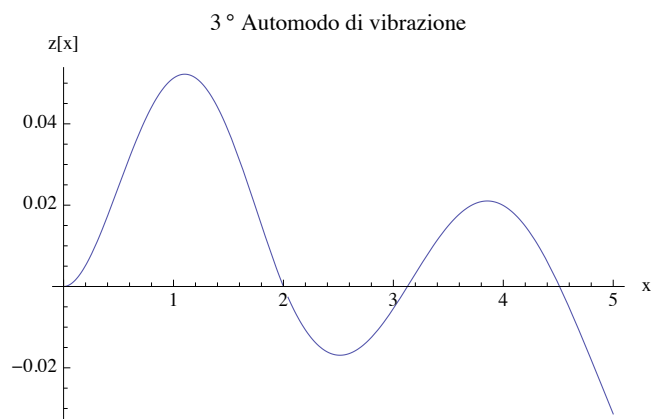
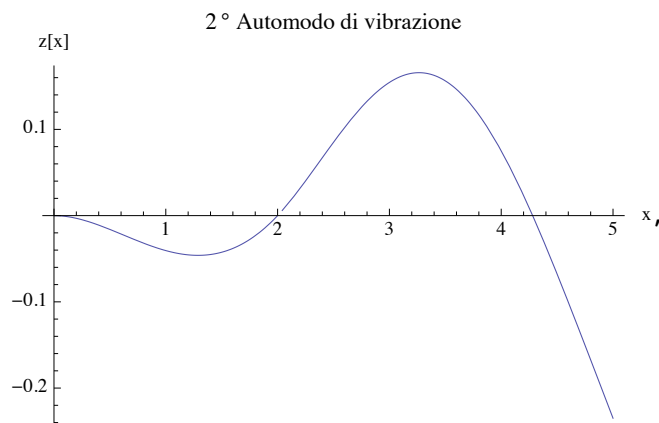
521.121

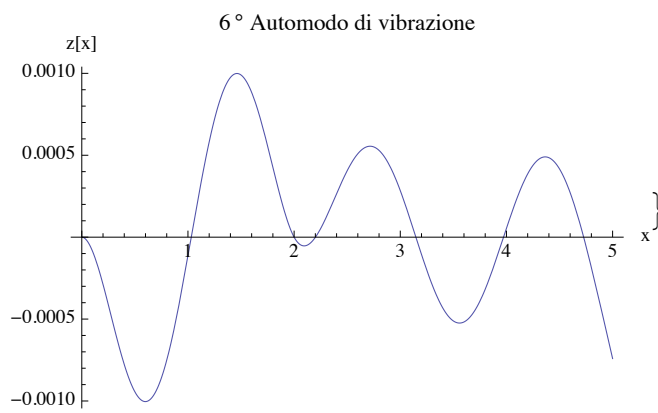
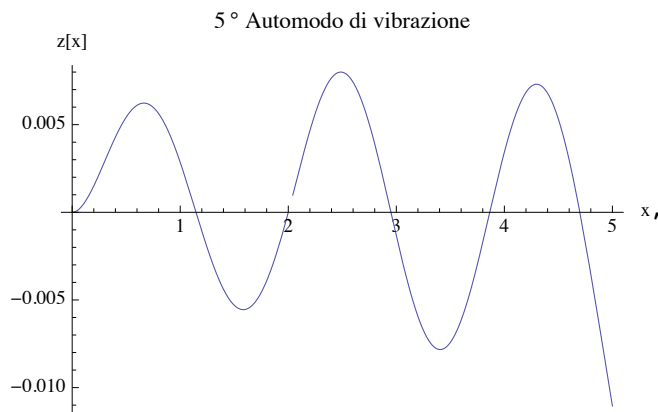
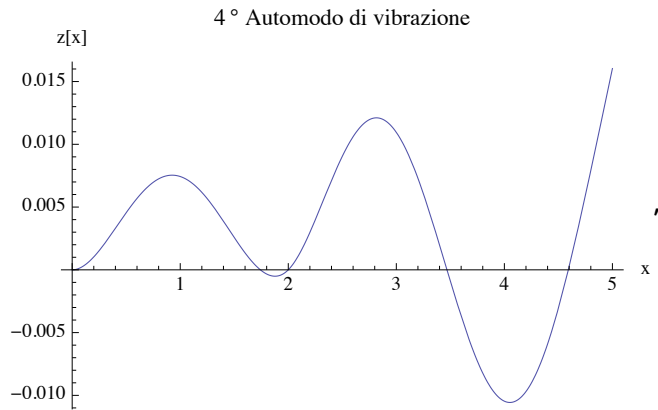
Pulsazioni determinate dagli autovettori

$$\begin{pmatrix} 157.198 \\ 1053.26 \\ 2345.69 \\ 3380.73 \\ 6191.07 \\ 7560.69 \end{pmatrix}$$

Periodi propri per ogni modo (in sec)

$$\begin{pmatrix} 0.0399698 \\ 0.00596544 \\ 0.00267861 \\ 0.00185853 \\ 0.00101488 \\ 0.000831034 \end{pmatrix}$$





(* 3: VERIFICA ORTOGONALITA' MODI DI VIBRAZIONE *)

```

Off[NIntegrate::"precw"]
Off[NIntegrate::"ploss"]
Off[NIntegrate::"ncvb"]
Off[NIntegrate::"slwcon"]
Off[General::"spell"]
Off[General::"spell1"]

Print["Prodotto scalare tra z(i) e z(j):"];

VerOrth =
  Table[NIntegrate[z[i, x] z[j, x], {x, 0, L1 + L2}],
    {i, 1, 6}, {j, 1, 6}];
MatrixForm[VerOrth]

Print["Eliminando i termini prossimi allo 0 si ha:"]
MatrixForm[Table[
  If[i == j, "-", Chop[NIntegrate[z[i, x] z[j, x], {x, 0, L1 + L2}], 10^-9]],
  {i, 1, 6}, {j, 1, 6}]]

```

Prodotto scalare tra z(i) e z(j):

$$\begin{pmatrix}
 (0.820378) & (0. \times 10^{-15}) & (1.38079 \times 10^{-13}) & (3.97201 \times 10^{-12}) & (9.59724 \times 10^{-11}) \\
 (0. \times 10^{-15}) & (0.045218) & (0. \times 10^{-14}) & (-2.66336 \times 10^{-13}) & (-1.46081 \times 10^{-11}) \\
 (1.38079 \times 10^{-13}) & (0. \times 10^{-14}) & (0.00296757) & (0. \times 10^{-16}) & (0. \times 10^{-13}) \\
 (3.97201 \times 10^{-12}) & (-2.66336 \times 10^{-13}) & (0. \times 10^{-16}) & (0.000238375) & (0. \times 10^{-14}) \\
 (9.59724 \times 10^{-11}) & (-1.46081 \times 10^{-11}) & (0. \times 10^{-13}) & (0. \times 10^{-14}) & (0.000125399) \\
 (2.85788 \times 10^{-10}) & (-2.66426 \times 10^{-11}) & (0. \times 10^{-12}) & (0. \times 10^{-13}) & (1.96647 \times 10^{-12})
 \end{pmatrix}$$

Eliminando i termini prossimi allo 0 si ha:

$$\begin{pmatrix}
 - & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\
 \{0\} & - & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\
 \{0\} & \{0\} & - & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\
 \{0\} & \{0\} & \{0\} & - & \{0\} & \{0\} \\
 \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & - & \{0\} \\
 \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & -
 \end{pmatrix}$$

(*Si può notare come per $i \neq j$ si abbiano valori nulli e pertanto gli autovettori sono tutti ortogonali, nonostante la discontinuità.

A rigore la verifica andrebbe effettuata separatamente per i due tratti di trave, essendo la funzione z discontinua.

L'ortogonalità risulta lo stesso verificata poichè il prodotto scalare degli autovettori m ed n generici è uguale e opposto nei due tratti.

(si veda il file di dimostrazione per il dettaglio;
qui di seguito verrà illustrata la dimostrazione numerica)

*)

Print["Primo tratto:"]

```
VerOrtZ1 = Table[Chop[NIntegrate[z[i, x] z[j, x], {x, 0, L1}], 10^-9], {i, 1, 6}, {j, 1, 6}];
MatrixForm[VerOrtZ1]
```

Print["Secondo tratto:"]

```
VerOrtZ2 =
Table[Chop[NIntegrate[z[i, x] z[j, x], {x, L1, L1 + L2}], 10^-9], {i, 1, 6}, {j, 1, 6}];
MatrixForm[VerOrtZ2]
```

Print["Somma:"]

```
SumVerOrtZ = Chop[VerOrtZ1 + VerOrtZ2];
MatrixForm[SumVerOrtZ]
```

(*nota: i termini non esattamente nulli che l'istruzione Chop non è riuscita a rimuovere sono dovuti alla non esatta stima delle radici quarte degli autovalori (μ) tramite il metodo di Newton precedentemente usato; ciò è evidente negli autovalori successivi al 4° dove è stata più difficile l'approssimazione.*)

Primo tratto:

$$\begin{pmatrix} (0.00116481) & (0.00147399) & (-0.00159921) & (-0.000183165) & (0.0000193705) & (-) \\ (0.00147399) & (0.00186882) & (-0.00204618) & (-0.000238492) & (0.0000143353) & (-) \\ (-0.00159921) & (-0.00204618) & (0.00233692) & (0.000293707) & (0.0000380226) & (-) \\ (-0.000183165) & (-0.000238492) & (0.000293707) & (0.0000414517) & (0.0000165465) & (-) \\ (0.0000193705) & (0.0000143353) & (0.0000380226) & (0.0000165465) & (0.0000328482) & (-) \\ (-9.73957 \times 10^{-6}) & (-0.000010891) & (4.18293 \times 10^{-6}) & (-1.29142 \times 10^{-6}) & (-5.18201 \times 10^{-6}) & (-) \end{pmatrix}$$

Secondo tratto:

$$\begin{pmatrix} (0.819214) & (-0.00147399) & (0.00159921) & (0.000183165) & (-0.0000193704) & (-) \\ (-0.00147399) & (0.0433492) & (0.00204618) & (0.000238492) & (-0.0000143354) & (-) \\ (0.00159921) & (0.00204618) & (0.000630648) & (-0.000293707) & (-0.0000380226) & (-) \\ (0.000183165) & (0.000238492) & (-0.000293707) & (0.000196924) & (-0.0000165465) & (-) \\ (-0.0000193704) & (-0.0000143354) & (-0.0000380226) & (-0.0000165465) & (0.0000925513) & (-) \\ (9.73986 \times 10^{-6}) & (0.000010891) & (-4.18293 \times 10^{-6}) & (1.29142 \times 10^{-6}) & (5.18201 \times 10^{-6}) & (-) \end{pmatrix}$$

Somma:

$$\begin{pmatrix} (0.820378) & (0) & (0) & (0) & (1.1945 \times 10^{-10}) & (2.85788 \times 10^{-10}) \\ (0) & (0.045218) & (0) & (0) & (0) & (0) \\ (0) & (0) & (0.00296757) & (0) & (0) & (0) \\ (0) & (0) & (0) & (0.000238375) & (0) & (0) \\ (1.1945 \times 10^{-10}) & (0) & (0) & (0) & (0.000125399) & (0) \\ (2.85788 \times 10^{-10}) & (0) & (0) & (0) & (0) & (1.29612 \times 10^{-10}) \end{pmatrix}$$

(*4: VIBRAZIONI FORZATE*)

```

(*Equazione modale
  (A_k''[t] + ω_k^2 A_k[t] = f_0_k = (p, z_k) / (z_k, z_k), z_k automodo, p peso distribuito/ρS*)
(*Definizione carico distribuito rivolto verso il basso*)
(*Si fissa un carico agente interamente sul tratto di sbalzo*)

xc = L1;
(* Lunghezza del carico a sinistra di xc *)
β1 = 0;
(* Lunghezza del carico a destra di xc *)
β2 = 3;

p[x_] = If[xc - β1 ≤ x ≤ xc + β2, -1, 0];

(*Calcolo del peso effettivo applicato*)
Print["Risultante del carico distribuito applicato p(x) * β2 in N"]
Fapp[x_] = p[x] ρ A sez 10^-6;
risultante = Fapp[L1 + β2] β2

(*Frequenze di risonanza*)
ω[k_] := √(μ[k]^4 * a^2);
(*Numero modi nmod*)
nmod = 6.;
(*Calcolo norma degli automodi (z_k, z_k)*)
Do[norm[kk] = VerOrth[[kk, kk]], {kk, 1, nmod}];

(*Si definiscono le f_k(t)*)
Do[
  fk[kk] = Chop[NIntegrate[p[x] z[kk, x], {x, 0, L1 + L2}, WorkingPrecision → 40]] / norm[kk],
  {kk, 1, nmod}]

(*Si impone quale modo mandare in risonanza: primo nris=1, secondo nris=2, ...*)
nris = 1;
(*Frequenza forzante Ω (Il peso distribuito "p" è moltiplicato per Sin[Ωt]*)
Ω = .98 ω[nris];
Clear[A];

sol = FullSimplify[DSolve[{A''[t] + ωg^2 A[t] == Fk Sin[Ωg t], A[0] == 0, A'[0] == 0}, A[t], t]];
A[t_] = A[t] /. sol[[1]];

Print["Struttura generale coefficiente A[t]=", " " A[t]]

Do[A[kk, t_] = A[t] /. {ωg -> ω[kk], Ωg -> Ω, Fk -> fk[kk]}, {kk, 1, nmod}]
f[x_, t_] = ∑_{i=1}^{nmod} A[i, t] z[i, x];
(*Automodo k-esimo da mandare in risonanza*)
f1[x_, t_] = A[nris, t] z[nris, x];

(*Animazione dei modi di vibrazione*)

```

```
ngraf = 600;
```

```
(*Stima del massimo valore di abbassamento della trave  
ad intervalli di 0.3 m per tutto il tempo dell'animazione*)
```

```
ygr = Max[Table[f[xx, tt], {tt, 0, 64 * 2 * Pi / Omega,  $\frac{1}{ngraf}$  16 * 2 * Pi / Omega}, {xx, 0, L1 + L2, 0.3}]]];
```

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
(*Deformata trave*)
```

```
Animate[Plot[f[x, t], {x, 0, L1 + L2}, Axes → True, AxesLabel → {"x", "m"},  
PlotRange → {{0, L1 + L2}, {-ygr, ygr}}, PlotStyle → {Thick}],
```

```
{t, 0, 64 * 2 * Pi / Omega,  $\frac{1}{ngraf}$  16 * 2 * Pi / Omega}, AnimationRate → 0.05, AnimationRunning → False]
```

```
(*Dettaglio confronto tra modo eccitato e modo risultante*)
```

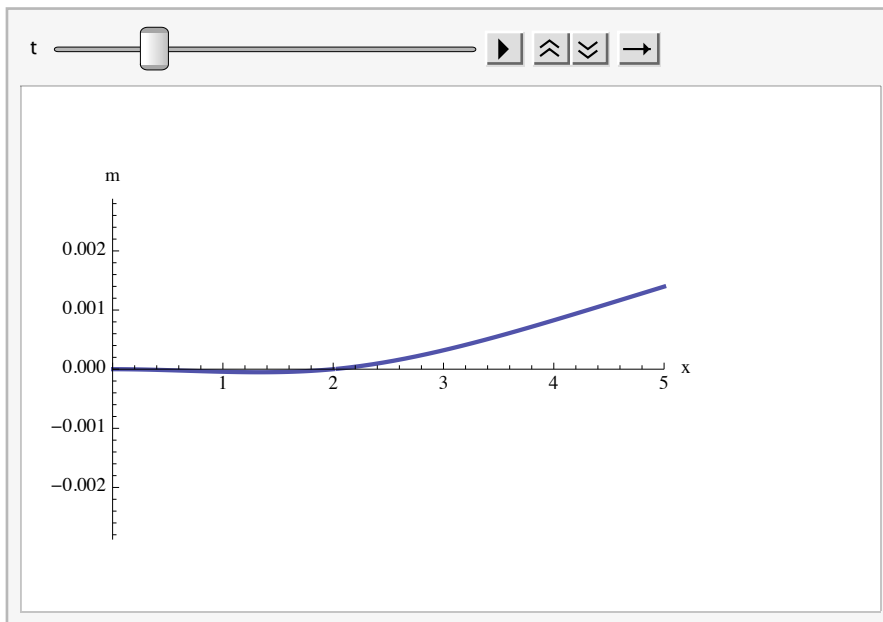
```
Plot[{f1[x, 0.01], f[x, 0.01]}, {x, 0, L1 + L2},
```

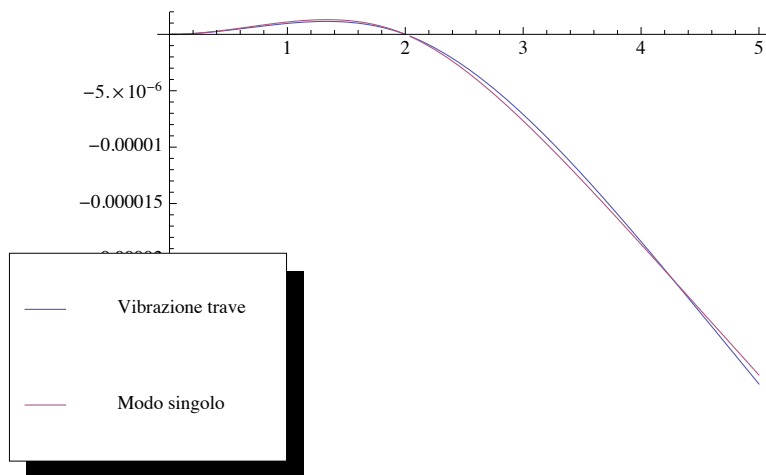
```
PlotLegend → {"Vibrazione trave", "Modo singolo"}, LegendSize → Automatic]
```

Risultante del carico distribuito applicato $p(x) * \beta_2$ in N

- 1125

Struttura generale coefficiente $A[t] = \frac{F_k (-\Omega g \sin[t \omega g] + \omega g \sin[t \Omega g])}{\omega g^3 - \omega g \Omega g^2}$





Modi di vibrazione di una trave incastro - appoggio - estremo libero (applicazione formulazione debole)

Costruzione delle funzioni approssimanti

```

ClearAll;
Off[General::"spell"]
Off[General::"spell1"]
L1 = 2;
L2 = 3;
Funz[x_] = a1 x^r1 + a2 x^r2 + a3 x^r3 + a4 x^r4;
D2Funz[x_] = D[Funz[x], x, 2];
Cond1 = D2Funz[L1 + L2] == 0;
D3Funz[x_] = D[Funz[x], x, 3];
Cond2 = D3Funz[L1 + L2] == 0;
Cond3 = Funz[L1] == 0;
Solve[{Cond1, Cond2, Cond3}, {a1, a2, a3}]
Fappr[x_] =
  ((-2^-r1+r4 a4 +
    (2^-r1+r3 (-(-2^r2 5^-3+r1 (-2+r1) (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-3+r2 (-2+r2) (-1+r2) r2) (-2^r4 5^-2+r1 a4 (-1+r1) r1 + 2^r1
      (-2^r2 5^-2+r1 (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-2+r2 (-1+r2) r2) (-2^r4 5^-3+r1 a4 (-2+r1) (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-3+r4 a4 (-2
        (-(-2^r2 5^-3+r1 (-2+r1) (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-3+r2 (-2+r2) (-1+r2) r2) (-2^r3 5^-2+r1 (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-2+r3 (-
          (-2^r2 5^-2+r1 (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-2+r2 (-1+r2) r2) (-2^r3 5^-3+r1 (-2+r1) (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-3+r3 (-2+r3) (-
            2^-r1+r2 ((-2^r4 5^-2+r1 a4 (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-2+r4 a4 (-1+r4) r4) / (-2^r2 5^-2+r1 (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-2+r2 (-1+r2) r
              ((-2^r3 5^-2+r1 (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-2+r3 (-1+r3) r3) (-(-2^r2 5^-3+r1 (-2+r1) (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-3+r2 (-2+r2)
                (-2^r4 5^-2+r1 a4 (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-2+r4 a4 (-1+r4) r4) + (-2^r2 5^-2+r1 (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-2+r2 (-1+r2)
                  (-2^r4 5^-3+r1 a4 (-2+r1) (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-3+r4 a4 (-2+r4) (-1+r4) r4)))) /
                ((-2^r2 5^-2+r1 (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-2+r2 (-1+r2) r2) (-(-2^r2 5^-3+r1 (-2+r1) (-1+r1) r1 + 2^r1 5^-3+r2 (-2+r2)
  
```

$$\begin{aligned}
& \left(-2^{r_3} 5^{-2+r_1} (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-2+r_3} (-1+r_3) r_3 \right) + \left(-2^{r_2} 5^{-2+r_1} (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-2+r_2} (-1+r_2) r_2 \right) \\
& \left(-2^{r_3} 5^{-3+r_1} (-2+r_1) (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-3+r_3} (-2+r_3) (-1+r_3) r_3 \right) \Big) \Big) \Big) \Big) * x^{r_1} + \\
& \left(- \left(-2^{r_4} 5^{-2+r_1} a_4 (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-2+r_4} a_4 (-1+r_4) r_4 \right) / \left(-2^{r_2} 5^{-2+r_1} (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-2+r_2} (-1+r_2) r_2 \right) + \right. \\
& \left(-2^{r_3} 5^{-2+r_1} (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-2+r_3} (-1+r_3) r_3 \right) \\
& \left(- \left(-2^{r_2} 5^{-3+r_1} (-2+r_1) (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-3+r_2} (-2+r_2) (-1+r_2) r_2 \right) \left(-2^{r_4} 5^{-2+r_1} a_4 (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-2+r_4} a_4 (-1+r_4) r_4 \right) \right. \\
& \left. \left(-2^{r_2} 5^{-2+r_1} (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-2+r_2} (-1+r_2) r_2 \right) \left(-2^{r_4} 5^{-3+r_1} a_4 (-2+r_1) (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-3+r_4} a_4 (-2+r_4) r_4 \right) \right. \\
& \left. \left(-2^{r_2} 5^{-2+r_1} (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-2+r_2} (-1+r_2) r_2 \right) \right) \\
& \left(- \left(-2^{r_2} 5^{-3+r_1} (-2+r_1) (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-3+r_2} (-2+r_2) (-1+r_2) r_2 \right) \left(-2^{r_3} 5^{-2+r_1} (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-2+r_3} (-1+r_3) r_3 \right) \right. \\
& \left. \left(-2^{r_2} 5^{-2+r_1} (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-2+r_2} (-1+r_2) r_2 \right) \left(-2^{r_3} 5^{-3+r_1} (-2+r_1) (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-3+r_3} (-2+r_3) r_3 \right) \right) \\
& \left(- \left(-2^{r_2} 5^{-3+r_1} (-2+r_1) (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-3+r_2} (-2+r_2) (-1+r_2) r_2 \right) \left(-2^{r_4} 5^{-2+r_1} a_4 (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-2+r_4} a_4 (-1+r_4) r_4 \right) \right. \\
& \left. \left(-2^{r_2} 5^{-2+r_1} (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-2+r_2} (-1+r_2) r_2 \right) \left(-2^{r_4} 5^{-3+r_1} a_4 (-2+r_1) (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-3+r_4} a_4 (-2+r_4) r_4 \right) \right) \\
& \left(- \left(-2^{r_2} 5^{-3+r_1} (-2+r_1) (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-3+r_2} (-2+r_2) (-1+r_2) r_2 \right) \left(-2^{r_3} 5^{-2+r_1} (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-2+r_3} (-1+r_3) r_3 \right) \right. \\
& \left. \left(-2^{r_2} 5^{-2+r_1} (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-2+r_2} (-1+r_2) r_2 \right) \left(-2^{r_3} 5^{-3+r_1} (-2+r_1) (-1+r_1) r_1 + 2^{r_1} 5^{-3+r_3} (-2+r_3) r_3 \right) \right) \Big) \Big) \Big) \Big)
\end{aligned}$$

`r2 = r1 + 1;`

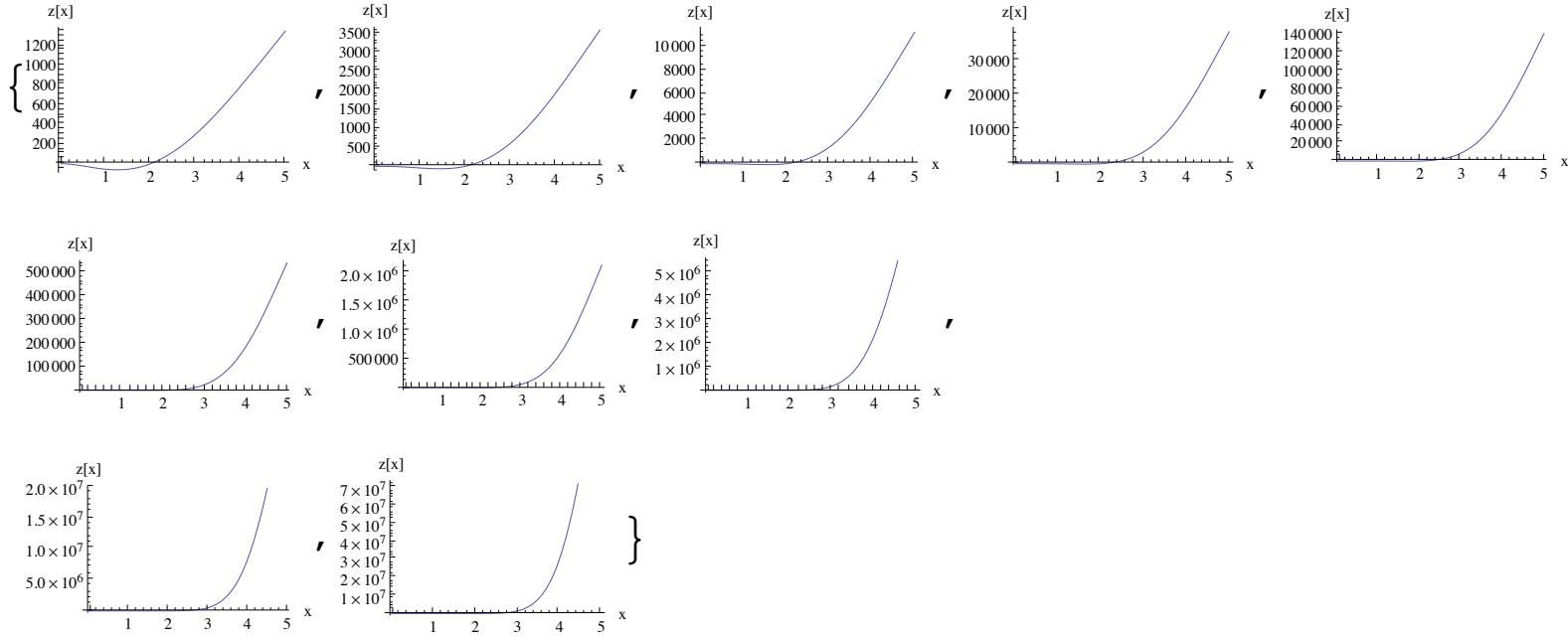
`r3 = r2 + 1;`

`r4 = r3 + 1;`

`Fusate[x_] = Table[Fappr[x] /. a4 -> 1, {r1, 2, 21}];`

`Table[Plot[Fusate[x][[i]], {x, 0, L1 + L2}, AxesLabel -> {"x", "z[x]"}], {i, 1, 10}]`

$$\begin{aligned}
\{ \{ a_1 \rightarrow - \left(\frac{50 (100 a_4 + 96 a_4 r_1 + 29 a_4 r_1^2 + 3 a_4 r_1^3)}{r_1 (30 + 17 r_1 + 3 r_1^2)} \right), a_2 \rightarrow \frac{5 (500 a_4 + 1276 a_4 r_1 + 933 a_4 r_1^2 + 264 a_4 r_1^3)}{r_1 (30 + 47 r_1 + 20 r_1^2 + 3 r_1^3)} \} \} \\
a_3 \rightarrow - \left(\frac{4 (200 a_4 + 216 a_4 r_1 + 75 a_4 r_1^2 + 9 a_4 r_1^3)}{30 + 47 r_1 + 20 r_1^2 + 3 r_1^3} \right) \} \}
\end{aligned}$$



Calcolo col dei di di metodo modi Rayleigh vibrazione – Ritz

In[109]:=

```

D2F[x_, i_] = Table[∂x,xFusate[x][[i]], {i, 1, 20}];
NomIntgr[x_, i_, k_] := (D2F[x, i][[i]] D2F[x, i][[k]]);
DNomIntgr[x_, i_, k_] := Fusate[x][[i]] Fusate[x][[k]];
(*A,B sono rispettivamente matrice dei coefficienti e termine noto del sistema di equazioni lineari*)
AA[x_, i_, k_] := NIntegrate[NomIntgr[x, i, k], {x, 0, L1 + L2}, WorkingPrecision → 80];
BB[x_, i_, k_] := NIntegrate[DNomIntgr[x, i, k], {x, 0, L1 + L2}, WorkingPrecision → 80];
(*Definizione delle matrici*)
a = Table[AA[x, i, k], {i, 1, 20}, {k, 1, 20}];
b = Table[BB[x, i, k], {i, 1, 20}, {k, 1, 20}];
hh = SetAccuracy[Inverse[b], 80];
(*Il problema agli autovalori generalizzato A.X=λB.X viene trasformato nel B-1.A.X=λX*)
Matrice = hh.a;

lamdaappr = Chop[Eigenvalues[Matrice]];
Print["Primi", " ", 20, " ", "autovalori approssimati"]
(*autovalori da calcolo numerico*)
λa = Sort[lamdaappr, (Re[#1] < Re[#2]) &]
ya = SetAccuracy[λa^(1/4), 8];

(*autovalori calcolati con la soluzione in forma classica*)
μ[1] = 0.54923000081485537064311522041666263666764582184944999018576879788150140585405976890737`70.74435
μ[2] = 1.42167081054784804934408887133752540628739925625888246686272693812919330342567237703976426346045
μ[3] = 2.12161113222719869984767879002159337410033619152373555630073483075966854764057`52.29911413960008
μ[4] = 2.54703923941320292756635668412380355426880439879801419713177182255687251656046`47.72033573918394
μ[5] = 3.4467793977327921281513003540889637781921977178296067914164`36.97736052922784;
μ[6] = 3.80900192647843235564524563975537336449041392609373571857323248822762673013778`44.75177150985409
Print["Differenza % fra gli autovalori esatti e quelli approssimati"]
Table[(ya[[i]] - μ[i]) / μ[i] * 100, {i, 1, 6}]

```

Primi 20 autovalori approssimati

```
Out[120]= {0.091010208618926273558875579524524394215841806809774086821651, 4.0865590185063810509787534763836246095:  
20.2743500112010919852392716416318651271701236530716498970808, 42.1822457001279310777023377594053291893:  
141.171525164787764625995504382293799685471221530069746067056, 211.782276085595657903449152688037687576:  
439.635847943761458099713066504725602880787856935794810764964, 768.170727897093103765642744111673029584:  
1058.64351714035217162879382757299738571190408077442401507297, 1885.90737760771306027391090841303145689:  
2389.79230453128286355889233777073692212983345329003568712033, 3626.18478926969789275790878581171789353:  
5072.48917375757600059386657729205170142430136676191632755478, 6959.99253821695519430424187933993946633:  
9976.5694972237426930053629448698032288725378157832964819785, 16698.95342135394770810219130939439973771:  
24058.2803361006468013674407973634823779629616631162742461149, 60102.7142937197560701976256072349355877:  
95899.204819021571343055488154976126406647239396852101900304, 456189.2739588724426695994057008439456543}
```

Differenza % fra gli autovalori esatti e quelli approssimati

Out[129]= {0.00421, 0.009302, 0.016338, 0.056841, 0.005362, 0.152365}

Grafici dei primi venti automodi

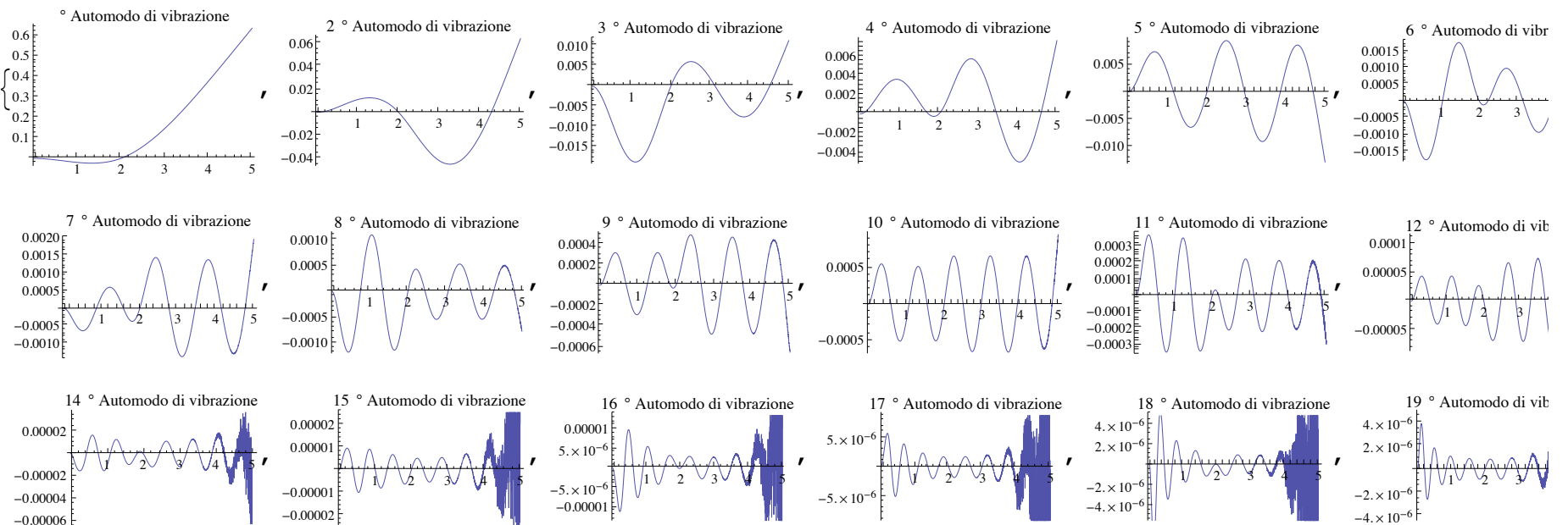
In[130]:=

```
{autoval, autovect} = Eigensystem[Matrice];
tabvalvect = Table[{autoval[[i]], autovect[[i]]}, {i, 1, 20}];
tabord = Sort[tabvalvect, Re[#1[[1]]] < Re[#2[[1]]] &];
Clear[aut]
```

```
Do[X = tabord[[km, 2]]; aut[km] =  $\sum_{i=1}^{20} X[[i]] \text{Fusate}[x][[i]]$ ; gr[km] = Plot[aut[km], {x, 0, L1 + L2}, PlotLabel -> km " °
```

```
Table[gr[km], {km, 1, 20}]
```

Out[135]=



APPENDICE TEORICA 1

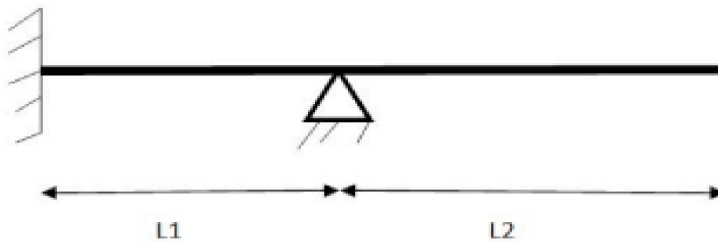
DIMOSTRAZIONE DELL' ORTOGONALITA' DEGLI AUTOMODI DI VIBRAZIONE AVENTI FUNZIONI DISCONTINUE

1. INTRODUZIONE

Sia $z_f(x)$ la funzione di forma costituente
la soluzione degli automodi di vibrazione di una trave :

$$z[x, t] = z_f[x, t] \sin[\omega t]$$

di una trave generica di lunghezza $L_1 + L_2$
che presenta una discontinuità in L_1 come quella in esempio :



Siano $z_f^{(m)}$, $z_f^{(n)}$ le funzioni di forma ottenute dalla soluzione del problema agli autovalori

$$\frac{d^4 z_f}{dx^4} = \lambda z_f$$

in corrispondenza degli autovalori $\lambda_m \lambda_n$.

2. DIMOSTRAZIONE IPOTESI 1

Ipotesi 1 :

$$\left(\frac{d^4 z_f^m}{dx^4}, z_f^n \right) = \left(\frac{d^4 z_f^n}{dx^4}, z_f^m \right)$$

avendo definito il prodotto scalare tra i due modi di vibrazione nella forma seguente

$$(z_1, z_2) = \int_0^{L_1+L_2} z_1 z_2 dx$$

Dimostrazione 1 :

Poichè la funzione è discontinua, il prodotto scalare sarà calcolato separatamente nei due tratti e sommato, ovvero :

$$\int_0^{L_1+L_2} z_1 z_2 dx = \int_0^{L_1} z_1 z_2 dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} z_1 z_2 dx$$

quindi

$$\left(\frac{d^4 z_f^m}{dx^4}, z_f^n \right) = \int_0^{L_1+L_2} \frac{d^4 z_f^m}{dx^4} z_f^n dx = \int_0^{L_1} \frac{d^4 z_f^m}{dx^4} z_f^n dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{d^4 z_f^m}{dx^4} z_f^n dx =$$

Si applica la formula di integrazione per parti (si consideri ora il calcolo solo nel primo tratto) :

$$\int_0^{L_1} \frac{d^4 z_f^m}{dx^4} z_f^n dx = \left[\frac{d^3 z_f^m}{dx^3} z_f^n \right]_0^{L_1} - \int_0^{L_1} \frac{d^3 z_f^m}{dx^3} \frac{d z_f^n}{dx} dx$$

Poichè agli estremi del dominio la z_f o le sue derivate sono sempre nulle a causa della presenza appoggi ($z_f = z_f'' = 0$), incastri ($z_f = z_f' = 0$), o estremi liberi ($z_f'' = z_f''' = 0$) il primo membro si annulla e si continua con l' integrazione per parti :

$$- \int_0^{L_1} \frac{d^3 z_f^m}{dx^3} \frac{d z_f^n}{dx} dx = - \left[\frac{d^2 z_f^m}{dx^2} \frac{d z_f^n}{dx} \right]_0^{L_1} + \int_0^{L_1} \frac{d^2 z_f^m}{dx^2} \frac{d^2 z_f^n}{dx^2} dx$$

sempre con l' eliminazione del primo membro per le condizioni al contorno indicate precedentemente. Continuando ancora con l' integrazione per parti si giunge a :

$$\int_0^{L_1} z_f^m \frac{d^4 z_f^n}{dx^4} dx$$

Applicando gli stessi calcoli nel tratto da L_1 a $L_1 + L_2$ si giunge a

$$\int_{L_1}^{L_1+L_2} z_f^m \frac{d^4 z_f^n}{dx^4} dx$$

Sommando i due contributi si ottiene :

$$\int_0^{L_1} z_f^m \frac{d^4 z_f^n}{dx^4} dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} z_f^m \frac{d^4 z_f^n}{dx^4} dx = \left(\frac{d^4 z_f^n}{dx^4}, z_f^m \right) \text{ C.V.D.}$$

3. DIMOSTRAZIONE FINALE ORTOGONALITA'

Ogni generico modo di vibrazione deve soddisfare l'equazione differenziale del problema agli autovalori precedentemente indicato, pertanto:

$$\left(\frac{d^4 z_f^m}{dx^4}, z_f^n \right) = \left(\frac{d^4 z_f^n}{dx^4}, z_f^m \right) = \lambda_m (z_f^m, z_f^n) = \lambda_n (z_f^m, z_f^n) = (\lambda_m - \lambda_n) (z_f^m, z_f^n) = 0$$

Considerando la discontinuità della funzione l'espressione completa è:

$$(\lambda_m - \lambda_n) \left[(z_f^m, z_f^n)_{L1}^{L1} + (z_f^m, z_f^n)_{L1}^{L1+L2} \right] = 0$$

* Se $m = n$:

$$(z_f^m, z_f^n)_{L1}^{L1} + (z_f^m, z_f^n)_{L1}^{L1+L2} \neq 0 \text{ (come nel caso di trave senza discontinuità)}$$

* Se $m \neq n$:

$$(z_f^m, z_f^n)_{L1}^{L1} + (z_f^m, z_f^n)_{L1}^{L1+L2} = 0, \text{ quindi } (z_f^m, z_f^n)_{L1}^{L1} = - (z_f^m, z_f^n)_{L1}^{L1+L2}$$

ovvero il prodotto scalare dei generici automodi

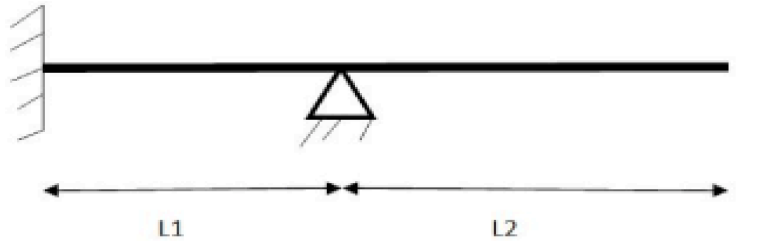
di vibrazione nei due tratti di trave è uguale ed opposto.

Sommando i due contributi si ottiene che per $m \neq n$ il prodotto scalare è nullo e

quindi i modi di vibrazione della trave completa sono tra loro ortogonali. C.V.D.

APPENDICE TEORICA 2

(*Passaggio dalla forma classica alla forma debole del problema dinamico della trave:*)



Partendo dall'equazione $\frac{d^4 z_f}{dx^4} = \lambda z_f$,

moltiplicando tutto per una variazione v ed integrando su $\Omega = \{(0, L1) \cup (L1, L1 + L2)\}$ si ottiene:

$$\int \frac{d^4 z_f[x]}{dx^4} v[x] d\Omega = \lambda \int z_f[x] v[x] d\Omega$$

Spostando la derivata si ottiene:

$$\int \left[\left[\frac{d^3 z_f[x]}{dx^3} v[x] \right]' - \left[\frac{d^3 z_f[x]}{dx^3} \frac{dv[x]}{dx} \right] \right] d\Omega = \lambda \int z_f[x] v[x] d\Omega$$

e quindi

$$\left[\frac{d^3 z_f[x]}{dx^3} v[x] \right]_{\text{su } \Omega} - \int \left[\frac{d^3 z_f[x]}{dx^3} \frac{dv[x]}{dx} \right] d\Omega = \lambda \int z_f[x] v[x] d\Omega$$

riapplicando l'operazione si ottiene:

$$\left[\frac{d^3 z_f[x]}{dx^3} v[x] \right]_{\text{su } \Omega} - \int \left[\frac{d^2 z_f[x]}{dx^2} \frac{dv[x]}{dx} \right]' - \left[\frac{d^3 z_f[x]}{dx^3} \frac{d^2 v[x]}{dx^2} \right] d\Omega = \lambda \int z_f[x] v[x] d\Omega$$

e quindi

$$\left[\frac{d^3 z_f[x]}{dx^3} v[x] \right]_{\text{su } \Omega} - \left[\frac{d^2 z_f[x]}{dx^2} \frac{dv[x]}{dx} \right]_{\text{su } \Omega} + \int \left[\frac{d^2 z_f[x]}{dx^2} \frac{d^2 v[x]}{dx^2} \right] d\Omega = \lambda \int z_f[x] v[x] d\Omega$$

Integrando fra $(0, L1)$ e fra $(L1, L1 + L2)$ ottengo

$$\begin{aligned} & \frac{d^3 z_f[[1]][L1]}{dx^3} v[L1] - \frac{d^3 z_f[0]}{dx^3} v[0] - \frac{d^2 z_f[[1]][L1]}{dx^2} \frac{dv[L1]}{dx} + \\ & \frac{d^2 z_f[0]}{dx^2} \frac{dv[0]}{dx} + \int_0^{L1} \left[\frac{d^2 z_f[x]}{dx^2} \frac{d^2 v[x]}{dx^2} \right] d\Omega + \frac{d^3 z_f[L1+L2]}{dx^3} v[L1+L2] - \\ & \frac{d^3 z_f[[2]][L1]}{dx^3} v[L1] - \frac{d^2 z_f[L1+L2]}{dx^2} \frac{dv[L1+L2]}{dx} + \frac{d^2 z_f[[2]][L1]}{dx^2} \frac{dv[L1]}{dx} + \\ & \int_{L1}^{L1+L2} \left[\frac{d^2 z_f[x]}{dx^2} \frac{d^2 v[x]}{dx^2} \right] d\Omega = \lambda \int z_f[x] v[x] d\Omega \quad \forall v \in M \end{aligned}$$

Si costruisce il dominio delle $z_f[x]$ e il dominio delle variazioni ammissibili M :

$$A = \{ z_f[x] \in \Omega \mid z_f[0] = 0, z_f[0]' = 0, z_f[L1] = 0, z_f[L1+L2]'' = 0, z_f[L1+L2]''' = 0 \}$$

$$M = \{ v[x] \in \Omega \mid v[0] = 0, v[0]' = 0, v[L1] = 0, v[L1+L2]'' = 0, v[L1+L2]''' = 0 \}$$

Alcuni termini quindi si annullano e rimane :

$$\begin{aligned} & \frac{d^3 z_f[[1]][L1]}{dx^3} v[L1] - \frac{d^2 z_f[[1]][L1]}{dx^2} \frac{dv[L1]}{dx} + \\ & \int_0^{L1} \left[\frac{d^2 z_f[x]}{dx^2} \frac{d^2 v[x]}{dx^2} \right] dx - \frac{d^3 z_f[[2]][L1]}{dx^3} v[L1] - \frac{d^2 z_f[L1+L2]}{dx^2} \frac{dv[L1+L2]}{dx} + \\ & \frac{d^2 z_f[[2]][L1]}{dx^2} \frac{dv[L1]}{dx} + \int_{L1}^{L1+L2} \left[\frac{d^2 z_f[x]}{dx^2} \frac{d^2 v[x]}{dx^2} \right] d\Omega = \lambda \int z_f[x] v[x] d\Omega \quad \forall v \in M \\ & \left(\frac{d^2 z_f[[2]][L1]}{dx^2} - \frac{d^2 z_f[[1]][L1]}{dx^2} \right) \frac{dv[L1]}{dx} + \\ & \int_0^{L1} \left[\frac{d^2 z_f[x]}{dx^2} \frac{d^2 v[x]}{dx^2} \right] dx + \int_{L1}^{L1+L2} \left[\frac{d^2 z_f[x]}{dx^2} \frac{d^2 v[x]}{dx^2} \right] dx = \lambda \int z_f[x] v[x] d\Omega \quad \forall v \in M \end{aligned}$$

Essendo le v arbitrarie posso imporre $v[L1] = \frac{dv[L1]}{dx} = 0$ e quindi

$$\int_0^{L1+L2} \left[\frac{d^2 z_f[x]}{dx^2} \frac{d^2 v[x]}{dx^2} \right] dx = \lambda \int z_f[x] v[x] dx \quad \forall v \in M$$

Si vede come la conseguenza di questa formulazione sia l'esistenza della congruenza fra rotazione e momento in $L1$ ossia

$$\partial_x Z_f[[1]][L1] = \partial_x Z_f[[2]][L1]$$

e

$$\partial_{xx} Z_f[[2]][L1] - \partial_{xx} Z_f[[1]][L1]$$

Per risolvere il sistema e trovare gli autovalori λ si deve implementare una soluzione numerica approssimata sfruttando il Metodo approssimato di Ritz - Rayleigh.

Si scrivono delle funzioni approssimate per $Zf[x]$ e per $v[x]$. Come si può notare le condizioni sulla funzione di forma Zf sono omogenee e infatti le variazioni sono funzioni che verificano le stesse condizioni. Si scrive quindi :

$$Zf[x] = \sum_{i=1}^{\infty} c_i * Z_i[x] \text{ e } v[x] = \sum_{i=1}^{\infty} v_i[x]$$

Gli autovalori λ si trovano in forma approssimata :

$$J[\lambda_i] = \frac{N}{D}$$

$$\text{con } N = \sum_{i=1}^{\infty} c_i * A_i[x] \text{ e } D = \sum_{i=1}^{\infty} c_i * B_i[x] \text{ dove}$$

$$A_i[x] = \int_0^{L1+L2} [\partial_{xx} Zf[x] * \partial_{xx} v] dx$$

$$B_i[x] = \int_0^{L1+L2} Zf[x] v[x] dx$$

Si costruisce un $z_i[x]$ che si verifica appartenere ad A :

$$zz[x_] = a1 * x^{r1} + a2 * x^{r2} + a3 * x^{a3} + a4 * x^{r4};$$

$r1 > 2$: garantisce automaticamente che $zz(0)$ e $zz'(0)$ siano nulle automaticamente

$L1 = 2$;

$L2 = 3$;

$zz[L1]$

Imponendo che il polinomio abbia coefficienti tutti >

1 rispetto le condizioni $Z[0] = 0$ e $Z[0]' = 0$

$eq1 = zz[L1] = 0$

$eq2 = zz[L1 + L2]'' = 0$;

$eq3 = zz[L1 + L2]''' = 0$;

$Solve[\{eq1, eq2, eq3\}, \{a1, a2, a3\}]$

$r1 = 2$;

$r2 = r1 + 1$;

$r3 = r2 + 1$;

$r4 = r3 + 1$;

$Zf[x_] = Table[zz[x] /. a4 -> 1, \{r1, 2, 7\}];$

$d2z[i, x_] = Table[\partial_{xx} Zf[x] /. Zf[[i]], \{i, 1, 6\}];$

$$A[j, x_] = \int_0^{L1+L2} d2z[j, x] * d2z[j, x] dx, \{j, 1, 6\};$$

$$B[j, x_] = \int_0^{L1+L2} z[i, x] * z[i, x] dx, \{j, 1, 6\};$$

```
a = Table[Chop[N[A[j, x]]], {j, 1, Nmod2};  
b = Table[Chop[N[B[j, x]]], {j, 1, Nmod2};
```

Il problema agli autovalori generalizzato $A.X = \lambda B.X$ viene tranformato nel $B^{-1}.A.X = \lambda X$

```
mat = Inverse[b].a;
```

```
(*autovalori da calcolo numerico*)  
lamdaappr = Chop[Eigenvalues[mat]];
```

```
(*ordina gli autovalori in ordine crescente*)  
Print["Primi", " ", Nmod2, " ", "autovalori approssimati"]  
 $\lambda a$  = Sort[lamdaappr, (Re[#1] < Re[#2]) &]
```